Área 8 - Econometria **Classificação JEL**:C01,C5,C58

Utilização de cópulas para a montagem de carteiras

Maicon Daniel Rosa Ribeiro[1]
Ludyson Ramon Lira de Abreu[2]

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo avaliar o desempenho de carteiras compostas por ativos que tem dependências nas caudas em relação ao Ibovespa e suas relações com fatores de risco estabelecidos na literatura. Para a construção das carteiras, utilizou-se cópulas bivariadas e selecionou-se duas carteiras com base na dependência na cauda superior ou inferior (carteira *Upper* e *Lower*, respectivamente). Dentre os principais resultados, tem-se que a maioria dos ativos do Ibovespa apresentam relação simétrica com o índice, indicado pela cópula t. Para ambas as carteiras, temos que os fatores de risco de mercado influenciam seu excesso de retorno, além de encontrarmos um α_{Jensen} estatisticamente significante, indicando retornos não associados aos fatores de risco de mercado para ambas as carteiras.

Palavras-chave: cópulas; carteiras; riscos de mercado; Fama-French; Fama-French-Carhart.

ABSTRACT

The paper aims to evaluate the performance of portfolios composed of assets that show dependencies in the tails in relation to the Ibovespa, and their relationships with risk factors established in the Literature. For this, we use bivariate copulas to model tail dependence between Ibovespa index and its assets. We build two portfolios: one with upper tail dependence (Upper portfolio) and one with lower tail dependence (Lower portfolio). Among the main results, we have that most of Ibovespa assets have a linear and symmetric relation that can be modelled using a t-Student copula. For risks factors, for both portfolios, we find that market risks explain their excess return, and we find statistical significance for α_{Jensen}, indicating that we have returns that are not associated with market risk.

Keywords: copulas; portfolios; market risks; Fama-French; Fama-French-Carhart.

[1] Mestrando em Economia Aplicada pelo Programa de Pós-Graduação em Economia (PPGE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Contato: maicon.94@hotmail.com

[2] Mestrando em Economia Aplicada pelo Programa de Pós-Graduação em Economia (PPGE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) - Contato: ludyson_@hotmail.com

1 INTRODUÇÃO

Uma carteira nada mais é do que uma combinação linear entre diferentes ativos. Um agente racional, segundo Markowitz (1968), buscará minimizar o risco de sua carteira, dado um nível de retorno esperado, por meio da diversificação, isto é, o agente escolherá aquela combinação linear de ativos que minimiza o risco da sua carteira dado um nível de retorno esperado.

Para se computar o risco usualmente usa-se a matriz de covariâncias dos ativos em questão; essa matriz, no entanto, apresenta o ônus de crescer, em dimensão, de maneira rápida conforme se acrescentam mais ativos à Carteira.

Para contornar esse ônus, Sharpe (1964) e Lintner (1975) propuseram um modelo mais parcimonioso, o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Com menos parâmetros sendo necessários para se proceder à minimização do risco de uma Carteira e, assim, tornando o processo de determinação dos pesos ótimos, de cada ativo, mais direto. Ao invés de ser necessário o cômputo de uma matriz de covariâncias, bastava que se calculasse o valor β de cada ativo (essa variável sendo uma medida de sensibilidade do ativo em questão com relação à carteira de mercado); o CAPM, no entanto, apresenta certas falhas. Em alguns casos aponta retornos maiores do que os observados e em outros menores.

Aos casos em que há um *descasamento* entre o predito pelo CAPM e a realidade dá-se o nome de *Anomalia*. As principais *Anomalias* registradas são as referentes à Capitalização de Mercado, à relação *Book-to-Market* (relação entre o valor patrimonial e a capitalização de mercado) e ao Momento.

Para contornar os problemas do CAPM, Fama e French (1992) - usando o *Arbitrage Pricing Theory* (APT), proposto por Ross(1976) - propuseram um modelo que *explica* o retorno dos ativos como uma função linear de fatores de risco (sendo esses fatores de risco: o Excesso de retorno do mercado ($R_m - R_f$), o SMB e o HML). Carhart (1997) expande o modelo de Fama e French adicionando o fator de risco WML.

No desenvolvimento do presente artigo pretende-se montar diferentes carteiras com base na relação existente entre as caudas da carteira de mercado e de ativos específicos. Desse modo, procura-se verificar se carteiras baseadas nesse critério apresentam performance superior à carteira de mercado e se os retornos das carteiras criadas apresentam retornos não explicados pelos fatores de risco comumente utilizados na literatura empírica, notadamente aqui refere-se ao modelo CAPM e o modelo de Fama-French-Carhart. Como *benchmark* de comparação de performance utiliza-se o Ibovespa e os ativos selecionados são os ativos que perfazem o índice.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A *Modern Portfolio Theory*[1] (MPT) propõe que investidores racionais usam a diversificação para otimizar suas Carteiras. Nesse modelo, as Carteiras são compostas por uma combinação linear de ativos, cujos retornos são tratados como variáveis aleatórias. Os pesos dados aos ativos que perfazem a Carteira são calculados por meio de processos de otimização. Dado um nível de retorno procura-se a combinação linear de ativos que irá proporcionar o menor risco possível.

Como medida de risco toma-se a Variância e como medida de retorno a Esperança, o modelo recai em um problema de programação quadrática que busca encontrar a fronteira eficiente da carteira[2] (FÁVERO; BELFIORE, 2012). Vidyamurthy (2004) argumenta que a abordagem de se medir risco de um determinado ativo por meio da variância[3] de seus retornos é devida ao trabalho seminal de Markowitz (1968). A construção de um modelo de seleção de carteiras de investimento marca, como afirma Fonseca (2003), o surgimento da análise financeira moderna.

