

Abstract

The firm decision making is a complex strategic process in regards to the moment of innovation. The way that firm makes decisions depends on several factors, such as the market structure, the behavior of competitors and the technological diffusion process. This work presents a theoretical model of innovation games taking into account a leader and a follower firms competing in a duopoly seeking to maximize their profits by choosing the period in which the innovation must be launched. Based on previous work published in the literature, this work determines the moment when certain firm have advantages over its rival given the structure established in the market and obtain the expectation of profits of the follower firm depending on the levels of protection of innovation. The model used in this article extends the previous work of Hoppe; Lehamn-Grube (2005). The adaptation made in the previous model is to assume that there is a process of technological diffusion that is accelerated by the launch of an innovation, as in Comino et al. (2018) and Dutta et al. (1993). The assumption that technological progress is growing steadily is quite useful as a simplification that allows modeling complex decision-making processes, however, it may not correctly represent the reality of certain sectors of the economy. The present extended model is capable to capture heterogeneities in the process of technological diffusion. To provide a way to capture an effect not foreseen in the base article Hoppe; Lehamn-Grube (2005) and enrich the analytical ability is added a parameter translating the increment in the rate of technological diffusion, which does not affect the logic proposed by Fudenberg; Tirole (1985) and Hoppe; Lehamn-Grube (2005). This exogenous parameter allows the model to be able to represent a different situation that is endorsed by the literature. Comino et al. (2018) and Bessen; Maskin (2009) suggest that the launch of an innovation is capable to accelerate the pace of technological development in certain markets. This "acceleration" is represented by a discontinuity in the return curve of the follower firm. In conclusion, it is demonstrated that the introduction of this new parameter in the payoff function change the game evolution determining an additional gain for follower firm. This parameter can be estimated as part of a model if an empirical framework is developed.

Keywords: Innovation; Technological diffusion; Timing games.

JEL: L13; O31; O33.

Resumo

A tomada de decisão firma é um processo estratégico complexo em relação ao momento da inovação. A maneira como a empresa toma decisões depende de vários fatores, como a estrutura do mercado, o comportamento dos concorrentes e o processo de difusão tecnológica. Este trabalho apresenta um modelo teórico de jogos de inovação, levando em consideração empresas líderes e seguidoras que competem em um duopólio buscando maximizar seus lucros, escolhendo o período em que a inovação deve ser lançada. Com base em um trabalho anterior publicado na literatura, este trabalho determina o momento em que firmas têm vantagens sobre sua rival, dada a estrutura estabelecida no mercado e obtêm a expectativa de lucros da firma seguidora, dependendo dos níveis de proteção da inovação. O modelo usado neste artigo estende o trabalho de Hoppe; Lehamn-Grube (2005). A adaptação feita no modelo anterior é assumir que existe um processo de difusão tecnológica que é acelerado pelo lançamento de uma inovação, como em Comino et al. (2018) e Dutta et al. (1993). A suposição de que o progresso tecnológico está crescendo de forma constante é bastante útil como uma simplificação que permite modelar processos complexos de tomada de decisão, no entanto, pode não representar corretamente a realidade de certos setores da economia. O presente modelo estendido é capaz de capturar heterogeneidades no processo de difusão tecnológica. Fornecer uma maneira de capturar um efeito não previsto no artigo base de Hoppe; Lehamn-Grube (2005) reforça a capacidade analítica, em suma, é adicionado um parâmetro que traduz o incremento na taxa de difusão tecnológica, o que não afeta a lógica proposta por Fudenberg; Tirole (1985) e Hoppe; Lehamn-Grube (2005). Esse parâmetro exógeno permite que para que o modelo possa representar uma situação diferente, que é endossada pela literatura. Comino et al. (2019) e Bessen; Maskin (2009) sugerem que o lançamento de uma inovação é capaz de acelerar o ritmo do desenvolvimento tecnológico em certos mercados. Essa "aceleração" é representada por uma descontinuidade na curva de retorno da empresa

¹Mestrando em Desenvolvimento Econômico no Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná PPGDE-UFPR

²Doutor em Ciências (Economia Aplicada) pela Universidade de São Paulo (USP). Professor no Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná. PPGDE-UFPR

seguidora. Em conclusão, é demonstrado que a introdução desse novo parâmetro na função de retorno altera a evolução do jogo, determinando um ganho adicional para a empresa seguidora. Ressalta-se que este parâmetro pode ser estimado como parte de um modelo, caso seja desenvolvido um estudo empírico.

