

Decomposição estrutural do PIB do Paraná de 1947 a 2019: uma análise antes e depois de relaxar a hipótese de tendência linear

Structural Decomposition of Paraná's GDP from 1947 to 2019: an analysis before and after relaxing the linear trend hypothesis

Fabiano Prado Pedroso*, Luciana Schneider Parzianello†, Marcos Hasegawa‡

Resumo

Há diversos métodos de decomposições de séries temporais e a aplicação deles gera divergência na interpretação do comportamento cíclico. A interação tendência-ciclo não é de fácil separação dado que a estimação de forma determinística ou totalmente estocástica como prevê o método ARIMA, não é adequada. Uma boa estimação de tendência deve ser influenciada por movimentos do ciclo, mas também deve ser suavizada, logo são aplicados métodos de filtragem como filtro de Kalman e filtro HP, nos quais considera-se um relaxamento da hipótese de linearidade da tendência. Os pontos de inversão da série, acima (picos) e abaixo (vales) da tendência, determinam os ciclos de negócios. Esse estudo buscou medir as diferentes amplitudes das fases dos ciclos, comparar as decomposições por ARIMA, filtro de Kalman e filtro de HP, e também realizar a datação dos ciclos de negócios do estado do Paraná (Brasil), pela série anual do PIB de 1947 a 2019. Os resultados mostraram que as estimações ARIMA deixam menos flutuação para os ciclos que as estimações por filtragem. Os ciclos não se alteram, somente sua amplitude.

Palavras-chave: decomposição, séries temporais, filtro de Kalman

CLASSIFICAÇÃO JEL: Prices, Business Fluctuations, and Cycles - E39

Abstract

There are several time series decomposition methods and their application generates divergence in the interpretation of cyclic behavior. The trend-cycle interaction is not easy to separate since the estimation in a deterministic or totally stochastic way, as predicted by the ARIMA method, is not adequate. A good trend estimation must be influenced by cycle movements, but it must also be smoothed, so filtering methods such as the Kalman filter and HP filter are applied, in which a relaxation of the trend linearity hypothesis is considered. The inversion points of the series, above (peaks) and below (valleys) the trend, determine

*Graduado em Ciências Econômicas(UNESPAR,2011), Mestrado em Economia Regional(UEL,2016) e Doutorando em Desenvolvimento Econômico (UFPR,2021).Email:fabianopedroso@ufpr.br

†Graduada em Administração (UFPR, 2009), Mestranda em Desenvolvimento Econômico (UFPR,2021). Email: lucianaparzianello@ufpr.br

‡Professor do Departamento de Economia da UFPR e do Programa de Pós-graduação em Desenvolvimento Econômico (PPGDE). Email: hasegawa@ufpr.br

the business cycles. This study sought to measure the different amplitudes of the phases of the cycles, to compare the decompositions by ARIMA, Kalman filter and HP filter, and also to date the business cycles of the state of Paraná (Brazil), by the annual series of the GDP of 1947. to 2019. Results showed that ARIMA estimates leave less fluctuation for cycles than filtering estimates. The cycles do not change, only their amplitude.

Keywords: *decomposition, time series, Kalman filter*

1 Introdução

Há uma divisão no estudo sobre ciclos na economia. Alguns pesquisadores passaram a estudar suas causas e outros os viam como um fenômeno empírico passível de previsões. Definidos como flutuação da atividade econômica, os ciclos apresentam fases (expansão e recessão) e pontos de reversão (picos e vales), ou seja, o momento em que uma expansão torna-se recessão e vice-versa. A flutuação é estudada a partir da decomposição de uma série temporal em componentes como sazonalidade, tendência, ciclo e componente aleatória. O ciclo é uma componente repetitiva, mas de duração não constante, medida de pico a pico, ou vale a vale.

Como ciclo e tendência são interdependentes, podem ser vistos como uma única componente de longo prazo. A sazonalidade é repetitiva, regular de curto prazo (no máximo anual) e deve ser removida, já a componente irregular é independente e aleatória. Algumas abordagens corroboram esta ideia de decomposição. Para a NBER (*National Bureau of Economics Research*) cada série temporal mensal ou trimestral, é tratada como um produto ou soma de três componentes: sazonalidade, irregular e tendência-ciclo.

A tendência já foi considerada determinística e linear no passado, de forma que toda a flutuação pertencia aos ciclos. E também já foi considerada estocástica, estimada por método ARIMA, assumindo quase toda a flutuação. Mas a fim de distinguir as flutuações cíclicas em torno de uma tendência de crescimento, considerando a interdependência tendência-ciclo, é preciso relaxar a hipótese de linearidade da tendência sem assumí-la completamente estocástica, já que isso atrapalha a identificação dos ciclos. [Zarnowitz e Ozyildirim \(2006\)](#) compararam diferentes alternativas de estimação de tendência, entre estocástica, determinística, linear e não-linear.

A metodologia de estudo dos ciclos evoluiu, a partir da decomposição clássica, para modelos ARIMA e modelos estruturais com técnicas de filtragem. Algumas ferramentas de filtragem são filtro Hodrick-Prescott (HP), *phase-average-trend* (PAT), filtro *band-pass*, algoritmo BBQ e filtro de Kalman. O uso de filtro de Kalman para séries temporais participa da discussão teórica relacionada ao comportamento da tendência, ligado à interpretação desta como não linear. [Bézenac et al. \(2020\)](#) utilizam modelos de espaço de estados, por filtro de Kalman, para normalizar fluxos. Neste estudo, assume-se como hipótese que os modelos do tipo ARIMA não captam satisfatoriamente o comportamento estocástico da tendência da forma como o filtro de Kalman o faz.

O objetivo deste trabalho é analisar as diferentes absorções da amplitude das fases pelas tendências nos ciclos observados no PIB do estado do Paraná. Considera-se a distância vertical entre um ponto de máximo ou mínimo local e a tendência estimada, como a amplitude de uma fase cíclica. Busca-se comparar as amplitudes das fases de uma série estimada por ARIMA com a amplitude das fases de uma série filtrada e estimada por Kalman. Um Índice de Fase (IF) representa a razão destas amplitudes. Desse modo é possível

analisar a absorção da amplitude das fases pelas tendências observada nos ciclos do PIB do estado do Paraná. Também será aplicado o filtro de HP como terceira opção de análise, dada sua alta presença na literatura, em trabalhos como [Zarnowitz e Ozyildirim \(2006\)](#), [Nilsson e Gyomai \(2011\)](#) e [Leite, Lopes e Macedo \(2019\)](#).

A série temporal adotada é o PIB do estado do Paraná a preços constantes no período de 1947 a 2019 com frequência anual. A tendência da série é extraída pela forma clássica, por ARIMA, e também por filtragem por Kalman e HP, e são calculados os IF que permitem a comparação entre os métodos. Os pontos de análise são os momentos dos ciclos. E ainda, aproveitando a identificação dos pontos de reversão pela metodologia, é realizada a datação dos ciclos do Paraná, ausente na literatura atual.

Um comportamento de baixa volatilidade para a atividade econômica é preferível. A amplitude das fases representa o comportamento da flutuação de variáveis econômicas, e por isso é interessante observar o quanto as técnicas de estimação da tendência podem absorver ou alimentar a amplitude. No caso, observavam-se diferenças significativas de picos a vales entre as estimações. Tal divergência, no entanto, não chega a alterar a datação dos ciclos, embora vá ao encontro de que a tendência estimada por modelos ARIMA deixa menos flutuação para os ciclos.

Este estudo divide-se em seis seções, sendo a primeira esta introdução, seguida pela seção 2 que contém uma explanação sobre ciclos de negócios. A seção 3 discorre sobre as técnicas de decomposição e filtragem de séries temporais. A seção 4 apresenta a série temporal do PIB anual do estado do Paraná. A seção 5 e seus itens descrevem a metodologia utilizada, especificada para modelos ARIMA, filtro de Kalman e filtro HP, além do método de datação de ciclos de negócios. A seção 6 mostra e discute os resultados e a última seção contém as considerações finais.

2 Ciclos de Negócios

No século XIX, acreditava-se que ciclos possuíam uma duração fixa, e que economias capitalistas se moviam de acordo com um padrão estruturado, que gerava movimentos regulares do produto agregado, enquanto a noção de crise se baseava principalmente na hipótese de ruptura, de quebra de padrões. Por fim, abandonou-se a ideia de duração constante, após muitos resultados empíricos que geraram dúvida, e a definição de ciclo tornou-se a de repetição de movimentos ([CARVALHO; HERMANNY, 2003](#)).

Um ciclo é contínuo e possui duas fases, expansão e recessão, separadas por dois pontos críticos: o pico e o vale. A expansão compreende o ponto do vale (mínimo local) até o pico (máximo local), quando a expansão muda para a fase de recessão, e esta dura até um novo ponto de inflexão mínimo. A duração do ciclo é o número de períodos entre um pico e outro, ou um vale e outro, e varia de acordo com a medição de tempo, como ano, trimestre ou mês. A amplitude é a diferença entre o vale e o pico ([FERRAZ, 2020](#)). A amplitude diz respeito ao seu grau de profundidade e à capacidade dele reverter. Para ser considerada um ciclo, a atividade econômica deve apresentar um declínio significativo, seguido por uma retomada ([KASZNAR, 1996](#)).