Em forma matricial o problema pode ser escrito como apresentado na Equação 2.1.

$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & w'\hat{\Sigma}w \\ \text{s.a.} \quad & \begin{cases} w'\hat{\mu} = \bar{r} \\ w'\mathbf{1} = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\hat{\Sigma}$ é a matriz de covariâncias estimada dos retornos dos ativos, $\hat{\mu}$ é o vetor coluna de Expectativas dos retornos dos ativos, w é um vetor coluna de pesos de cada ativo na cateira e $\bar{r}$ é o retorno médio escolhido pelo investidor.

O problema, no entanto, aumenta em nível de complexidade de maneira muito rápida. Devido ao grande número de parâmetros a serem estimados[4] e à limitação computacional existente na época, argumenta Fonseca (2003), o modelo era de dificil aplicação. O que motivou um dos discipulos de Markowitz, Sharpe (1964), a desenvolver uma versão simplificada do modelo.

O *Capital Asset Pricing Model*(CAPM), introduzido de maneira independente por Sharpe (1964) e Lintner (1975), pode ser considerado como um desenvolvimento do MPT. Uma das principais implicações práticas do modelo CAPM consiste na justificativa para se adotar uma estratégia passiva de seleção de Carteiras, conhecida como *indexação*, que significa a construção de uma Carteira que reproduz aquela que é determinada pelo mercado (FONSECA, 2003). A estratégia de seleção passiva também se justifica pela *Hipótese de Eficiência de Mercado*(HEM); visto que, uma vez que as informações no mercado são difundidas de maneira eficiente, torna-se impossível se montar uma estratégia de investimento que proporcione rentabilidade superior a de mercado(FAMA, 1970).

Dada uma Carteira que seja representativa do mercado, todos os ativos podem ser escritos indexados a essa Carteira. Ativos mais sensíveis a essa carteira são considerados mais arriscados enquanto os menos sensíveis são considerados menos arriscados. Se R_m for o retorno da carteira de mercado, R_f for a taxa de juros livre de risco e R_i o retorno do ativo *i* então pode-se relacionar o retorno esperado do ativo *i* pela Equação 2.2.

$$\mathbb{E}(R_i - R_f) = \hat{\beta}\mathbb{E}(R_m - R_f) \tag{2.2}$$

Ou seja, o valor do β estimado representa o quanto o retorno esperado do ativo *i* está relacionado ao

1 Teoria Moderna de Carteiras.
2 A fronteira eficiente é composta por todas as carteiras factíveis que associam a cada retorno esperado o menor risco associado.
3 Note que **var**(x) = **cov**(x, x)
4 Dado um universo de 5000 ativos, por exemplo, a matriz de covariâncias $\hat{\Sigma}$, necessária para se conseguir computar a carteira eficiente, tem 25 milhões de entradas (VIDYAMURTHY, 2004)

retorno esperado da carteira de mercado (CHIAH et al., 2016). O ativo é considerado neutro se o β estimado for igual à unidade, visto que nesse caso o retorno esperado será igual ao retorno esperado do mercado; o parâmetro β, portanto, resume o risco associado ao ativo *i*. Uma vez que o parâmetro tenha sido estimado tem-se uma medida de quanto risco e retorno o ativo *i* acrescenta à carteira que se pretende criar.

Dados *n* ativos seriam necessárias pelo menos n^2 entradas na matriz de covariâncias para o cômputo dos pesos ótimos de uma carteira eficiente; via o CAPM, porém, é necessário somente o cômputo de *n* parâmetros (um β para cada ativo).

Jensen (1968) argumenta que o β estimado pode ser obtido via regressão [5] e que, além disso, se o responsável pela gestão da carteira for competente ele escolherá sistematicamente carteiras que proporcionam retornos positivos não relacionados ao retorno esperado do mercado, isto é, usando-se a Equação 2.3 o parâmetro α será positivo e significativo.

$$(R - R_f)_t = \alpha + \beta(R_m - R_f)_t + \varepsilon_t \tag{2.3}$$

onde $(R_i - R_f)_t$ é o excesso de retorno do ativo i, $(Rm - R_f)_t$ é o excesso de retorno do mercado e ε_t é um termo de erro não correlacionado com a variável explicativa cuja esperança é zero e a variância é constante.

Há padrões nos retornos dos ativos que, no entanto, não são possíveis de serem explicados pelo CAPM (FAMA; FRENCH, 1996). A esses padrões deu-se a alcunha de *Anomalias*. Ou seja, fazendo-se uso dessas *Anomalias* é possível se obter retornos sistematicamente a cima do previsto pelo CAPM. Logo, o α de Jensen (1968) pode ser conseguido por acaso e não necessariamente pela competência do administrador da carteira.

A primeira *Anomalia*, ao menos a que tem se mostrado a mais robusta, é a relacionado à Capitalização de Mercado[6] (BANZ, 1981). Banz (1981), ao analisar ativos cotados no mercado Norte Americano, conclui que ativos com menor capitalização tendem a apresentar retornos superiores àqueles previstos pelo CAPM. Além disso, ativos que apresentam capitalização de mercado semelhantes tem maior probabilidade de serem correlacionadas entre si (HUBERMAN; KANDEL, 1987), (BHANDARI, 1988).

Adicionalmente à *Anomalia* referente à capitalização de mercado, há a *Anomalia* referente a relação entre o valor contábil do ativo com sua capitalização de mercado[7](BHANDARI, 1988). Ativos cuja relação *Book-to-Market*[8] é maior tendem a apresentar retornos superiores àqueles previstos pelo CAPM (ROSENBERG; REID; LANSTEIN, 1985).