Palavras-chave: Inovação; Difusão tecnológica; Jogos de tempo.

JEL: L13; O31; O33.

Área 7: Microeconomia e Organização Industrial

1 Introdução

Este artigo propõe uma formulação teórica para a competição via inovações entre empresas. Essa competição se dá pelo tempo onde a inovação é lançada, assumir-se-á que o custo da inovação é decrescente ao longo do tempo, como em Dutta et al. (1993) e Hoppe; Lehmann-Grube (2005). O tempo da inovação será decidido com base em um *trade-off*, quanto mais cedo adota-se a tecnologia, mais cedo recolhe-se os lucros dela, mas, gasta-se mais em pesquisa e desenvolvimento. A questão passa a ser o momento onde a firma maximizará seu lucro, dado que a proteção da inovação é imperfeita como em Comino et al. (2019). O modelo apresentado neste artigo utilizará uma concepção de difusão tecnológica distinta de outros artigos sobre o tema. A difusão tecnológica é o processo por onde inovações e tecnologias são absorvidas pelos mercados. Ao invés de se assumir que essa difusão ocorre de maneira constante ao longo do tempo, o modelo presente neste artigo suporá que a difusão tecnológica é acelerada pelo lançamento de inovações, como em Bessen; Maskin (2009). Jogos dinâmicos de inovação são fundamentais para a compreensão da concorrência oligopolista em organização industrial. O investimento em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) é uma das principais maneiras de uma firma obter vantagens sobre seu rival em um mercado. Essa decisão de investir em uma tecnologia é dependente de diversos fatores, como: tipo de inovação (produto ou processo), estrutura de mercado vigente, tamanho da firma, tamanho da rival, nível de competitividade³ etc. Neste artigo, assume-se um mercado com duas firmas em competição de duopólio. Essa grande diversidade de variáveis influenciando a tomada de decisão da firma leva a um problema de maximização de lucro. As estratégias que levam a essa maximização são apresentadas pelo modelo proposto neste ensaio.

O parâmetro introduzido neste artigo, denominado α , tem relação com quão protegida é a propriedade intelectual. Dependendo do setor estudado, podem existir diferenças consideráveis na proteção à propriedade intelectual. A forma com que as firmas se organizam para investir em P&D pode ser afetada por políticas públicas, como incentivos estatais. Vive-se, em 2020, uma crise causada pela pandemia referente ao COVID-19, essa situação, por exemplo, possui uma ligação com jogos de inovação. Diversas firmas do ramo farmacêutico estão desenvolvendo, em vários casos separadamente, vacinas para o combate à pandemia. A recompensa para uma firma que chegue a uma forma de imunização funcional antes de suas rivais é considerável. Ser o primeiro a inovar, em um cenário como este, é extremamente proveitoso, tanto que diversos governos trabalham e investem em projetos de firmas de alguma maneira relacionadas aos seus países. Esse processo de P&D das firmas está, por diversas vezes, ligado a instituições de ensino superior. Esta junção de investimento público e privado é citada por Tirole (1988), segundo o autor, existem três estágios da pesquisa, o primeiro é a pesquisa de base, feita por universidades e governos, o segundo é a pesquisa aplicada, onde firmas transformam essa pesquisa básica em produtos e o último estágio é o processo de licenciamento e venda desta tecnologia. Essa ligação entre setores diferentes ocorre com a busca pelas firmas de incrementar os efeitos de difusão tecnológica. O processo de incentivo à difusão tecnológica pode se dar de diversas maneiras, como será exposto no presente artigo. No caso da busca pela vacina, há um incentivo claro para ser o primeiro a inovar. Esse incentivo para ser o primeiro a inovar pode não ser universal, em mercados com características distintas, as firmas seguidoras podem ter vantagem se aguardarem que a firma líder inove em um primeiro período. Isto pode ocorrer por diversos mecanismos, entre eles, a redução do custo para se inovar ao longo do tempo, fruto do progresso tecnológico. E também a qualidade da inovação, uma inovação sequencial pode oferecer melhorias no produto pioneiro.