A abordagem de ciclos de negócios procura por mínimos e máximos locais na atividade produtiva. Ciclos de negócios são a flutuação da atividade econômica agregada e consiste de expansões que ocorrem ao mesmo tempo em muitas atividades econômicas, seguidas similarmente de recessões gerais, contrações e voltas que se condensam na fase de expansão do ciclo seguinte; esta seqüência de mudanças é recorrente

e repetitiva, mas não é periódica (KASZNAR, 1996). De acordo com Burns e Mitchell (1946), a duração de ciclos de negócios varia entre mais de um ano até dez ou doze anos, porém normalmente os ciclos são maiores que dois anos e menores que oito (ZARNOWITZ, 2001).

Na ausência de recessões, sequências de desacelerações de crescimento e acelerações chamaram atenção das economias desenvolvidas (ZARNOWITZ, 2001).

Em diversos países, especialmente Estados Unidos, é realizado o estudo e datação dos ciclos de negócios, por instituições como NBER e OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), e ainda o CODACE (Comitê de Datação de Ciclos Econômicos) no Brasil. Para obter a datação das expansões e recessões dos ciclos de negócios (os picos e vales da atividade), a série é submetida à versão do algoritmo de BryBoschan, conhecida como BBQ (*Bry Boschan Quartely*), proposta por Harding e Pagan (2002).

Quando as técnicas de desvio à tendência são aplicadas aos indicadores, geralmente eles apresentam resultados satisfatórios quanto ao tempo e conformidade dos ciclos de crescimento agregados (ZARNOWITZ; OZYILDIRIM, 2006). Inúmeros testes confirmam que a maioria das desacelerações cíclica são antecipadas por indicadores antecedentes pelo mundo (KLEIN; MOORE, 1985).

Diversos estudos e aplicações da teoria de ciclos de negócios e dos métodos citados foram realizados nas últimas décadas. Kim (1994) usa o procedimento BryBoschan em quatro séries de PIB da Nova Zelândia, para datar ciclos de negócios, comparando os pontos de inflexão resultantes, após aplicar os métodos de desvios à tendência. Zarnowitz e Ozyildirim (2006) estimam ciclos de negócios e crescimento dos Estados Unidos no período de 1948 a 2000, a fim de comparar os métodos de desvio à tendência (PAT, HP, *band-pass*). Ferraz (2020) aplica o índice de concordância de Harding e Pagan (2006) para analisar a correlação dos ciclos de negócios do Brasil em relação a países da América do Sul, BRICS e OCDE, no período de 1996 a 2016.

Leite, Lopes e Macedo (2019) realizam a datação de ciclos de negócios do Brasil no período de 1947 a 2016, utilizando PIB trimestral e comparando as fases com as estimadas pelo CODACE (no período a partir de 1980). Evangelista (2009) realiza a datação de ciclos de negócios para os principais estados brasileiros das regiões Sul, Sudeste e Nordeste, através do algoritmo BBQ e analisa a ocorrência de sincronia entre eles. Gomes e Magalhães (2015) constroem a cronologia de ciclos de negócios do estado de Espírito Santo, para o período de 1991 a 2012, e comparam sua volatilidade ao contexto nacional.

3 Técnicas de Decomposição e Filtragem

Uma série não estacionária, como Produto Interno Bruto (PIB), possui componentes permanentes (tendência) e transitórios (ciclos), e de curto e longo prazo (NETO et al., 2016). A decomposição clássica de séries temporais surgiu na década de 1920, e consiste em um modelo univariado que descreve a série como uma soma (ou multiplicação) de seus componentes não-observáveis, sazonalidade (S), tendência (T), ciclo (C) e componente irregular (I). De acordo com Morettin e Toloi (2018) aplica-se o método aditivo, quando as componentes da série temporal são mutuamente independentes, e se existe dependência, aplica-se o método multiplicativo

A sazonalidade é um padrão de oscilação de período definido, geralmente fruto dos ciclos da natureza e ano-calendário; a tendência é direção geral que se desenvolve em um longo intervalo de tempo, geralmente consequência do aumento da população e/ou da evolução tecnológica e científica; o ciclo é um padrão de oscilação de longo prazo, com períodos de duração irregular ou desvios, ou flutuações em torno da reta de tendência; e a componente residual ou irregular trata-se de flutuações de curto período e comportamento inexplicável (MAKRIDAKIS; WHEELWRIGHT, 1982); (SOUZA, 1989);(BOUZADA, 2012).

O componente irregular (I) representa movimentos aleatórios, geralmente estáveis e pequenos, mas pode apresentar valores extremos (*outliers*) por diversas causas como enchentes, greves, e eventos climáticos bruscos. É considerado ruído branco, ou seja, aleatório, com média zero e variância constante (ZARNOWITZ; OZYILDIRIM, 2006). Em geral, uma série temporal de dados econômicos é não-estacionária. Subtraindo S_t e TC_t de y_t , têm-se I_t . É considerado normalmente identicamente distribuído e não correlacionado, o que implica independência (i.i.d). (DAGUM; BIANCONCINI, 2016)

Primeiramente é necessário identificar, estimar e remover a sazonalidade de uma série temporal. A técnica mais antiga para isso é a de médias móveis (MA), que estima o componente tendência-ciclo através da média de k períodos de t . Média móvel é um filtro linear. A sazonalidade se repete a cada m períodos, e varia para cada série temporal, como por exemplo, para uma sazonalidade anual, m será igual a 4 numa série trimestral, ou 12 numa série mensal. Uma série anual não possui sazonalidade.

Pelo método aditivo, após aplicar média móvel para encontrar componente TC , subtrai-se TC da série ($Y - TC$), e calcula-se a média para cada período de toda a série (por exemplo, média do primeiro trimestre de todos os anos). Em seguida, reconstitui-se a série com a repetição das médias de cada período. Este será o componente sazonal. Por último, subtrai-se TC e S de y , para encontrar o componente irregular I . Para o método multiplicativo, ao invés de somas e subtrações, usar multiplicação e divisão. A decomposição clássica pode ser utilizada para fazer previsões da série temporal ou apenas para melhor identificar o comportamento de seus componentes sazonais, cíclicos, de tendência e de resíduos (SOUZA; SAMOHYL; MEURER, 2004).

A tendência representa as variações suavizadas de longo prazo. Está associada a fenômenos estruturais como crescimento da população, progresso tecnológico e acumulação de capital. Para a maioria das séries temporais econômicas, a tendência se desenvolve gradualmente, de forma determinística ou estocástica. Quando ocorre uma quebra estrutural, há uma mudança de nível ou inclinação na tendência (DAGUM; BIANCONCINI, 2016).

Porém, tendência e ciclo interagem entre si e não podem ser separados tão claramente, então pode-se considerar ambos um único componente tendência-ciclo. Na abordagem tradicional do NBER, cada série temporal mensal ou trimestral é tratada como um produto, ou soma, de três componentes: sazonalidade (S), irregular (I) e tendência-ciclo (TC). Após a eliminação da sazonalidade (S), técnicas de suavização reduzem o efeito irregular (I), para identificar pontos de inversão no componente tendência-ciclo (ZARNOWITZ; OZYILDIRIM, 2006).

Mesmo unificando tendência-ciclo, a decomposição clássica apresenta diversas desvantagens e não é mais recomendada, visto que existem métodos mais sofisticados atualmente. As desvantagens da decomposição clássica são: a) perda dos dados das observações iniciais e finais da série com a média móvel, e logo não compõe o TC ; b) o componente TC é suavizado em excesso, mesmo para observações de maior variância; c) este método assume que o componente sazonal é sempre constante ao longo do tempo e; d) não é robusto

para valores não usuais, ou outliers, apresentando seus desvios. Há métodos mais recentes e sofisticados como método X11, SEALTS e STL, que reduzem as desvantagens da decomposição clássica (HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2018)).

A tendência linear determinística não persiste por séries longas e suas quebras estruturais, e não diferencia momentos de prosperidade daqueles de crise, deixando a maior parte da variação da série para os ciclos de negócios. Já a tendência linear estocástica, assume que os choques têm efeitos permanentes, segundo Nelson e Plosser (1982), logo, a tendência estocástica é simplesmente exponencial com um termo de erro aleatório. Mas possui muita flutuação, deixando pouco para os ciclos (ZARNOWITZ; OZYILDIRIM, 2006).

Segundo Morettin e Toloi (2018), os modelos do tipo ARIMA (Auto Regressivos de Média Móvel Integrada) são utilizados, principalmente, quando há evidências de série não estacionária. Modelos ARIMA são aplicados para estacionar a série, substituindo a ideia de que a série é estacionária em torno de sua tendência. Mas os modelos ARIMA deixam uma lacuna nas estimativas, porque não são eficientemente sensitivos aos choques repentinos em uma série temporal (BÉZENAC et al., 2020) (ZARNOWITZ; OZYILDIRIM, 2006) (NELSON; PLOSSER, 1982).