Jegadeesh e Titman (1993), assim como Bhandari (1988), encontram sazonalidade no retorno dos ativos no mês de Janeiro (uma sazonalidade negativa) e outras sazonalidades positivas fora do mês de Janeiro (notadamente em Agosto, Abril, Novembro e Dezembro).Essa sazonalidade foi encontrada quando do estudo de outra *Anomalia*, denominada de *Momento*.Essa *Anomalia* não está relaciona a um tipo de ativo específico mas ao estado do ativo, isto é, se um ativo obtém sistematicamente retornos positivos (denominado ativo *Winner*) ou se obtém retornos sistematicamente negativos (denominado ativo *Loser*).

Ativos que são *Winners* permanecem *Winners* mas ativos que são *Losers* ou permanecem *Losers* ou desaparecem (PIOTROSKI, 2000). Jegadeesh e Titman (1993) argumentam que o ganho advindo do uso dessa *Anomalia* está relacionado ao comportamente exagerado e demorado dos agentes às informações disponibilizadas pelo mercado; Piotroski (2000), no entando, argumenta que os agentes incorporam informações de maneira lenta[9]. Há inumeras outras *Anomalias* na literatura sendo as apresentadas as principais[10].

---

[5] Utilizando-se *Ordinary Least Squares*(OLS).

[6] Às vezes também referida como *Size Anomaly*.

[7] Às vezes referida como *Value Anomaly*.

[8] A relação *Book-to-Market* é simplesmente a razão entre o valor contábel do ativo com relação a sua capitalização à mercado.

[9] Analistas financeiros são menos propensos a recomendar ativos com fraco desempenho (o que acaba por potencializar a tendência de compra de ativos com bom desempenho no passado e de venda de ativos com fraco, ou péssimo, desempenho no passado)(PIOTROSKI, 2000)

[10] Para mais informações sobre *Anomalias* os seguintes artigos são recomedados: Sanvicente, Minardi et al. (1998), Titman, Wei

Com o auxílio do *Arbitrage Pricing Theory*(APT), introduzido por Ross (1976), é possível se conciliar a precificação de ativos com mais do que somente um fator de risco (o CAPM usa o excesso de retorno de mercado com relação ao ativo livre de risco[11]). O APT se baseia na premissa de *Preço Único*, isto é, não é possível que um ativo seja negociado a dois preços diferentes em um mesmo período de tempo [12]. Rogers e Securato (2009) argumentam que fatores que mensuram respostas sistemáticas a variações macroeconômicas e a características dos ativos são muito relevantes para se *explicar* retornos esperados.

O retorno de quaisquer ativos é dado como a soma de duas partes principais. Sendo a primeira uma parte esperada e a segunda uma parte inesperada. A parte esperada é função de todas as informações que os agentes tem acesso e a parte inesperada é função de informações novas que serão reveladas com o tempo. A parte inesperada pode ser dividida em duas parcelas: uma referente ao risco sistemático e outra correspondendo ao risco não-sistemático.

No APT há dois pontos que devem ser analisados com cuidado: (1) quais e quantos fatores que *capturam* o efeito do risco sistemático e (2) como é realizada a mensuração de sensibilidade dos retornos dos ativos a cada um desses fatores. O método mais usual é por meio da construção de carteiras fatoriais que imitam as características dos efeitos de risco sistemático (HUBERMAN; KANDEL, 1987). A Equação 2.4 é uma representação do formato do APT. Cada fator (F) tem como objetivo capturar uma parte do risco sistemático, cada parâmetro β mede a sensibilidade que cada ativo tem em relação a cada um dos fatores de risco[13].

$$(R_i - R_f)_t = \beta_1 F_{1,t} + \cdots + \beta_n F_{1,t} + \varepsilon_t \tag{2.4}$$

Com base nas *Anomalias* relacionadas à Capitalização de mercado dos ativos[14] e do *Book-to-Market*, e as evidências apresentadas por Chan, Hamao e Lakonishok (1991)), Fama e French (1992) e Fama e French (1996) argumentam que um modelo que leve em consideração essas *Anomalias* é útil para explicar boa parte do excesso de retorno de ativos. Usando o APT e criando carteiras que imitem essas *Anomalias*, com o intuito de usá-las como fatores de risco, Fama e French (1996) propuseram o modelo dado na Equação 2.5.

$$(R - R_f)_t = \beta_1 (R_m - R_f)_t + \beta_2 SMB_t + \beta_3 HML_t + \varepsilon_t \tag{2.5}$$

onde $(R_m - R_f)$ é o ecesso de retorno da carteira de mercado com relação a um ativo livre de risco, SMB[15] é a diferente entre uma carteira composta por ativos com baixa capitalização e outra com ativos com alta capitalização, HML[16] é a diferente entre uma carteira composta por ativos com alta relação *Book-to-Market* e outra carteira composta por ativos com baixa relação *Book-to-Market* e ε é o risco não sistemático.

Carhart (1997) generaliza o modelo proposto por Fama e French (1996) acrescentando à sua análise a *Anomalia* de *Momento*. O modelo de Fama-French-Carhart, como ficou conhecido, usa três fatores (além do excesso de retorno do mercado) de risco:SMB, HML e WML[17]. O modelo proposto é apresentado na Equação 2.6.

$$(R - R_f)_t = \beta_1 (R_m - R_f)_t + \beta_2 SMB_t + \beta_3 HML_t + \beta_4 WML_t + \varepsilon_t \tag{2.6}$$

---

e Xie (2004) e Novy-Marx (2013)

[11] $(R_m - R_f)$

[12] Hipótese de não-arbitragem.

[13] Às vezes também denominados de "parâmetros de carregamento".