Este artigo está dividido da seguinte maneira: na seção 2 estão contidos os trabalhos teóricos que baseiam a abordagem aqui proposta, a seção 3 apresenta o modelo e as implicações das modificações feitas, a seção 4 apresenta as possíveis aplicações que a modelagem teórica proposta pode ter em trabalhos empíricos de estimação e a seção 5 apresenta as considerações finais deste trabalho.

2 Literatura

Jogos dinâmicos são, segundo Long (2010), jogos com dois ou mais participantes, sendo o jogador qualquer agente capaz de tomar decisões. As características destes jogos são: os jogadores recebem um pagamento em cada período (com o pagamento total sendo o somatório ou integral dos pagamentos descontados ao longo do tempo), esse pagamento pode

³Capacidade de cada firma em fixar preços além do nível competitivo.

dependem das decisões tomadas no período ou do estado do sistema deste jogo no período; esse estado do sistema muda ao longo do tempo, podendo ser dependente das decisões dos jogadores; a mudança das variáveis ao longo do tempo é representada por uma equação diferencial. Um jogo pode apresentar um equilíbrio de loop aberto de Nash ou um equilíbrio de Nash Markov perfeito. Um equilíbrio de loop aberto de Nash ocorre quando os agentes fazem um compromisso prévio. O equilíbrio de Nash Markov perfeito ocorre quando os agentes utilizam os resultados dos períodos presentes para planejar suas ações futuras. Jogos dinâmicos são utilizados no campo de organização industrial para modelar o comportamento de firmas envolvidas em competições por mercados e para modelar as interações entre as firmas do mercado e os consumidores. Os jogos dinâmicos permitem realizar uma análise para agentes com comportamentos mais complexos. Dado que o processo de decisão sequencial e interdependente é mais complexo e exige um instrumental matemático mais sofisticado que um processo de decisão estática. Para a adoção de tecnologia, o equilíbrio pode demandar que os agentes se comprometam previamente com certas ações. Existem casos onde há uma vantagem estratégica em ser o primeiro a jogar. Nestes casos, uma firma, ao conseguir alcançar um desenvolvimento tecnológico antes de sua rival, passa a ter ganhos de monopólio sobre essa tecnologia (caso se trate de um produto) ou uma redução de custos (caso seja um processo). Esta vantagem diminui com o tempo, pois assume-se que há um processo de difusão tecnológica, onde as firmas rivais eventualmente alcançam a firma líder. É possível que o agente seguidor tenha vantagens, isso dependerá das configurações do sistema. Para que exista uma vantagem do seguidor é necessário que a firma seguidora seja capaz de melhorar, rapidamente, a inovação da firma líder. Em ambientes onde há poucas restrições, a firma seguidora pode se aproveitar com maior facilidade da tecnologia desenvolvida pela líder, diminuindo os retornos da firma inovadora. Em alguns casos essa facilidade de apropriação pode ser tão significativa que a firma com maior lucro é a firma seguidora.