Tendências devem ser variáveis, devido às interações com flutuações de curto prazo e quebras estruturais, o que torna a tendência não linear, mas não necessariamente estocástica. Para Zarnowitz e Ozyildirim (2006), uma boa estimação de tendência deve ser influenciada por movimentos do ciclo, mas também deve ser suavizada, mostrando poucos desvios de inclinação, com pequenas inovações. Por isso, será considerado no escopo deste estudo, a quebra da hipótese de tendência linear.

De acordo com Dagum e Bianconcini (2016), o modelo estrutural de séries temporais trata-se de um conjunto de processos estocásticos lineares que descrevem a dinâmica de cada componente da série e, a princípio, para cada componente assume-se um modelo ARIMA ou um modelo estocástico. Um modelo estrutural de séries temporais para observações mensais ou trimestrais é dada pela soma das quatro componentes. Todas as componentes são estocásticas, com erros não correlacionados entre si. Para descrever a dinâmica das componentes, o modelo estrutural se utiliza de modelos de espaço de estados (MEE).

A MEE, advinda da Engenharia, é utilizada na análise de séries temporais desde a década de 1970, por autores como Akaike (1974), Harrison e Stevens (1987), Aoki (1987), Harvey (1989), West e Harrison (1997), e Durbin e Koopman (2001), especialmente após a contribuição de Kalman em 1960. Kalman trouxe o método de “transição de estados” para análise de sistemas dinâmicos e criou o filtro de Kalman, um algoritmo, ou conjunto de equações recursivas, que estima as variáveis não observáveis, obedecendo a uma estrutura dinâmica (BATURIN, 2016).

A representação de um modelo em espaço de estados pretende evidenciar uma dependência funcional, dinâmica e estocástica entre componentes de um sistema. As componentes da série são não observadas e estão relacionadas com a série temporal observada, por meio de uma equação de observação, e esta equação depende de uma equação de estado, sendo que o estado do sistema representa estas componentes não observáveis (tendência, ciclo, sazonalidade, aleatório) (DAGUM; BIANCONCINI, 2016).

Conforme exposto em Morettin e Toloi (2018), considere a série temporal Y_t , um vetor de observação, de dimensão q , e X_t um vetor, não observado, de estados, de dimensão p , que inclui T_t , C_t e S_t , enquanto I_t

é um ruído branco com média 0 e variância constante σ^2 . A equação de observação é definida pela (Eq. 1), que determina o sistema no tempo e a equação de estados, é definida por (Eq. 2). Como X_t é não observado, sua análise tem que ser baseada nas observações Y_t , que é considerado o output ou saída do sistema.

$$Y_t = A_t X_t + v_t \quad (1)$$

$$X_t = G_t X_{t-1} + w_t \quad (2)$$

A_t é a matriz do sistema, com coeficientes fixos, de ordem $(q \times p)$, v_t é o vetor ruído da observação, de ordem $(q \times 1)$, não correlacionado, com média zero e matriz de covariância R , G_t é a matriz de transição, de ordem $(p \times p)$, que representa a evolução dinâmica do vetor de estados, e w_t é um vetor de ruídos não correlacionados, representando a perturbação do sistema, de ordem $(p \times 1)$, com média zero e matriz de covariâncias Q . O estado inicial X_0 tem média μ_0 e matriz de covariâncias Σ_0 , e os vetores de ruídos v_t e w_t são não correlacionados entre si e não correlacionados com o estado inicial. As matrizes A_t e G_t são pré-determinadas e podem ou não variar com o tempo. Além disso, segundo [Baturin \(2016\)](#), a estimação dos parâmetros nessas matrizes, é gerada pelo método de máxima verossimilhança em que a probabilidade é avaliada pelo filtro de Kalman.

Nos MEE, as componentes não observadas são atualizadas de forma recursiva à medida que novas observações são analisadas, aprimorando as previsões ao refletirem a natureza dinâmica do processo em estudo ([BATURIN, 2016](#)). Além da modelagem e previsão, os MEE permitem combinação de metodologias de detecção de pontos de mudança de variáveis não-observáveis, como por exemplo, o ciclo, que são previstas através do filtro de Kalman, no âmbito dos modelos em espaço de estados. Isto permite realizar a datação de ciclos de negócios, por exemplo. O modelo pode ser aplicado na forma de estado de espaço e o filtro de Kalman pode ser usado para estimar uma tendência não observada e suas componentes de inclinação.

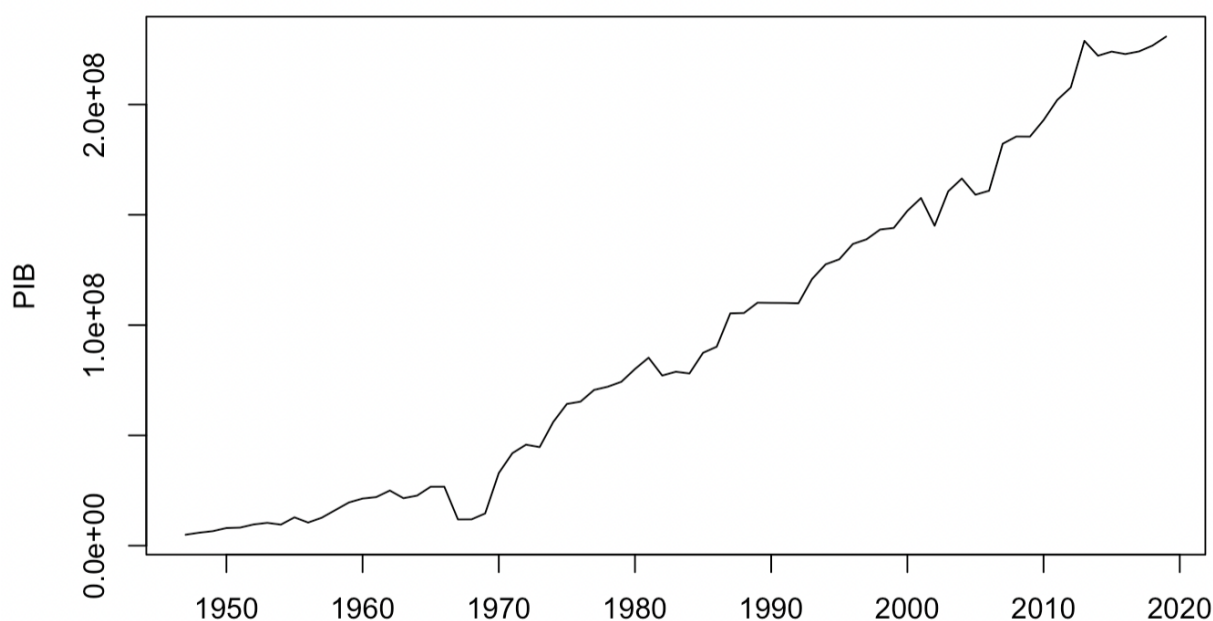
4 Dados

A série de dados anual (ts) do PIB do estado do Paraná a preços constantes (y_t) de 1990, no período de 1947 a 2019 (t) tem como fonte o IPEADATA ([IBGE, 2021](#)). No entanto, esta série apresenta lacunas no período de 1970 a 1985, no qual só contém as observações dos respectivos quinquênios (1970, 1975, 1980 e 1985).

As lacunas foram preenchidas com dados da série do PIB do Paraná a preços correntes de edição especial do [IPARDES \(1988\)](#), na qual, originalmente os dados do período de 1970 a 1985 são apresentados em cruzados, e passaram por tratamento ¹ para adequação a preços constantes na moeda atual. A metodologia do IPARDES, diferindo da metodologia do IBGE, apresentou fator erro de apenas 0,34. A série completa é apresentada no Painel 1.

¹ Agradecimento a Ricardo Kureski, pelo auxílio e gentileza no tratamento dos dados do IPARDES.

Figura 1 – PIB do Paraná a Preços Constantes (1947 a 2019)



Fonte: Elaborada pelos autores

5 Metodologia

A série temporal do PIB do Paraná adaptada conforme seção anterior é estimada pelo método ARIMA, filtro de Kalman e filtro HP. Conforme [Morettin e Toloï \(2018\)](#), um modelo da classe ARIMA (p, d, q) , onde p é a ordem autoregressiva, q é a ordem de média móvel, d é a ordem do operador diferença $(1 - B)$, e $a_{T_t} \sim N(0, \sigma_T^2)$, pode ser escrito como:

$$\phi_p(B)(1 - B)^d T_t = \theta_q(B) a_{T_t} \quad (3)$$

Onde T_t é a tendência, $\phi_p B$ é o polinômio autoregressivo em B de ordem p , θ é o polinômio de média móvel em B de ordem q , e a_{T_t} é o ruído branco.