[14] Para o mercado Chinês a variável de Capitalização de Mercado foi considerada a *Anomalia* mais importante, no quesito grau de explicacão dos retornos(HU et al., 2019)

[15] *Small Minus Big*

[16] *High Minus Low*

[17] *Winners Minus Losers* (WML).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com base nos ativos negociados no Ibovespa, serão criadas carteiras distintas baseadas na relação existente na cauda desses ativos com a cauda do índice Ibovespa. Desse modo, busca-ve verificar se carteiras baseadas nas distribuições apresentam retornos superiores ao próprio índice e se esses retornos são explicados pelos modelos tradicionais de precificação. A Carteira *Lower* é composta pelos ativos que apresentam maior dependência na cauda inferior e é rebalenceada mensalmente e a Carteira *Upper* é composta pelos ativos que apresentam maior dependência na cauda superior e é rebalanceada mensalmente. O peso dado a cada ativo nas carteiras é $\frac{1}{n}$, onde n é a quantidade de ativos em cada carteira, desse modo garantindo pesos iguais.

Os dados referentes aos preços tem início em 1 Fevereiro de 2011 e final em 6 de Junho de 2022.

O procedimento adotado para a verificação da relação nas caudas e, consequentemente, para a elaboração das carteiras de interesse será realizado com a utilização de diferentes cópulas. Para tanto, os retornos dos pares de ativos (o índice Ibovespa e cada um dos ativos individuais) não devem apresentar autocorrelação. O procedimento, portanto, é direto: aplicam-se modelos ARIMA e modelos de volatilidade condicional, os quais são apresentados na próxima seção, aos retornos dos ativos e, posteriormente, usam-se diferentes configurações de Cópulas para se verificar qual configuração modela de maneira mais adequada a relação existente entre cada um dos ativos com relação ao índice Ibovespa; os ativos, então, são separados de acordo com o tipo de cópula que melhor os modela. Uma vez que cada ativo tenha sido classificado, de acordo com o critério de cópulas exposto, montam-se carteiras de pesos iguais para dependências na cauda superior e cauda inferior.

3.1 FATORES DE RISCO

Os ativos que compõem os fatores de risco usados devem estar dentro de alguns critérios. A FEA-USP (2022) lista os seguintes:

- O ativo é cotado na B3;
- O ativo é o mais negociado da firma (no caso em que houver uma ON e uma PN escolhe-se a que é mais negociada);
- O ativo foi negociado em pelo menos 80 % dos dias no ano t-1 com um volume de negociação maior do que R$ 500.000,00 por dia. No caso de o ativo ter sido listado no ano t-1 o período considerado vai do dia da listagem até o final do ano;
- O ativo foi listado antes do mês de Dezembro do ano t-1;

O fator de excesso de retorno do mercado, $R_m - R_f$, é composto pela diferença entre o retorno diário de uma Carteira representativa do mercado (R_m) e a taxa de juros livre de risco(R_f), aqui adota-se o CDI diário.

O fator referente à *Anomalia* de Tamanho, o SMB, é construído pela diferença entre duas carteiras com capitalizações de mercado diferentes(S e B). Sendo a carteira S composta, com pesos iguais, pelos ativos com menor capitalização de mercado (o primeiro tercil) e a Carteira B composta, com pesos iguais, pelos ativos com maior capitalização de mercado (o terceiro tercil)[1].

Quanto à *Anomalia* de Valor, o fator HML é construído pela diferença entre duas Carteiras com relação *Book-to-Market* diferentes (H e L). Sendo a Carteira H[2] composta, com pesos iguais, pelos ativos

[1] Em todo mês de Janeiro do ano t os ativos eligíveis são organizados em ordem crescente com relação ao seu valor de capitalização à mercado no ano t-1 e, então, são separados em tercis.

[2] Às vezes também referida como "Carteira de Valor".

com maior relação *Book-to-Market* (o terceiro tercil) e a Carteira L[3] composta, com pesos iguais, pelos ativos com menor relação *Book-to-Market* (o primeiro tercil)[4].

O fator de risco WML, que busca capturar o efeito da *Anomalia* de Momento, é composto pela diferença entre duas Carteiras (W e L). Sendo a Carteira W composta, com pesos iguais, pelos ativos com o maior retorno acumulado do período (terceiro tercil) e L uma carteira, com pesos iguais, com os ativos com menor retorno acumulado do período(primeiro tercil)[5].

Os dados foram coletados pelo banco de dados do FEA-USP (2022)[6]. E compreendem o período de 2 de Janeiro de 2001 até a data de 31 de Março de 2021, totalizando 5010 observações. Utilizou-se o software R para a estimação dos resultados apresentados.

3.2 MODELOS PARA MÉDIA E VARIÂNCIA CONDICIONAIS

Para capturar as características referentes às dinâmicas das variáveis, utilizou-se o modelo ARMA(p,q)-GARCH(m,n). O modelo ARMA(p,q) é utilizado para capturar a dinâmica da média condicional, enquanto o modelo GARCH(m,n) é utilizado para capturar o comportamento da variância condicional. Os modelos são explicitados nas Equações 3.1.

$$
\begin{aligned}
r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \\
\epsilon_t = \xi_t . \sigma_t, \xi_t \sim iid(0,1) \\
\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \epsilon_{t-k}^2 + \sum_{l=1}^{n} \beta_l \sigma_{t-l}^2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

onde ϵ_t é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ e variância igual à unidade, $\alpha_k, \beta_l \geq 0$ $\forall\ i > 0, \omega_0 > 0$ e $\sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. A variável ξ_t não tem que apresentar distribuição normal, desde que tenha momentos assintóticos semelhantes à normal e seja uma sequência i.i.d. (BUENO, 2012).