O artigo de Reinganum (1981) tem como objetivo estudar as estratégias de investimento em inovações de firmas. Dentro da teoria de organização industrial, são estudadas as competições entre empresas no que tange à tecnologia. Empresas rivais terão diversas estratégias para evitar que sua rival tenha vantagens. Dada a incerteza no *timing* dos movimentos de sua rival, a firma deve desenvolver uma série de estratégias que sejam capazes de reagir às iniciativas da adversária. Assume-se que os agentes são capazes de calcular tanto seus resultados ótimos quanto os resultados ótimos de seu rival, de acordo com a estratégia adotada. Dada esta condição de comportamento, compreende-se a motivação da utilização de jogos dinâmicos neste estudo. O modelo assume que as firmas investem recursos tentando ser os primeiros a obter a patente, para que seja possível ter ganhos de monopólio com esta inovação. A firma que perde a corrida pela patente não obtém nenhum tipo de ganho com os recursos investidos em pesquisa e desenvolvimento. Assume-se que há uma data “T” onde a inovação buscada pelas empresas se torna obsoleta, ou, se ela ainda não tiver sido desenvolvida, a firma assume que ela é inviável. Este conceito de tempo limite para o desenvolvimento da inovação será utilizado no modelo proposto no presente artigo. O modelo de Reinganum (1981) é formulado como um jogo e um problema de otimização dinâmica. Um dos resultados encontrados pela autora é de que um incremento no conhecimento da firma rival acarreta dois efeitos, uma diminuição dos retornos esperados da outra firma e uma redução nos custos desta outra firma. A redução nos custos é proveniente do menor gasto em pesquisa (dado que a outra firma possui maiores chances de chegar ao resultado primeiro), já a diminuição dos retornos é proveniente do fato de que há uma menor chance de se ter o monopólio da inovação. A modelagem teórica sugere que a perda marginal de não se ter a inovação é maior que o ganho marginal dos menores gastos. Uma condição importante para o modelo de Reinganum ser verdadeiro é de que, quando o nível de conhecimento necessário para se obter a inovação diminui, o ritmo de desenvolvimento de conhecimento aumenta. Reinganum (1981) também sugere um modelo onde as firmas podem cooperar, adquirindo conhecimentos uma da outra. Os resultados obtidos pela autora indicam que, ao cooperar, as firmas são capazes de gerar o mesmo conhecimento com menos recursos, comparando-se com o cenário onde elas competem. Uma comparação dos equilíbrios é realizada neste artigo, onde percebe-se que, em um cenário de competição, mais recursos são gastos em pesquisa e desenvolvimento e o resultado é atingido, em média, em um período anterior ao período do conluio entre empresas. Esse efeito ocorre dado que, em conluio, as firmas não tem a preocupação de sua rival antecipar a oferta da inovação. Caso o compartilhamento de informações entre as empresas não seja proibido, o tempo de desenvolvimento da inovação dependerá do grau de distribuição dos lucros e informações. O nível socialmente ótimo de inovações depende da capacidade de replicação, da proteção conferida pela patente e da reação da firma rival (em um cenário competitivo). A autora assume que o conhecimento é um bem público, o resultado encontrado para este modelo é que as inovações são geradas com maior rapidez, isso se deve ao fato de que manter sua pesquisa privada não garante maiores incentivos para inovar. Assumir a tecnologia como um bem público é uma questão complexa, pois existem diversos mecanismos para garantir o direito de exclusividade do inovador, como patentes e segredos industriais. Outros trabalhos citados nesta seção não consideraram a tecnologia como um bem público, assumindo que há a difusão gradual e contínua dela no mercado, como em Dutta et al. (1993) e Fudenberg; Tirole (1985). Ressalta-se que o modelo da autora assume firmas de tamanhos iguais, não se preocupando também com o efeito do número de firmas no equilíbrio. O modelo de Reinganum (1981) é de fundamental importância para o estudo de jogos dinâmicos de inovação, pois diversos outros modelos, como os de Fudenberg; Tirole (1985) e Hoppe; Lehmann-Grube (2005) utilizam conceitos ou hipóteses adaptados dos modelos presentes neste artigo.

Fudenberg; Tirole (1985) oferecem um modelo de adoção de inovações que serve como base para outros textos da literatura desta área. Os autores propõem uma lógica de inovação onde, quanto mais cedo se adota a inovação, mais cara é essa adoção. Isso ocorre pois, com o passar do tempo, há um acúmulo de conhecimento, que reduz os custos de se adotar inovações. Em monopólio, a firma opta por adotar a tecnologia quando o fluxo de lucros se torna igual ao custo marginal de se adotar a tecnologia com antecedência. Em oligopólio, a lógica se torna mais complexa, existem incentivos para as firmas (não cooperativas) de adotarem a inovação antes do tempo ótimo (onde a inovação gera o maior retorno para o inovador) do mercado e, caso as defasagens temporais sejam curtas, há incentivo para as firmas tomarem ações preventivas contra suas rivais.

$$V^i(T_i, T_{-i}) = \sum_{m=0}^{i-1} \int_{T_m}^{T_{m+1}} \pi_0(m) e^{-rt} dt + \sum_{m=i}^n \int_{T_m}^{T_{m+1}} \pi_1(m) e^{-rt} dt - c(T_i) \quad (1)$$