O Filtro de Kalman é um modelo de espaço de estado que se ajusta mais rapidamente para choques suaves a um curto período de tempo ao longo da série temporal ([HAMILTON, 2020](#)). O filtro de Kalman é um conjunto de equações recursivas que permite obter estimativas de variáveis não observáveis, mas que obedecem a uma estrutura dinâmica formulada sob a forma de um modelo de espaço de estados. É de fácil interpretação computacional e as estimativas obtidas são eficientes, ou seja, com menor erro quadrático médio. O filtro de Kalman é aplicável aos processos aleatórios estacionários e não estacionários ([BATURIN, 2016](#)).

A aplicação do filtro de Kalman inicia-se com valores iniciais para a estimativa (média) de estado X_1^0 dada por (Eq. 4), e para a incerteza desta estimativa (covariância) denominada P_1^0 , dada por (Eq. 5). Os dois primeiros momentos são suficientes para descrever todos os estados em qualquer instante de t .

$$X_t^t = E[X_t|Y_t] \quad (4)$$

$$P_{t_1, t_2}^t = E[(X_{t_1} - X_{t_1}^t)(X_{t_2} - X_{t_2}^t)|Y_t] \quad (5)$$

O filtro é composto por cinco equações: equações de previsão (Eq. 6) e (Eq. 7), equação de filtragem ou atualização de estado (Eq. 8), a equação de correção ou atualização da covariância (Eq. 9) e o ganho de Kalman, dado por K_t é a equação (Eq. 10).

$$X_t^{t-1} = GX_{t-1}^{t-1} \quad (6)$$

$$P_t^{t-1} = GP_{t-1}^{t-1}G' + Q \quad (7)$$

$$X_t^t = X_t^{t-1} + K_t(Y_t - A_tX_t^{t-1}) \quad (8)$$

$$P_t^t = [I - K_tA_t]P_t^{t-1} \quad (9)$$

$$K_t = P_t^{t-1}A_t'[A_tP_t^{t-1}A_t' + R]^{-1} \quad (10)$$

Onde Q é um ruído branco, R é uma matriz de covariância de erro de medida e I uma matriz identidade. O ganho de Kalman K_t é o peso que se dá à medição e $(1 - K_t)$ é o peso dado à estimativa. Quando a incerteza de medição R é muito grande e a incerteza da estimativa P_t é pequena, K_t é próximo de zero. Quando a incerteza da medição R é pequena e a incerteza da estimativa P_t é grande, K_t será próximo a 1. Se ambas as incerteza forem iguais, K_t será 0,5. A cada iteração, o peso de medição e a incerteza da estimativa são menores (BECKER, 2021).

Podemos assumir que os parâmetros $\Theta = (X_0^0, P_0^0, Q, R, A, G)$ são estimados por função de verossimilhança utilizando as inovações, gerada no filtro de Kalman, que são vetores aleatórios com distribuições normais independentes, definidas por:

$$\varepsilon_t = Y_t - A_tX_t^{t-1} \quad (11)$$

$$\Sigma_t = A_tP_t^{t-1}A_t' + R \quad (12)$$

Onde $A_tX_t^{t-1} = E[Y_t|Y_{t-1}]$. A log-verossimilhança das inovações, não-linear em Θ é:

$$\ln L(\Theta|Y) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \ln|\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t' \Sigma_t^{-1} \varepsilon_t \quad (13)$$

O filtro de HP (Hodrick–Prescott) é um processo de filtragem da série temporal e HY_t é o processo de filtragem de HP para série estimada. Seguindo Bueno (2012), considere uma série como a soma das componentes taxa de crescimento e ciclo $y_t = g_t + c_t$. Logo:

$$\sum_t^T c_t^2 + \lambda \sum_t^T [(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2 \quad (14)$$

Um das principais questões metodológicas para a utilização do filtro de HP é o teste para encontrar o λ :

$$d = \sum_t^T \frac{(P_t - h_t)^2}{T} \quad (15)$$

5.1 Estimando a tendência

A tendência que resulta do processo ARIMA é dada por AT_t , a tendência fornecida por filtro de Kalman é dada por KT_t e por filtro HP é HT_t , conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Origem de dados e estimações

Fonte	Série observada	ARIMA(p,d,q)	HP Filter	Kalman Filter
Série	y_t	AY_t (estimada)	Hy_t (recompose)	Ky_t (recompose)
Tendência	T_t (teórica)	AT_t (decompose)	HT_t (filtro)	KT_t (filtro)
Sazonalidade	S_t (teórica)	AS_t (decompose)	Não	Não
Ciclo	C_t (teórica)	AC_t (decompose)	HC_t (filtro)	KC_t (filtro)
Aleatória	I_t (teórica)	AI_t (decompose)	HI_t (filtro)	KI_t (filtro)

Fonte: Elaborado pelos autores (a)

Considera-se AY_t a estimativa da série do PIB paranaense pelo modelo ARIMA(p,d,q). Logo, de acordo com os métodos de estimação e previsão das séries seguidos por [Hyndman e Khandakar \(2008\)](#), uma série pode ser decomposta, por simplicidade, em (AT) tendência, (AS) sazonalidade, (AC) ciclos e ($A\epsilon$) ruído branco, todos estimados a partir de um modelo ARIMA, decompondo a série temporal.

$$[Ats]AY_t = AT_t + AS_t + AC_t + A\epsilon_t \quad (16)$$

Adota-se como AY_t uma série temporal estacionária e estimada pelo processo em (Eq. 16), atribuída como (ts1) e y_t a série temporal do PIB, denominada (ts). Seguindo [Bézenac et al. \(2020\)](#), para aplicar filtros de Kalman para análise multivariada de (ts) e (ts1), entende-se que os filtros de Kalman e HP que são estimadores dos desvios da tendência linear local ainda não observados.

Considerando a quebra da hipótese de tendência linear, adota-se $y_t \in R^n$ e a (kts) e (kts1), ambas multivariadas no tempo t , onde $y_{t,i} \in R$ é o valor do correspondente i -ésima (ts) e (ts1) univariada. Também considerando $X_{t,i} \in R$ os k vetores crescentes unitariamente no tempo associado a cada série temporal univariada no tempo t e, por fim $y_{1:T}$ uma sequência y_1, \dots, y_T , o modelo para decomposição de (ts) e (ts1) para Ky_t é:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \\
 I_t &= F_t(I_{t-1}) + \epsilon, \quad \sim N(0, \Sigma_t) \\
 Ky_t &= F_t^T(A^t I_t) + \varepsilon \quad \sim N(0, \Gamma_t) \\
 I_1 &= \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \\
 I_t &= F_t(I_{t-1}) + \epsilon, \quad \sim N(0, \Sigma_t) \\
 KAY_t &= F_t^T(A^t I_t) + \varepsilon \quad \sim N(0, \Gamma_t)
 \end{aligned} \quad (17)$$

Respectivamente, as deduções em (17) representam (ts) e (ts1), isso porque, repete-se para KAY_t o processo de filtragem de Kalman sobre as estimações em (Eq. 16), onde se prevê a linearidade da tendência.

O mesmo propósito de comparação é feito utilizando o filtro de HP (Hodrick–Prescott), seja Hy_t o processo de filtragem de (ts) e HAY_t o mesmo processo de filtragem para (ts1) em Eq. 16 e ainda, seguindo Bueno (2012) considere uma (ts) e (ts1) como a soma das componentes taxa de crescimento e ciclo $y_t = g_t + c_t$. Logo:

$$\sum_t^T c_t^2 + \lambda \sum_t^T [(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2 \quad (18)$$

Um das principais questões metodológicas para a utilização do filtro de HP é o teste para encontrar o λ :

$$d = \sum_t^T \frac{(p_t - h_t)^2}{T} \quad (19)$$

Em 19, p_t representa a série de PAT (*phase average trend*), a tendência da média de fase e, h_t é a tendência HT_t pelo filtro HP. Utiliza-se a Eq. 19 para estimar o λ .

Seja ia a amplitude da fase dada pela razão $\frac{y_t}{KT_t}$ para (ts) e pela razão $\frac{AY_t}{AT_t}$ no caso de (ts1). Se $ia > 1$, é um pico ou se $ia < 1$, um vale. O nível da amplitude de cada fase pode ser obtida por $(ia - 1)$ como pico e $(1 - ia)$ como vale. Seja IF o índice de fase medido pela razão $\frac{ia_{ts}}{ia_{ts1}}$ que representa a proporção entre as amplitudes. Se $IF > 1$ demonstra-se que o ARIMA deixar sobrar mais desvios para os ciclos e, se $IF < 1$ entende-se que o ARIMA suaviza mais, retirando desvios dos ciclos. O mesmo vale para o filtro HP como medida de comparação.