Sendo assim, para a distribuição marginal ξ_t, utilizou-se a distribuição *Skewed-t* (λ, v), conforme proposta por Hansen (1994). Nessa distribuição, além de haver um parâmetro referente às caudas pesadas da distribuição (os graus de liberdade v), também há um parâmetro referente à assimetria, λ. Como tanto caudas pesadas, quanto assimetria são fatos estilizados de retornos de ativos financeiros, essa distribuição pode ser mais adequada para capturar tais características (DANIELSSON, 2011).

O próximo passo é testar se as distribuições marginais das variáveis são distribuições uniformes. Nesse sentido, seja μ_t a média condicional e σ_t^2 a variância condicional. Define-se, então, $u_i = F(r_t|\mu_t, \sigma_t^2)$ como a função distribuição acumulada de r_t, dada a média e variância condicionais. Caso $r_t \sim Skewed-t(\lambda, v)$ e seus modelos para média e variância condicional estejam bem especificados, então $u_i \sim U[0,1]$. Para testar essa hipótese, utilizou-se o teste Kolmogorov-Smirnoff (KS).

3.3 CÓPULAS

De acordo com o teorema de Sklar (1959), uma cópula é uma função $C : [0,1]^2 \to [0,1]$, tal que para uma $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$, onde $F(x_i) \sim U[0,1], i = 1,2$. A partir do teorema de probabilidade

[3] Às vezes também referida como "Carteira de Crescimento".

[4] Em todo mês de Janeiro do ano t os ativos eligíveis são organizados em ordem crescente com relação a razão *Book-to-Market* de cada ativo no ano t-1 e, então, são separados em tercis.

[5] Em todo mês t os ativos elegíveis são organizados em ordem crescente com relação ao retorno acumulado de cada ativo no preríodo de t-12 e t-2 meses.

[6] *Brazilian Center for Research in Financial Economics of the University of São Paulo.*

integral, podemos sempre indicar que uma função de distribuição acumulada segue uma distribuição uniforme. Adicionalmente, sendo as distribuições marginais contínuas, a cópula é uma função única. Temos, então, as seguintes correspondências:

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial F(X_1, X_2)}{\partial X_1, X_2} = c(u_1, u_2).f_1(x_1).f_2(x_2) \tag{3.2}$$

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1, u_2} \tag{3.3}$$

Uma das grandes vantagens em se utilizar cópulas para a modelagem de estruturas de dependência é de que ela pode tanto assumir formas simétricas ou assimétricas, independente da distribuição das marginais. Nesse sentido, é possível capturar tanto a dependência não linear entre ativos, como também modelar características como assimetria e caudas pesadas a partir de modelos para as marginais de cada variável (DANIELSSON, 2011).

Para as cópulas paramétricas, podemos caracteriza-las a partir de sua família, podendo ela ser elíptica ou arquimediana. As cópulas elípticas são obtidas diretamente a partir do teorema de Sklar e não apresentam dependência nas caudas, enquanto as cópulas arquimedianas são geradas a partir de uma função geradora e algumas das famílias de cópulas arquimedianas apresentam dependência nas caudas.

O conceito de dependência nas caudas refere-se à dependência apenas para valores extremos da variável. Conforme Czado (2019), podemos definir dependência nas caudas como a probabilidade conjunta de ocorrência de valores extremos, podendo ocorrer tanto para extremos negativos como extremos positivos. Sendo assim, existindo esse tipo de característica entre variáveis aleatórias, o coeficiente de correlação de Pearson pode não ser o mais acurado para capturar as relações de dependência, dado que é linear para quaisquer valores que a variável assuma. Nas Equações 3.4 e 3.5 definimos dependência na cauda superior e inferior, respectivamente.

$$\lambda_U = lim_{\tau \to 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{-1}(\tau) | X_1 > F_1 - 1(\tau)] = lim_{\tau \to 1^-} \frac{1 - 2\tau + C(\tau, \tau)}{1 - \tau} \tag{3.4}$$

$$\lambda_L = lim_{\tau \to 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{-1}(\tau) | X_1 \leq F_1^{-1}(\tau)] = lim_{\tau \to 0^+} \frac{C(t, t)}{t} \tag{3.5}$$

Para algumas famílias de cópulas, existe uma correspondência entre os parâmetros da cópula e a dependência na cauda inferior e/ou superior. Além disso, algumas famílias de cópulas apresentam mais de um parâmetro referente a dependência na cauda, sendo elas chamadas de cópulas BB. Como alguns dos parâmetros das cópulas são limitados a um conjunto de valores, é possível "rotacionar"as distribuições marginais como forma a "extender"o domínio de valores assumidos. Logo, temos que uma cópula rotacionada 90° é dada por $c_{90}(u_1, u_2) = c(1 - u_2, u_1)$, enquanto a cópula rotacionada 180° (ou *survival*) é definida por $\overline{c}_{180}(u_1, u_2) = c(1 - u_1, 1 - u_2)$.

No presente artigo, utilizamos a cópula BB1 e sua versão rotacionada 180° (a "survival BB1"). Tais cópulas foram as selecionadas conforme critérios de informação, como apresentado na seção de Resultados. Na Equação 3.6, apresentamos a função da cópula BB1. Em sua versão "survival"(Equação 3.7), temos $\overline{u_1} = 1 - u_1$ e $\overline{u_2} = 1 - u_2$.

$$C_{BB1}(u_1, u_2; \theta, \delta) = \left(1 + \left[(u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta}\right]^{\frac{1}{\delta}}\right)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta > 0, \delta > 1 \tag{3.6}$$

$$C_{BB1}(\overline{u}_1, \overline{u}_2; \theta, \delta) = \left(1 + \left[(\overline{u}_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (\overline{u}_2^{-\theta} - 1)^{\delta}\right]^{\frac{1}{\delta}}\right)^{-\frac{1}{\theta}}, \theta > 0, \delta > 1 \tag{3.7}$$