Onde: $\pi_0(m)$ é o fluxo de receitas da firma i se m firmas tiverem adotado a inovação (mas a firma i não), $\pi_1(m)$ é o fluxo de receitas se m firmas (incluindo a firma i) tiverem adotado a inovação, T_i é a data de adoção da inovação pela firma i , T_{-i} é o vetor de datas de adoção das inovações pelas firmas rivais de i , $c(T_i)$ é o custo em valor presente de se trazer a inovação para o tempo T_i e $V^i(T_i, T_{-i})$ são os pagamentos recebidos pela firma i . Os autores assumem que $T_0 \equiv 0$, $T_{m+1} \equiv +\infty$ e que r é uma taxa de juros comum a todos. Outros pressupostos do modelo são de que os retornos são decrescentes no nível de adoção da inovação e que não há adoção imediata por parte das empresas, pois não há como π_1 ser pelo menos igual à $\pi_0(m-1)$. Ressalta-se que, para o modelo possuir validade, é necessário que todas as firmas adotem a tecnologia em algum período de tempo t , isso implica que com um t suficientemente grande, todas as firmas adotam a inovação. Por último, assume-se que $e^{-rt}c(t)$, o custo presente, é decrescente e progressivamente atenuado. Essa condição é satisfeita por $c(t) = e^{-(r+\alpha)t}$, onde o custo diminui a uma taxa α devido ao progresso tecnológico. A hipótese de Fudenberg; Tirole (1985), baseada na lógica exposta anteriormente é de que em um equilíbrio baseado em pré-compromisso, os pagamentos recebidos pelas firmas diminuem monotonicamente com a ordem de adoção da inovação. Pré-compromisso é uma ação que consiste em limitar suas ações futuras de acordo com suas preferências presentes, isso funciona como uma forma de controle para o agente. Em um ambiente de incertezas os agentes podem optar por adotar uma estratégia que limita seu comportamento futuro, buscando levar as preferências do presente para os períodos posteriores. Fudenberg; Tirole (1985) sugerem que o cenário de pré-compromisso é uma análise falha, pois há uma dificuldade de se captar o comportamento estratégico das firmas em um mercado com competição. Para realizar uma análise mais precisa do comportamento das firmas, os autores sugerem um comportamento estratégico da firma. Este comportamento ocorre por haver um receio por parte das firmas de inovar, temendo que as suas rivais copiem rapidamente a sua inovação, anulando os ganhos decorrentes de se ter inovado. Neste caso, envolvendo decisões estratégicas das firmas, as hipóteses adotadas por Fudenberg; Tirole (1985) são: se $L(T_1^*) > M(T_2^*)$ (lucro da firma líder no período 1 maior que lucro do mercado no período 2) há apenas um equilíbrio e a firma líder inova em T1 com 50% de probabilidade ou a firma seguidora inova em T2 com 50% de probabilidade. É válido ressaltar que a forma que o tempo é representada nesse modelo é um tempo discreto, mas, que é modificado para representar o tempo de forma contínua. Essa estratégia permite uma melhor análise das estratégias dos jogadores, essa representação também é vista em Hoppe; Lehmann-Grube (2005). No modelo de Fudenberg; Tirole (1985), em equilíbrio, os lucros das firmas são equalizados. Para que as firmas adotem a inovação simultaneamente é necessário que $M(T_2^*) \geq L(T_1^*)$, ou seja o retorno do mercado no período 2 deve ser maior ou igual ao retorno da firma líder no período 1. Fudenberg; Tirole (1985) introduzem uma outra formalização, baseada na apresentada anteriormente, para poder representar os limites temporais como contínuos. Modelos que consideram o tempo como contínuo possuem mais equilíbrios de estratégias puras que modelos com tempo discreto. A formulação proposta pelos autores utiliza espaços estratégicos, que mostram todas as maneiras possíveis que os agentes podem agir dentro dos limites do jogo. Os autores apontam que eles definem uma estratégia mais simplificada de tempo contínuo para definir os lucros e o equilíbrio de Nash. Após realizar essa definição os autores estendem essa estratégia definida anteriormente para estratégias de loop fechado (que envolve vários estágios, com os agentes tendo informações sobre as decisões dos períodos anteriores de seus rivais) com equilíbrio geral. Este modelo expandido considera que as firmas podem cometer erros com uma certa probabilidade, até mesmo de maneira simultânea. Na formulação dos autores, em equilíbrio, mesmo com as firmas utilizando estratégias mistas a probabilidade de se cometer um erro é zero. Isso ocorre pelo lucro no período T_1 ser nulo, logo, nenhuma firma irá tentar uma adoção preventiva neste período, o que nulifica a chance de cometer erros