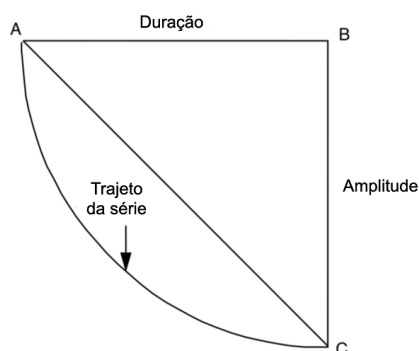
5.2 Datação de Ciclos

Conforme Harding e Pagan (2002), não há necessidade de remover a tendência de uma série temporal para analisar os ciclos de negócios. É possível localizar os pontos de reversão visualmente por gráfico, no entanto Bry e Boschan (1971), financiados pela NBER, criaram o algoritmo BB com frequência mensal, que ganhou uma versão trimestral, chamada algoritmo BBQ, com Harding e Pagan (2002).

Estes algoritmos consideram as seguintes regras: a) determinar os pontos de reversão potenciais (picos e vales); b) assegurar alternância dos pontos de reversão e; c) satisfazer critérios pré-determinados de duração e amplitude das fases e de ciclos. Os critérios foram estipulados para BB em no mínimo 6 meses de duração de fases e 15 meses de duração de ciclos. E para BBQ, não há uma especificação, e sim o conceito de que uma fase é um triângulo de aproximação, conforme Figura 2, no qual a altura é sua amplitude da fase e a base sua duração. Este triângulo é útil para gerar ciclos realistas (HARDING; PAGAN, 2002).

Para realizar a datação dos ciclos do PIB do estado do Paraná, foram selecionados os picos e vales, em alternância, de forma que cada um fosse o ponto de maior amplitude em relação à linha de tendência estimada por filtro de Kalman. Considerando que a série é anual, foi adotado o triângulo de aproximação para definição da duração das fases, e dos ciclos (fase de expansão seguida da fase de recessão).

Figura 2 – Fase de Recessão

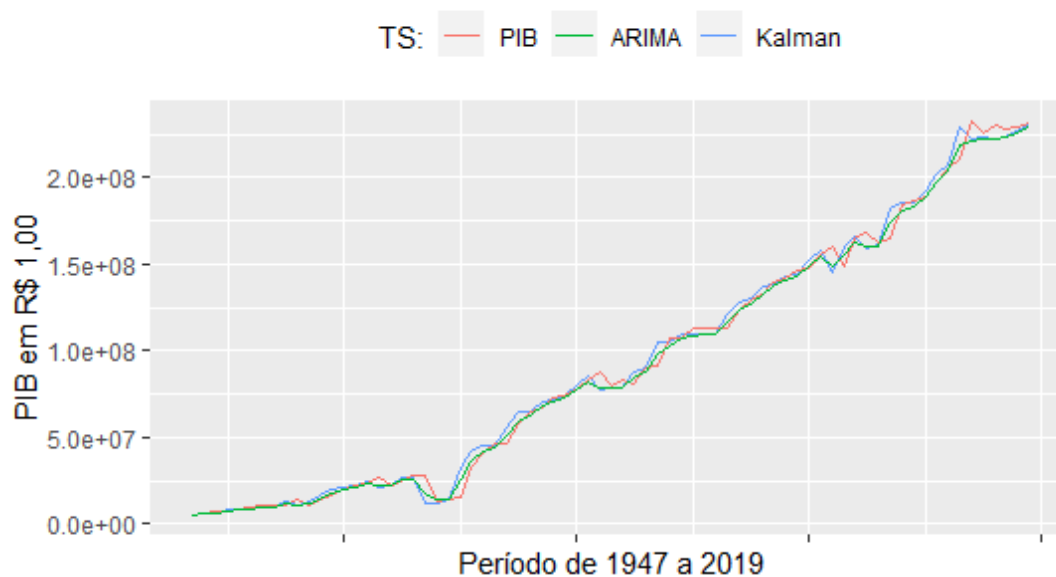


Fonte: Adaptado de Harding e Pagan (2002)

6 Estimações, Decomposições e Análise das Amplitudes

Parte da análise pela comparação entre as estimativas dos modelos escolhidos, e posteriormente busca-se entender o impacto de cada método de decomposição. Para Bueno (2012), quando trata-se das séries econômicas é esperado que normalmente têm o componente autorregressivo de pelo menos de ordem 2, mostrando que a tendência ao longo do período representa o crescimento contínuo e os ciclos captam os impactos dos negócios em determinados períodos, que posteriormente são absorvido pelo crescimento contínuo. Observa-se em (Figura 3) os comportamentos respectivamente: PIB e as estimações por ARIMA e KALMAN.

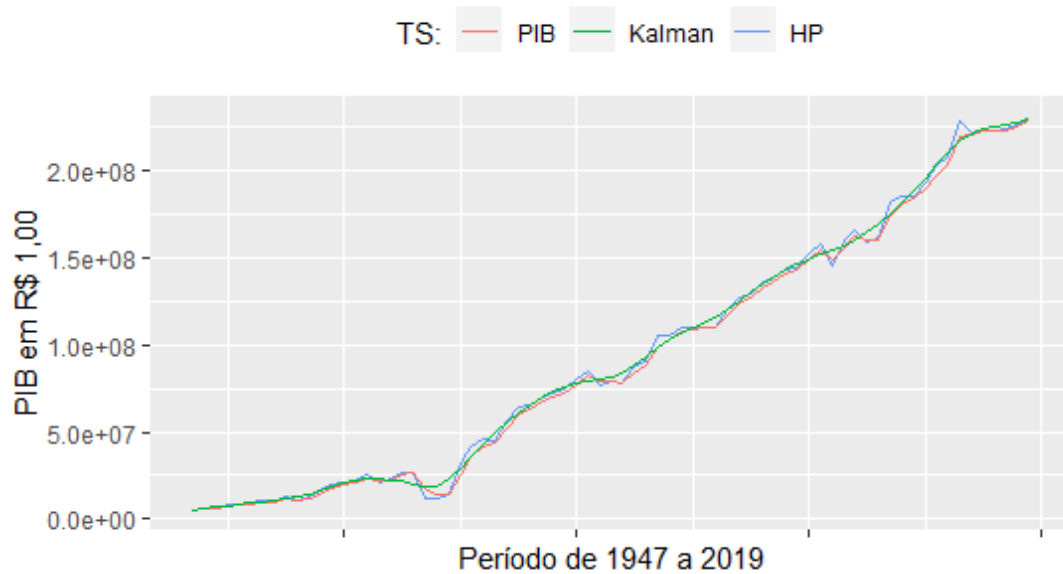
Figura 3 – PIB do Paraná a Preço Constante, ARIMA e Kalman (1947 a 2019)



Fonte: Elaborada pelos autores(a)

O foco deste estudo é compreender se as divergências entre as estimações são oriundas das componentes, com foco principal na tendência, visto que segundo [Makridakis e Wheelwright \(1982\)](#) dependendo da forma como estima-se a tendência, pequenas variações sobram para os ciclos. Em ([Figura 4](#)) notam-se comportamentos diferentes nos picos e vales ao longo das séries, comparando o PIB e Kalman com a predição (recomposition) de HP.

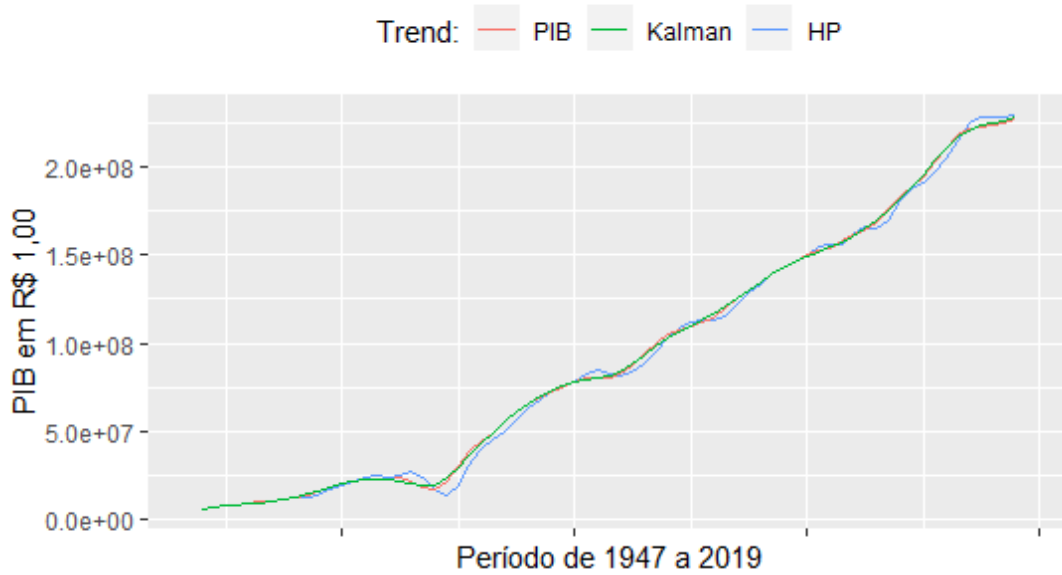
Figura 4 – PIB do Paraná a Preço Constante, Kalman vs HP (1947 a 2019)