Para a estimação das cópulas, utilizou-se o procedimento "inferência pelas margens"conforme proposto por Joe e Xu (1996). Sendo assim, a partir das distribuições marginais das variáveis (obtidas após a estimação de modelos para a média e variância condicional), estimam-se os parâmetros das cópulas a partir de máxima verossimilhança. Nas Equações 3.8 e 3.9 está disposta a função log-verossimilhança da cópula, assim como seu estimador de máxima verossimilhança.

$$\ell(\theta) = \ell_{f_1}(u_1;\theta_1) + \ell_{f_2}(u_2;\theta_2) + \ell_c(u_1,u_2;\theta_{c,t}) \tag{3.8}$$

$$\widehat{\theta}_{c,t} = argmax \sum_{t=1}^{T} \ell_c(u_1,u_2;\theta_{c,t}) \tag{3.9}$$

3.4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Nessa seção, serão apresentados os resultados para as cópulas estimadas e os modelos de precificação de ativos. Inicialmente, foram estimados modelos para as marginais de cada um dos ativos; depois, estimou-se cópulas bivariadas entre cada um dos retornos dos ativos e retornos do IBOV. Na Tabela 1 estão dispostas as ordens dos modelos selecionados, assim como o AIC correspondente e resultado do teste de Kolmogorov-Smirnoff.

Tabela 1 – Resultados das estimações de ordem dos modelos ARMA-GARCH e teste de Kolmogorov-Smirnoff (KS)

Variável	Ordens (p,q), (m,n)	AIC	KS (prob)
IBOV	$(1,0),(4,3)$	$-13809,40$	$0,81$
ALPA4	$(0,1),(1,3)$	$-11612,07$	$0,25$
CYRE3	$(2,0),(5,3)$	$-11071,58$	$0,61$
ENEV3	$(0,1),(4,0)$	$-9565,73$	$0,11$
EGIE3	$(1,0),(3,1)$	$-13900,03$	$0,25$
GGBR4	$(0,0),(1,1)$	$-10807,98$	$0,39$
MGLU3	$(0,0),(2,5)$	$-9276,84$	$0,77$
BEEF3	$(0,0),(4,5)$	$-11596,37$	$0,11$
TOTS3	$(0,1),(5,5)$	$-11912,37$	$0,33$
VALE3	$(0,0),(0,4)$	$-10973,99$	$0,81$
RENT3	$(1,1),(2,5)$	$-11418,11$	$0,54$
LREN3	$(1,1),(3,3)$	$-11892,52$	$0,72$
PETR3	$(0,1),(3,5)$	$-10367,38$	$0,22$
PETR4	$(1,3),(1,2)$	$-10401,02$	$0,28$
SULA11	$(0,1),(1,1)$	$-11570,31$	$0,51$
VIVT3	$(1,1),(1,3)$	$-13108,87$	$0,58$

Nota: elaboração própria.

Conforme os resultados do teste KS, há indícios de que as distribuições marginais seguem uma distribuição uniforme, sendo assim, podem ser utilizadas na estimação das cópulas. As famílias da cópula foram selecionadas a partir do critério de informação AIC (*Akaike Information Criteria*) e os ativos foram selecionados caso apresentassem maior dependência na cauda superior ou inferior. Na Carteira *Lower* estão os ativos com maior dependência na cauda inferior, onde constam os ativos ALPA4, CYRE3, ENEV3, EGIE3, GGBR4, MGLU3, BEEF3, TOTS3 e VALE3;já na Carteira *Upper* estão os ativos com maior dependência na cauda superior, sendo eles RENT3, LREN3, PETR3, PETR4, SULA11 e VIVT3. Na Tabela 2, estão dispostos os resultados da seleção de famílias, assim como os parâmetros estimados e valor da dependência nas caudas.

Tabela 2 – Resultados da estimação de cópulas bivariadas entre retornos dos ativos e retornos do IBOV

Cópula	Família	θ	δ	λ_U	λ_L	AIC
Carteira Lower						
ALPA4,IBOV	Survival BB1	$0,07$	$1,29$	0	$0,29$	$-451,8$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
CYRE3,IBOV	Survival BB1	$0,31$	$1,51$	$0,22$	$0,42$	$-1325,47$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
ENEV3,IBOV	BB1	$0,34$	$1,04$	$0,06$	$0,14$	$-260,24$
		$(0,04)$	$(0,02)$			
EGIE3,IBOV	Survival BB1	$0,27$	$1,35$	$0,14$	$0,33$	$-838,84$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
GGBR4,IBOV	Survival BB1	$0,24$	$1,46$	$0,14$	$0,39$	$-1084,17$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
MGLU3,IBOV	Survival BB1	$0,09$	$1,34$	0	$0,32$	-576
		$(0,04)$	$(0,03)$			
BEEF3,IBOV	Survival BB1	$0,05$	$1,19$	0	$0,21$	$-247,86$
		$(0,03)$	$(0,02)$			
TOTS3,IBOV	Survival BB1	$0,13$	$1,2$	$0,01$	$0,22$	$-340,09$
		$(0,04)$	$(0,02)$			
VALE3,IBOV	Survival BB1	$0,23$	$1,53$	$0,14$	$0,43$	$-1213,08$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
Carteira Upper						
RENT3,IBOV	BB1	$0,40$	$1,34$	$0,32$	$0,28$	$-1020,93$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
LREN3,IBOV	BB1	$0,40$	$1,44$	$0,38$	$0,30$	$-1279,71$
		$(0,04)$	$(0,03)$			
PETR3,IBOV	BB1	$0,53$	$1,68$	$0,49$	$0,46$	$-2100,83$
		$(0,05)$	$(0,04)$			
PETR4,IBOV	BB1	$0,52$	$1,70$	$0,50$	$0,46$	$-2148,09$
		$(0,05)$	$(0,04)$			
SULA11,IBOV	BB1	$0,32$	$1,16$	$0,18$	$0,15$	$-457,56$
		$(0,04)$	$(0,02)$			
VIVT3,IBOV	BB1	$0,25$	$1,15$	$0,17$	$0,09$	$-361,65$
		$(0,04)$	$(0,02)$			

Nota: elaboração própria. Erro-padrão entre parênteses.