As conclusões de Fudenberg; Tirole (1985) sugerem que a ameaça de prevenção⁴ equaliza os lucros, quando em duopólio. Em jogos, isso ocorre quando um agente tenta influenciar o jogo ao ameaçar uma ação, se a ameaça não possuir credibilidade ela é descartada pelos outros jogadores envolvidos. A equalização dos lucros proposta pelos autores não ocorre quando há mais de duas firmas no mercado. Isso ocorre, pois, em duopólio, a resposta da firma seguidora é contínua, com mais de dois participantes no mercado essa continuidade não se sustenta. Quando o lucro decorrente de realizar uma ação de

⁴Ação onde uma firma busca convencer seu rival de que agirá em um período próximo, com o intuito de fazer seu rival se mover.

prevenção é suficientemente baixo, há uma equalização dos resultados das firmas no mercado. Já se o lucro de se inovar nos períodos iniciais for suficientemente grande, a adoção de tecnologia pelas firmas ocorrerá mais rapidamente e haverá a difusão desta inovação. As premissas que sustentam os argumentos da prevenção são de que as defasagens de informação são curtas e os ganhos de cada empresa são informações perfeitas. Ao se relaxar a primeira hipótese, percebe-se que a adoção tardia da tecnologia se torna menos provável. Ao se relaxar a hipótese de informação perfeita nos ganhos de cada firma, percebe-se que a competição se torna menos agressiva, pois as firmas não sabem mais se haverá prevenção (atitude onde firma antecipa sua ação para evitar um resultado desfavorável) se aguardarem após o tempo inicial para inovar. Dutta et al. (1993) elaboram um modelo baseado em uma importante diferença dos pressupostos de Reinganum (1981) e Fudenberg; Tirole (1985). Para os modelos expostos anteriormente, quando uma inovação é gerada, ela já está pronta para a comercialização e que não sofre alterações técnicas ou econômicas em períodos subsequentes. Esta diferença nas características da inovação nos modelos gera duas questões para os autores: se inovações retardatárias são prováveis quando firmas podem melhorar uma tecnologia quando estão em um período de espera, ou se prevenção continua sendo a questão principal nestes estágios. A outra questão é se há uma possível inércia no comportamento de uma firma que, em períodos passados, recebeu retornos acima de suas rivais por inovar no momento certo. Essa inércia se manifestaria na firma vencedora do passado ter menos incentivos a inovar no presente. O modelo de Dutta et al. (1993) assume que o mercado é caracterizado por um oligopólio e que as inovações chegam às firmas de maneira exógena. Essa inovação é facilmente adquirida e pode ser melhorada pelos agentes. A firma líder entra com um produto de qualidade inferior no tempo em que inova; com o passar do tempo, a qualidade desta inovação melhora, esse processo é chamado pelos autores de equilíbrio de maturação. Uma entrada em um período posterior, com um produto superior, leva a maiores lucros no longo prazo. Segundo Dutta et al. (1993), na disputa entre a firma incumbente e a firma entrante, a firma incumbente tem preferência por adiar o lançamento de uma inovação, mas, em equilíbrio, ela pode ser incapaz de realizar sua preferência por esta ser de conhecimento da sua rival. Uma propriedade constante neste artigo é de que as curvas “L” (forma funcional dos retornos da firma líder ao longo do tempo) e “F” (forma funcional dos retornos da firma seguidora ao longo do tempo) são decrescentes e possuem um único pico. Essa propriedade será revista por Hoppe; Lehmann-Grube (2005). Dutta et al. (1993) concluem que, em oligopólio, um dos determinantes estratégicos das decisões da firma é a expectativa que ela possui do período que sua rival realizará a inovação. Assumindo que níveis de qualidade diferentes são possíveis de serem alcançados, assume-se que há uma vantagem em ser o seguidor, quando há difusão tecnológica. Dutta et al. (1993) desenvolvem uma modelagem capaz de captar o momento onde o jogador toma a sua decisão, chamado de ponto de parada. Os autores encontram que o modelo de inovação de produto possui dois equilíbrios possíveis. No primeiro, todas as firmas buscam antecipar a ação da outra, inovam no mesmo período, e há equalização de lucros. No segundo caso, a firma líder busca antecipar a seguidora, chegando a um lucro de equilíbrio menor que o da firma seguidora.