Fonte: Elaborada pelos autores(a)

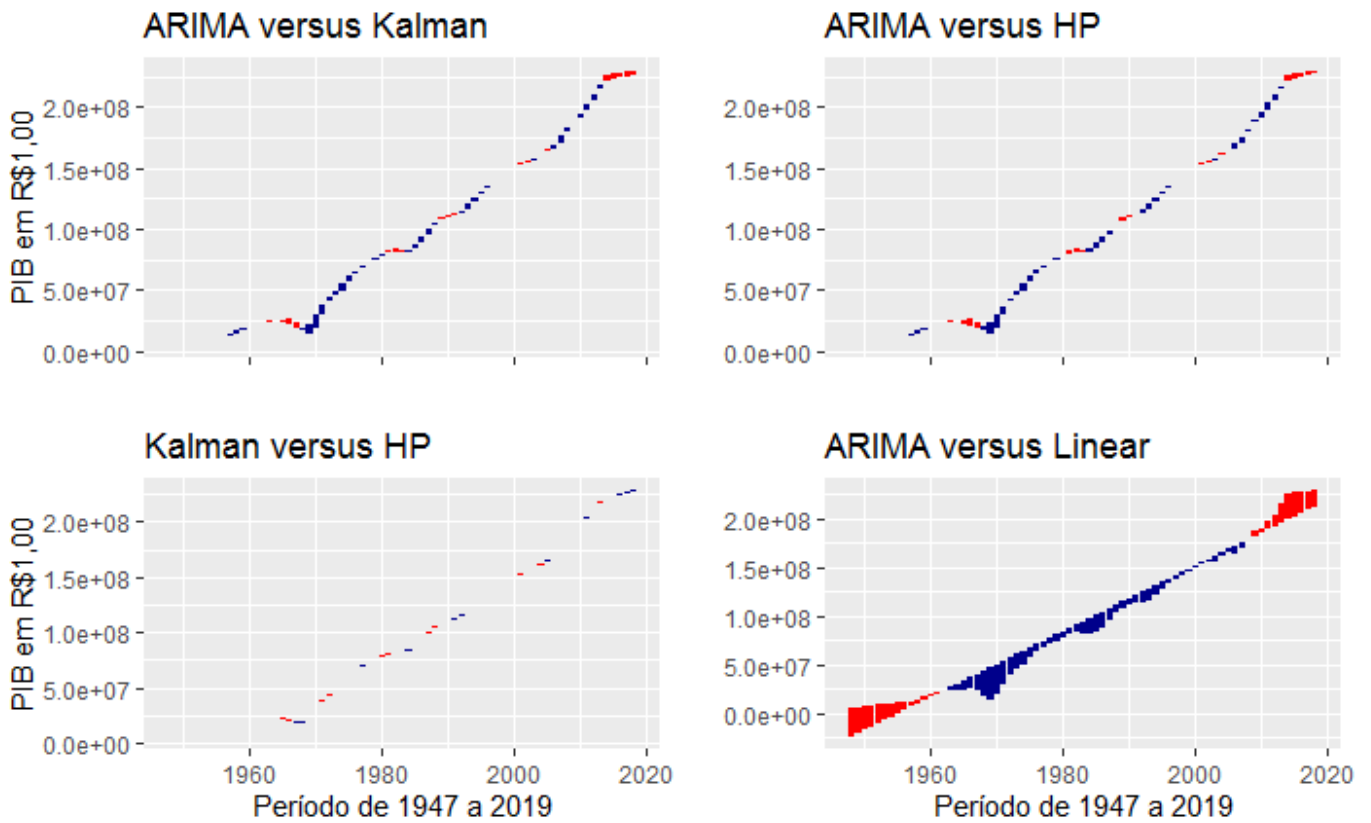
O comportamento entre as predições de Kalman e de HP, é similar, mas não idêntico, já que são dois estimadores diferentes, porém são mais similares do que em comparação com as estimações ARIMA. Segundo [Nelson e Plosser \(1982\)](#) a tendência linear determinística, não é a ideal para diferenciar momentos de prosperidade dos momentos de crise. Existem pequenas mudanças nas inclinações da tendência, provocadas pelas inversões das fases e, quando não captadas sobram para os ciclos. Observa-se na ([Figura 5](#)) o comportamento da componente tendência estimada por decomposição. De acordo com [Zarnowitz \(2001\)](#) o filtro de Kalman presume que a tendência é estocástica e, que o ganho desse filtro é a estimativa de variações não observadas ao longo da inclinação da tendência. Pequenas flutuações de curtíssimo prazo e quebra estruturais comparáveis tornam a tendência não linear. A boa estimativa deve observar a interação dos espaços de probabilidade entre ciclos e a tendência. Conforme [Bézenac et al. \(2020\)](#), os filtros estimam os desvios lineares locais ainda não observados. Para amplificar a análise do comportamento da tendência observa-se posteriormente na ([Figura 6](#)).

Figura 5 – Decomposição do PIB, Tendências: ARIMA vs Kalman vs HP (1947 a 2019)



Fonte: Elaborada pelos autores(a)

Figura 6 – Comparação ARIMA, Kalman e HP: Tendência Linear vs Estocástica (1947 a 2019)



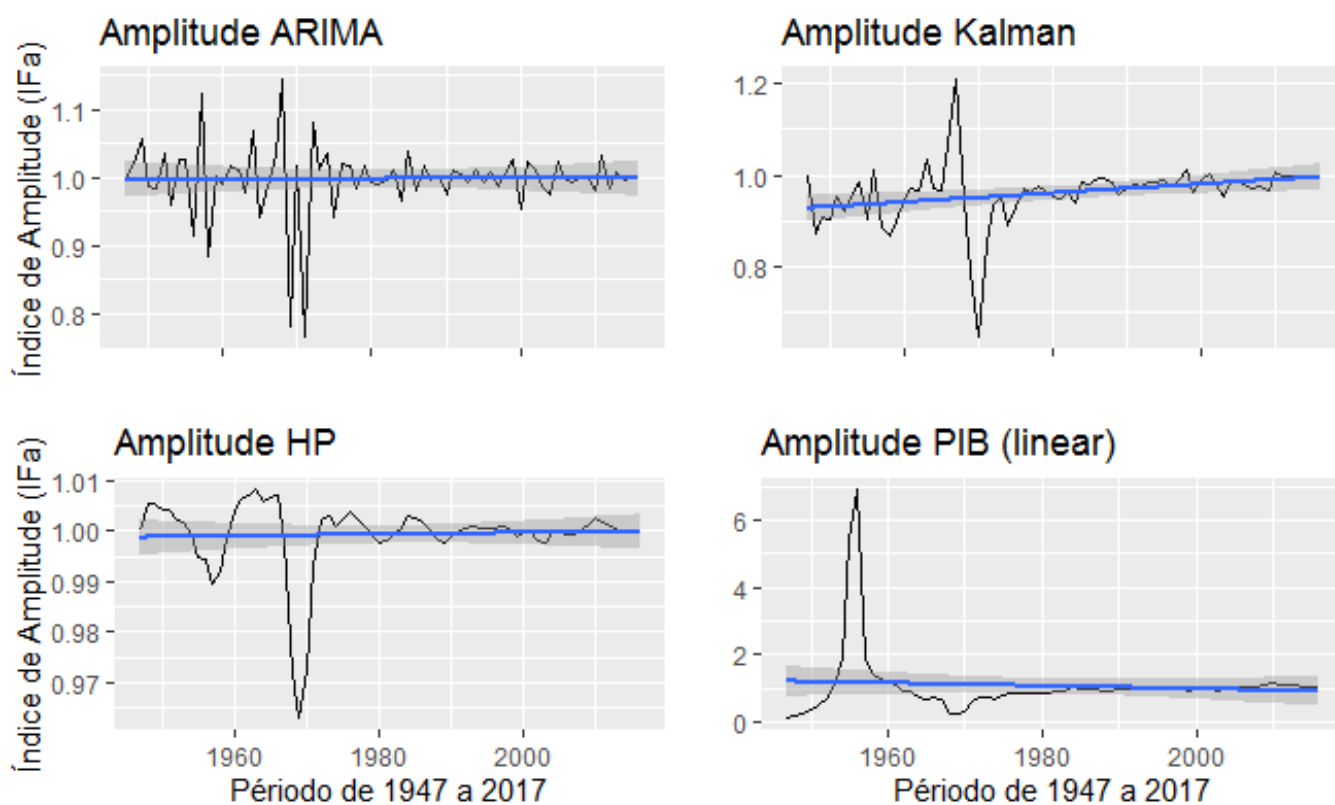
Fonte: Elaborada pelos autores(a)

Na figura (Figura 6), a base de comparação é a tendência da decomposição do modelo ARIMA e o ponto representa a tendência dos outros estimadores. Em vermelho, a base se comporta acima do ponto, e em azul, abaixo. Como não é plausível misturar as componentes, a análise adotada foi o índice de amplitude, uma proporção entre a componente e a sua própria série (recompose).