Na Tabela 2, os resultados das estimações para as cópulas bivariadas estão dispostos. Para quase todos os ativos escolhidos (com exceção da ALPA4, MGLU3 e BEEF3), todos apresentam tanto dependência na cauda superior como na cauda inferior, porém a dependência é assimétrica. A maioria dos outros ativos do índice Ibovespa teve como cópula escolhida a t-Student, o que indica uma correlação linear e simétrica[7].

[7] Alguns ativos não foram incluídos por não terem dados para todo o período analisado.

Tabela 3 – Regressão do excesso de retorno das carteira *Lower*$(R_L - Rf)$ e *Upper*$(R_U - Rf)$

	Variáveis Dependentes	
	$R_L - Rf$	$R_U - Rf$
$Rm - Rf$	0.842^{***}	1.034^{***}
	(0.011)	(0.0159)
SMB	0.353^{***}	0.136^{***}
	(0.020)	(0.0359)
HML	-0.121^{***}	-0.118^{***}
	(0.023)	(0.0294)
WML	0.089^{***}	0.031
	(0.018)	(0.0358)
α	0.0003^{*}	0.0004^{**}
	(0.0002)	(0.0001)
Observações	2,524	2,524
R^2	0.714	0.782
R^2 Ajustado	0.714	0.781
Erro padrão dos Resíduos	0.008 (df = 2519)	0.009 (df = 2519)
Estatística F	$2{,}255.152^{***}$ (df = 4; 2519)	$3{,}814.718^{***}$ (df = 4; 2519)
Newey–West	-	10 Lags
Nota:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01 ;	Erro padrão entre parênteses.

Fonte: Elaborado pelos autores com base nos dados da pesquisa.

No próximo passo, será analisada a relação entre fatores de risco do mercado e excesso de retorno das carteiras montadas com base na dependência nas caudas. Os resultados das regressões são apresentados na Tabela 3. Usou-se erro padrão Robusto de Newey e West (1987) com 10 lags para a regressão de Excesso de retorno da carteira *Upper* $(R_U - Rf)$.

Para o excesso de retorno da Carteira *Lower*$(R_L - Rf)$, todas as variáveis explicativas são estatisticamente significantes e diferentes de zero; a constante, no entanto, não é estisticamente significante a 1% e 5%. O Excesso de Retorno da Carteira *Lower* é majoritariamente explicado pelos fatores de risco utilizados, apresentando um R^2_{Ajustado} de 71,4%. O Excesso de retorno da Carteira *Lower* é positivamente correlacionada com os fatores $Rm - Rf$, SMB e WML (respectivamente: o Excesso de retorno do mercado, o retorno de empresas *Small cap* em relação ao retorno de empresas *Big cap* e o retorno de empresas *Winners* com relação a empresas *Losers*) e negativamente relacionada ao fator HML (retorno de empresas de Valor[8] em relação a empresas de Crescimento[9].

Para o Excesso de retorno da Carteira *Upper*$(R_U - Rf)$, as variáveis de excesso de retorno do mercado $Rm - Rf$, SMB e HML são estatisticamente significantes a 10%, 5% e 1%. A constante é significante e positiva a 5% e 10%. O fator de risco WML não é estatisticamente significante, diferentemente do encontrado na carteira anteriormente analisada. O Excesso de retorno da carteira *Upper* é majoritariamente explicado

[8] Empresas com grande razão $\frac{\text{Valor Patrimonial}}{\text{Valor de Mercado}}$.
[9] Empresas com baixa razão $\frac{\text{Valor Patrimonial}}{\text{Valor de Mercado}}$.

pelos fatores de risco utilizados, apresentando um R^2_{Ajustado} de 78,1%.

A 5% o excesso de retorno da carteira *Upper* apresenta retornos não correlacionados aos fatores de risco do mercado (constante, α_{Jensen}, significativa). Desse modo, é possível, utilizando-se um procedimento baseado em Cópulas, se obter retornos não relacionados aos tradicionais fatores de risco de mercado, podendo ser um indício de uma Anomalia relacionada ao comportamento de *Cauda* dos ativos.

A carteira *Upper Minus Lower* (UML) é computada como a diferença entre os retornos das carteiras *Upper* e *Lower*. O resultado da regressão da Carteira UML contra os fatores de risco de mercado é apresentado na Tabela 4. Somente dois fatores de risco são significantes (respectivamente: $Rm - Rf$ e SMB). A regressão, no entanto, apresenta um R^2_{Ajustado} de somente 7%, muito do retorno não é explicado pelos fatores de risco tradicionalmente utilizados no mercado.

Tabela 4 – Regressão da diferença de retornos da Carteira *Upper* com relação à Carteira *Lower* (UML).

	Variável Dependente
	UML
$Rm - Rf$	0.192***
	(0.0366)
SMB	−0.217***
	(0.0424)
HML	0.003
	(0.0457)
WML	−0.059
	(0.0469)
α	0.0001
	(0.0002)
Observações	2,524
R^2	0.081
R^2 Ajustado	0.079
Erro padrão dos Resíduos	0.012 (df = 2519)
Estatística F	55.280*** (df = 4; 2519)
Newey–West	10 Lags
Nota:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01
Erro padrão entre parênteses.	