6.1 Variação nas Amplitudes das fases e Datação dos ciclos do PIB Paranaense

As amplitudes são as distâncias por meio de uma proporção entre a tendência e a série temporal, cujo foco são os momentos das fases dos ciclos. Não se leva em consideração o nível dessas diferenças, se mais ou menos eficientes para estimação da série, e sim se o método de estimação da componente tendência deixa sobrar ou faltar desvios explicados para o comportamento do ciclo. Para isso parte-se da análise pela (Figura 7).

Figura 7 – Variações de amplitude das fases



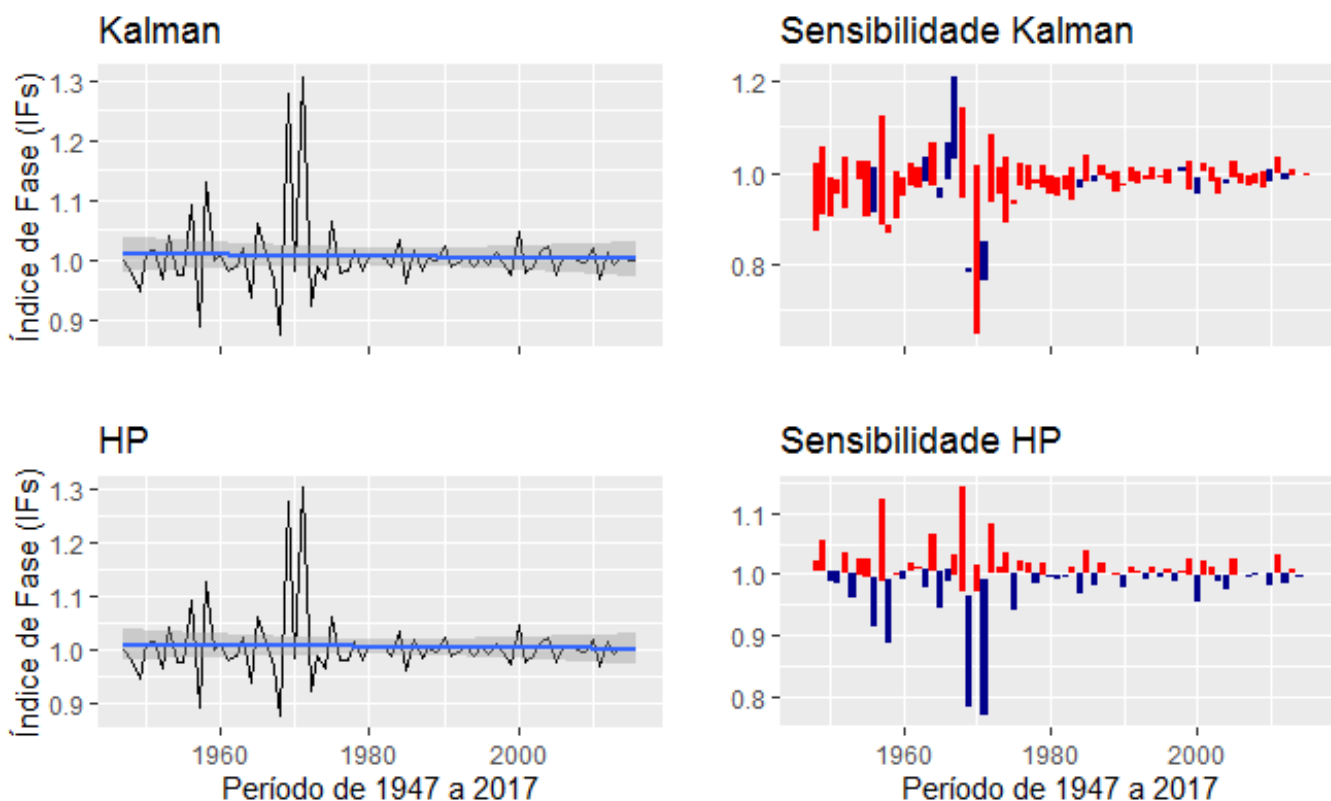
Fonte: Elaborada pelos autores(a)

Nota-se em (Figura 7), que a tendência estimada por ARIMA é bastante volátil comparado com Kalman e HP, dado seu índice de amplitude. Bézenac et al. (2020) explica que a predição do modelo ARIMA deixa lacuna nas estimativas, por não ser eficientemente sensível aos choques repentinos em uma série temporal.

6.2 Os índices de fases e as diferentes amplitudes das fases dentre as previsões

Para compreender o grau de suavização dos picos ou vales de série temporal por ARIMA, atenta-se que as fases são os diferenciais para descrever os ciclos. Por isso, é adotada outra proporção entre os índices de amplitude: o próprio índice de fase, onde o denominador é a amplitude da previsão ARIMA e o numerador a amplitude das estimações dos demais métodos. Observa-se o (Figura 8).

Figura 8 – Variações de amplitude das fases



Fonte: Elaborada pelos autores(a)

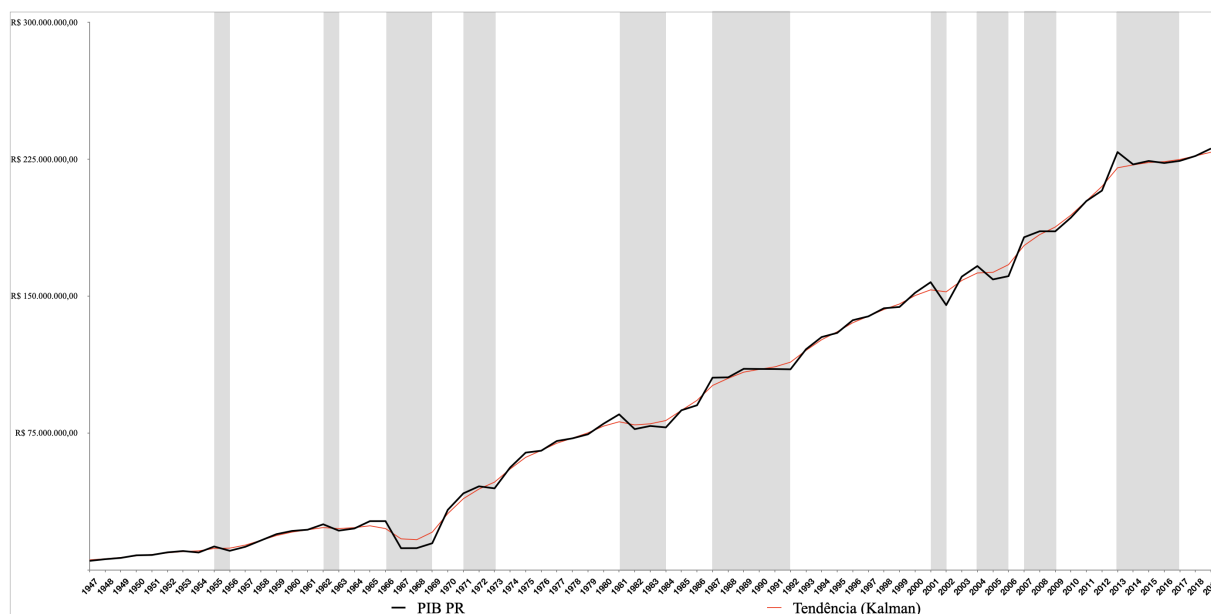
Na (Figura 8) parte (c), a parte do gráfico em vermelho representa que a distância entre tendência Kalman e sua própria previsão para PIB (amplitude) foi maior, em grande parte do período em relação a mesma medida considerando a previsão e tendência ARIMA. Essa medida de distância dada pela proporção mostra a amplitude da fase, pico ou vale, no caso em que a estimação e decomposição por ARIMA obteve tal amplitude menor, isso leva-se a entender que houve suavização das fase dos ciclos, conferindo com o estudo de [Zarnowitz e Ozyildirim \(2006\)](#), que buscaram entender o comportamento não observado da tendencia predeterminada, a qual não capta variação de curtíssimo prazo, a qual muda com a inclinação localmente da tendência considerada estocástica.

6.3 Datação dos ciclos do Paraná

A (Figura 9) apresenta a datação dos ciclos de negócios do Paraná, através da identificação das fases de expansões e recessões no PIB do estado, em relação à tendência estimada pelo filtro de Kalman. O filtro

de Kalman foi o método que apresentou maior suavização de tendência à série anual do PIB, de forma que ficou equilibrada a flutuação da tendência não-linear.

Figura 9 – Ciclos de Negócios do Paraná - 1947 a 2019



Fonte: Elaborada pelos autores(a)

As áreas cinzas mostram as fases de recessão de cada ciclo e as áreas brancas, as fases de expansão. Já na [Tabela 2](#) descreve a duração de cada fase, seu crescimento acumulado e crescimento anual médio.