Fonte: Elaborado pelos autores com base nos dados da pesquisa.

Na Tabela 5 são apresentadas as correlações dos fatores de risco de mercado e do UML. O UML mostra-se pouco correlacionado aos demais fatores de risco, sendo sua maior correlação com o $Rm - Rf$.

Tabela 5 – Correlações dos fatores de risco do mercado e o UML

	$Rm - Rf$	SMB	HML	WML	UML
$Rm - Rf$	1.00	-0.00	0.27	-0.10	0.24
SMB	-0.00	1.00	0.30	-0.27	-0.14
HML	0.27	0.30	1.00	-0.31	0.03
WML	-0.10	-0.27	-0.31	1.00	-0.03
UML	0.24	-0.14	0.03	-0.03	1.00

Fonte: Elaborado pelos autores com base nos dados da pesquisa.

4 CONCLUSÃO

Usando-se cópulas montou-se duas carteiras diferentes com base na relação entre as caudas do Ibovespa e cada um dos ativos que perfazem o índice. Para a maioria dos ativos, temos uma relação simétrica e linear, podendo ser modelada por uma cópula t. Duas carteiras principais foram contruídas: uma com ativos com maior dependência na cauda superior (carteira *Upper*) e outra com ativos com maior dependência na cauda inferior (carteira *Lower*).

Ambas carteiras são sensíveis ao excesso de retorno de mercado ($Rm - Rf$), sendo a carteira *Upper* sendo a mais sensível a esse fator de risco. Ambas carteiras apresentam α_{Jensen} significativos e positivos, sendo o da Carteira *Upper* significativo a 10% e 5% e o da Carteira *Lower* significativo a 10 %. Desse modo, mostrou-se que utilizando-se o critério descrito no artigo é possível se obter retornos não associados aos fatores de risco comumente utilizados na literatura empírica. Mostrando, assim, indícios de uma *Anomalia* relaciona ao comportamento de *Cauda*. Além disso, as duas Carteiras criadas apresentam resultados superiores ao índice, em relação aos retornos acumulados e desepenho ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS

BANZ, R. W. The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981.

BHANDARI, L. C. Debt/equity ratio and expected common stock returns: Empirical evidence. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 43, n. 2, p. 507–528, 1988.

BUENO, R. Econometria de séries temporais. rev. e atualiz. *Ed. Cengage Learning*, 2012.

CARHART, M. M. On persistence in mutual fund performance. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997.

CHAN, L. K.; HAMAO, Y.; LAKONISHOK, J. Fundamentals and stock returns in japan. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 46, n. 5, p. 1739–1764, 1991.

CHIAH, M. et al. A better model? an empirical investigation of the fama–french five-factor model in australia. *International Review of Finance*, Wiley Online Library, v. 16, n. 4, p. 595–638, 2016.

CZADO, C. Analyzing dependent data with vine copulas. *Lecture Notes in Statistics, Springer*, Springer, v. 222, 2019.

DANIELSSON, J. *Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of Finance*, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross-section of expected stock returns. *the Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 51, n. 1, p. 55–84, 1996.

FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. *Pesquisa operacional para cursos de administração*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2012.

FEA-USP. *Risk Factors*. 2022. Disponível em: <https://nefin.com.br/data/risk_factors.html>.

FONSECA, M. A. R. da. *Álgebra linear aplicada: a finanças, economica e econometria*. [S.l.]: Manole, 2003.

HANSEN, B. E. Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, JSTOR, p. 705–730, 1994.

HU, G. X. et al. Fama–french in china: Size and value factors in chinese stock returns. *International Review of Finance*, Wiley Online Library, v. 19, n. 1, p. 3–44, 2019.

HUBERMAN, G.; KANDEL, S. Mean-variance spanning. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 42, n. 4, p. 873–888, 1987.

JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 1, p. 65–91, 1993.

JENSEN, M. C. The performance of mutual funds in the period 1945-1964. *The Journal of finance*, JSTOR, v. 23, n. 2, p. 389–416, 1968.

JOE, H.; XU, J. J. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. 1996.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. In: *Stochastic optimization models in finance*. [S.l.]: Elsevier, 1975. p. 131–155.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. In: *Portfolio selection*. [S.l.]: Yale university press, 1968.

NEWEY, W.; WEST, K. A simple positive definite, het-eroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, econo-metrica 55: 703-705. *MathSciNet MATH*, 1987.

NOVY-MARX, R. The other side of value: The gross profitability premium. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 108, n. 1, p. 1–28, 2013.

PIOTROSKI, J. D. Value investing: The use of historical financial statement information to separate winners from losers. *Journal of Accounting Research*, JSTOR, p. 1–41, 2000.

ROGERS, P.; SECURATO, J. R. Estudo comparativo no mercado brasileiro do capital asset pricing model (capm), modelo 3-fatores de fama e french e reward beta approach. *RAC-Eletrônica*, v. 3, n. 1, 2009.

ROSENBERG, B.; REID, K.; LANSTEIN, R. Persuasive evidence of market inefficiency. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 11, n. 3, p. 9–16, 1985.

ROSS, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976. ISSN 0022-0531. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053176900466>.

SANVICENTE, A. Z.; MINARDI, A. et al. Identificação de indicadores contábeis significativos para a previsão de concordata de empresas. *Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais, Working Paper*, n. 1968, p. 1–12, 1998.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.

TITMAN, S.; WEI, K. J.; XIE, F. Capital investments and stock returns. *Journal of financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 39, n. 4, p. 677–700, 2004.

VIDYAMURTHY, G. *Pairs Trading: quantitative methods and analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. v. 217.