Tabela 2 – Origem de dados e estimações

EXPANSÕES				RECESSÕES			
PERÍODO	DURAÇÃO	CRESC. % ACUM.	CRESC. % MÉDIO	PERÍODO	DURAÇÃO	CRESC. % ACUM.	CRESC. % MÉDIO
1947 a 1955	9 anos	1,59	0,18	1956	1 ano	-0,18	-0,18
1957 a 1962	6 anos	1,38	0,23	1963	1 ano	-0,14	-0,14
1964 a 1966	3 anos	0,24	0,08	1967 a 1969	3 anos	-0,45	-0,15
1970 a 1971	2 anos	1,87	0,94	1972 a 1973	2 anos	0,07	0,03
1974 a 1981	8 anos	0,91	0,11	1982 a 1984	4 anos	-0,08	-0,02
1985 a 1987	3 anos	0,35	0,12	1988 a 1992	5 anos	0,04	0,01
1993 a 2001	9 anos	0,43	0,05	2002	1 ano	-0,08	-0,08
2003 a 2004	2 anos	0,15	0,07	2005 a 2006	2 anos	-0,03	-0,02
2006 a 2007	2 anos	0,13	0,07	2008 a 2009	2 anos	0,02	0,01
2010 a 2013	4 anos	0,23	0,06	2014 a 2017	4 anos	-0,02	-0,01

Fonte: Elaborado pelos autores (a)

Foram identificados 10 ciclos completos entre 1947 e 2017 para o estado do Paraná, de vale a vale, com duração máxima de 10 anos e mínima de 3 anos, com fases de expansão maiores que as fases de recessão,

exceto no ciclo de 1984 a 1992, em que a fase expansão é de 3 anos e a de recessão dura 7 períodos, no auge da estagflação brasileira. Alguns períodos de recessão são, na verdade, desacelerações econômicas (tarjados), sem perda efetiva de atividade econômica. Também é possível observar, pelo histórico de variação nas expansões, uma desaceleração de crescimento médio, baixa flutuação entre expansões e recessões e menor duração das fases nos últimos anos.

Outros trabalhos que realizaram a datação de ciclos para outros estados do Brasil, como [Gomes e Magalhães \(2015\)](#) para o Espírito Santo, [Morais \(2013\)](#) para o Rio Grande do Sul e [Evangelista \(2009\)](#) para os principais estados do Brasil, inclusive o Paraná, no período de 1981 a 2009, utilizaram séries de produção industrial de periodicidade mensal ou trimestral. [Evangelista \(2009\)](#), em seus resultados, demonstra que Paraná não apresenta sincronização de fases cíclicas com os demais estados, mesmo os da região Sul do país e, isso reafirmado por este trabalho.

7 Considerações finais

No estudos de ciclos e decomposição de séries temporais, é importante atentar ao método de estimação da componente tendência-ciclo. Métodos de filtragem são, hoje, os mais avançados e sensíveis ao movimentos da série, tornando equilibrada a distribuição da flutuação para ciclos e a tendência, já que estimam os desvios locais ainda não observados. Isto torna mais simples a definição de pontos de reversão (picos e vales) e, conseqüentemente, facilita a datação de ciclos de negócios, sem que a tendência seja linear ou que seja removida. Processos estocásticos capturam maior volatilidade da série, enquanto filtros a suavizam, como é possível identificar pela comparação da amplitude das fases realizada pelo índice de fase.

Os ciclos de negócios do Paraná apresentam desacelerações de crescimento durante a história. As fases mostraram-se menos voláteis e mais curtas nas últimas duas décadas e as fases de expansão são geralmente mais longas que as de recessão, o que indica boa capacidade de recuperação da economia do Paraná.

Referências

- BATURIN, O. *Modelos Estruturais na Análise de Séries Temporais de Dados Ambientais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Minho, outubro 2016. Citado 3 vezes nas páginas [6](#), [7](#) e [8](#).
- BECKER, A. *Kalman Filter Tutorial*. 2021. Disponível em: <https://www.kalmanfilter.net/default.aspx>. Citado na página [9](#).
- BÉZENAC, E. de et al. Normalizing kalman filters for multivariate time series analysis. In: *NeurIPS*. [S.l.: s.n.], 2020. Citado 5 vezes nas páginas [2](#), [6](#), [10](#), [13](#) e [15](#).
- BOUZADA, M. A. C. *Aprendendo Decomposição Clássica: Tutorial para um Método de Análise de Séries Temporais*. [S.l.], 2012. Citado na página [5](#).
- BRY, B.; BOSCHAN, C. Cyclical analysis of time series: selected procedures and computer programs. *National Bureau of Economic Research*, 1971. Citado na página [11](#).
- BUENO, R. d. L. d. S. *Econometria de séries temporais. rev. e atualiz. Ed. Cengage Learning*, 2012. Citado 3 vezes nas páginas [9](#), [11](#) e [12](#).

- BURNS, A.; MITCHELL, W. Measuring business cycles. *National Bureau of Economic Research*, 1946. Citado na página 3.
- CARVALHO, F.; HERMANNY, P. F. Ciclos e previsão cíclica: O debate teórico e um modelo de indicadores antecedentes para a economia brasileira. *Revista Análise Econômica - UFRGS*, 2003. Citado na página 3.
- DAGUM, E.; BIANCONCINI, S. *Seasonal adjustment methods and real time trend-cycle estimation*. [S.l.]: Springer, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.
- EVANGELISTA, I. R. *Sincronização de Ciclos Econômicos para as Regiões Brasileiras*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 18.
- FERRAZ, D. H. *Caracterização dos Ciclos de Negócio e o Efeito de Crises Econômicas: América do Sul, BRICS e OCDE*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.
- GOMES, A. R.; MAGALHÃES, M. A. Construindo uma cronologia mensal de recessões para o estado do espírito santo. *Brazilian Business Review*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 18.
- HAMILTON, J. D. *Time Series Analysis*. [S.l.]: Princeton University Press, 2020. Citado na página 8.
- HARDING, D.; PAGAN, A. Dissecting the cycle: a methodological investigation. *Journal of monetary economics*, Elsevier, v. 49, n. 2, p. 365–381, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 11.
- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. *Forecasting: principles and practice*. 2018. Citado na página 6.
- HYNDMAN, R. J.; KHANDAKAR, Y. Automatic time series forecasting: the forecast package for r. *Journal of statistical software*, v. 27, n. 1, p. 1–22, 2008. Citado na página 10.
- IBGE. *PIB Estadual a preços constantes*. 2021. Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br>>. Citado na página 7.
- IPARDES. *Produto Interno Bruto do Paraná (1970-87)*. 1988. Citado na página 7.
- KASZNAR, I. K. *Ciclos de Negócios no Brasil: Modelos, Tipos, Evolução e Tendências Dominantes por Setores Industriais entre 1980 e 1996*. Tese (Doutorado) — Business Administration - PhD California Coast University, 1996. Citado na página 3.
- KIM, K. Dating new zealand business cycles. *GSBGM Research Publications Series*, 1994. Citado na página 4.
- KLEIN, P.; MOORE, G. Monitoring growth cycles in market-oriented countries: Developing and using international economic indicators. *Bullinger for National Bureal Economic Research*, 1985. Citado na página 4.
- LEITE, J.; LOPES, L.; MACEDO, L. Flutuações econômicas brasileiras: uma proposta de datação para os trimestres entre 1947 e 2016. *Revista de Desenvolvimento e Políticas Públicas*, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.
- MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S. *The handbook of forecasting: a manager's guide*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1982. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 13.
- MORAIS, I. A. C. Ciclo e indicadores antecedentes na indústria do rio grande do sul. *Nova Economia*, 2013. Citado na página 18.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. *Análise de séries temporais: modelos lineares univariados*. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 4, 6 e 8.

NELSON, C. R.; PLOSSER, C. R. Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of monetary economics*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 139–162, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 13.

NETO, N. T. et al. Caracterização dos ciclos de negócios dos setores produtivos da indústria brasileira. 2016. Citado na página 4.

NILSSON; GYOMAI. Cycle extraction: A comparison of the phase-average trend method, the hodrick-pecrescott and christiano-fitzgerald filters. *OECD Statistics Working Papers*, 2011. Citado na página 3.

SOUZA, G. P.; SAMOHYL, R. W.; MEURER, R. Previsão do consumo de energia elétrica do setor industrial em santa catarina – um estudo comparativo entre diferentes métodos de previsão através de suas discrepâncias. *XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2004. Citado na página 5.

SOUZA, R. C. Modelos estruturais para previsão de series temporais : abordagens classica e bayesiana. *Anais do Colóquio Brasileiro de Matemática*, 1989. Citado na página 5.

ZARNOWITZ, V. Economics program working paper series time series decomposition and measurement of business cycles , trends and growth cycles. *National Bureau Economic Research*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 13.

ZARNOWITZ, V.; OZYILDIRIM, A. Time series decomposition and measurement of business cycles, trends and growth cycles. *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, v. 53, n. 7, p. 1717–1739, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 2, 3, 4, 5, 6 e 16.