Holden; Riis (1994) oferecem uma modelagem para explicar a decisão de parada da firma, ou seja, a decisão de quando lançar uma inovação. Segundo os autores, é possível haver uma descontinuidade nas funções de lucro das firmas. Essa descontinuidade ocorre devido à possibilidade da firma líder mudar de estratégia, de uma que permita a entrada de concorrentes para uma que proíba esta entrada. Esta mudança de estratégia ocorre com o crescimento do mercado. O modelo destes autores assume que é possível que as firmas entrem simultaneamente no mercado. Este modelo é uma expansão do que é proposto por Fudenberg; Tirole (1985), a expansão no modelo consiste na possibilidade de descontinuidade anteriormente mencionada. Esta possibilidade de descontinuidade está presente em Hoppe; Lehmann-Grube (2005) e, conseqüentemente, no modelo apresentado na seção 3 deste artigo. No modelo de Holden; Riis (1994), a entrada simultânea não é uma garantia de equalização de lucros. Isso ocorre, pois os lucros serão determinados pela estrutura de custos e de demanda em diferentes mercados.

2.1 Modelo de Hoppe; Lehmann-Grube (2005)

Em artigo de Hoppe; Lehmann-Grube (2005), observa-se o comportamento das firmas quando estas têm em seu caminho um dilema de *timing* da inovação. Ser o primeiro a inovar pode conferir ganhos de monopólio, mas ficar para trás pode ser lucrativo caso a firma seguidora desenvolva uma tecnologia melhor em um período posterior. Os autores procuram analisar se há uma vantagem do primeiro jogador, bem como as condições para a existência desta vantagem. Inicialmente, assume-se que o jogo é realizado por duas firmas, que o tempo é contínuo e, caso a firma seja indiferente entre agir em dois períodos de tempo distintos, ela opta pelo anterior. O tempo é modelado de maneira discreta, mas com um refinamento que matematicamente o representa como sendo contínuo. Os autores oferecem um problema de maximização do lucro onde as firmas disputam um mercado através do *timing* de sua inovação. Para realizar sua maximização, em inovações de processos, as firmas levam em consideração: seu próprio lucro, o lucro de sua rival, a sua data de adoção de tecnologia, a data de adoção de tecnologia de sua rival, seu custo para desenvolver P&D e o custo de sua rival. Como pode ser observado nas equações 2 e 3, desenvolvidas por Hoppe; Lehmann-Grube (2005) como uma expansão do modelo de Fudenberg; Tirole (1985):

$$\pi_1(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} R_M(t_1) dt + \int_{t_2}^{\infty} e^{-rt} R_1(t_1, t_2) dt - \int_0^{t_1} e^{-rt} k(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$\pi_1(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{\infty} e^{-rt} R_2(t_1, t_2) dt - \int_0^{t_2} e^{-rt} k(\tau) d\tau \quad (3)$$

Onde: R_M é o retorno de monopólio, R_1 é o retorno da firma líder, R_2 é o retorno da firma seguidora, t_1 é o período de tempo que a firma 1 inova, t_2 é o período onde a firma 2 inova e $k(\tau)$ é o custo de cada firma por unidade de tempo τ . Assume-se que: $t_1 \leq t_2$ e $R_1(t_1, t_2) = R_2(t_1, t_2)$ se $t_1 = t_2$. A modelagem proposta no presente artigo será uma adaptação do que é assumido por Hoppe; Lehmann-Grube (2005) nas equações 1 e 2. A mudança principal será que o efeito diminuidor de custos da difusão tecnológica ($\int_0^{t_1} e^{-rt} k(\tau) d\tau$) não será continuamente decrescente ao longo do tempo. Os autores introduzem uma função inversa da demanda para cada período de tempo de $p = 1 - q$, sendo p o preço praticado e q a quantidade total. Utilizando esta função realiza-se a maximização das funções [1] e [2], no contexto de uma inovação de processo, que é dada por:

$$R_M^* = \frac{1}{4}(1 - c_1)^2, \quad (4)$$

$$R_1^* = \max\left[\frac{1}{9}(1 - 2c_1 + c_2)^2, 0\right], \quad R_2^* = \min\left[\frac{1}{9}(1 - 2c_1 + c_2)^2, \frac{1}{4}(1 - c_1)^2\right].$$

Onde: R_M são os retornos por unidade de tempo para a firma monopolista, R_1 são os retornos por unidade de tempo para a firma líder, R_2 são os retornos por unidade de tempo para a firma seguidora, c_1 é o custo por unidade de tempo para a firma líder e c_2 são os custos por unidade de tempo para a firma seguidora. Os autores apontam que o custo por unidade de tempo é determinado por: $c_i = e^{-rt}$, o que significa que o custo é decrescente ao longo do tempo, dado que há o progresso tecnológico. Esta parte inicial do modelo implica que é possível existirem duas formas de inovação da firma seguidora, a drástica e a não-drástica. A inovação drástica ocorre quando $c_2 < 2c_1 - 1$. Já a inovação não-drástica ocorre quando $c_2 \geq 2c_1 - 1$. Essas desigualdades apontam que, sabendo que trata-se de uma inovação de processo, a firma seguidora é capaz de obrigar a firma líder a sair do mercado quando a sua redução de custos advinda da inovação é superior à redução de custos obtida pela firma líder. A inovação de produtos também é tratada no artigo em questão. Para este tipo de inovação assume-se que há um fator de qualidade, essa qualidade sendo determinada pelo período de tempo onde a inovação foi gerada. Com mais períodos de tempo significando maior qualidade, como em Dutta et al. (1993). Consequentemente, a maximização neste cenário envolve os tempos ótimos de cada firma para inovar. Com essa maximização sendo dada por:

$$R_M^* = \frac{1}{4}(t_1), \quad (5)$$

$$R_1^* = t_1 t_2 \frac{t_2 - t_1}{(4t_2 - t_1)^2}, \quad R_2^* = t_2^2 \frac{t_2 - t_1}{(4t_2 - t_1)^2}.$$

Assume-se que os consumidores optam pelo produto que satisfaça suas preferências, que são dadas por uma relação entre o preço e a qualidade do produto. Como explicado anteriormente, esses fatores dependem do tempo onde esta inovação foi lançada.

Os autores abordam a hipótese onde a curva L (forma funcional dos retornos da firma líder) possuiria apenas um ponto de máximo. Segundo Hoppe; Lehmann-Grube (2005), na abordagem da curva L com um ponto de máximo de Fudenberg; Tirole (1985), encontrar os equilíbrios é uma tarefa mais trivial. Encontra-se o período de tempo que maximiza os retornos da firma líder encontrando as condições de primeira ordem e observa-se se a curva L está acima ou abaixo da curva F (forma funcional dos retornos da firma seguidora). Estando acima, trata-se de um jogo de prevenção⁵ com equalização de lucros, estando abaixo trata-se de um jogo de espera⁶, com vantagem da firma seguidora. Segundo os autores, essa premissa dificilmente pode ser sustentada empiricamente. Para lidar com este problema, os autores sugerem uma curva L com mais de um ponto de máximo. Utiliza-se um algoritmo para descrever a natureza do jogo, se é um jogo de prevenção ou de espera. O algoritmo desenvolvido pelos autores pode ser utilizado em casos onde a curva L é descontínua. Duas condições são levantadas para que exista apenas um equilíbrio nos jogos, a curva L deve ser contínua e a curva F deve ser contínua e não crescente. A curva L não crescente implica em que o primeiro jogador possui uma desvantagem frente à firma rival, em jogos onde uma empresa busca entrar no mercado com o lançamento de uma inovação. Já se ambas as

⁵Jogo onde as firmas buscam realizar sua ação antes de seu rival.

⁶Jogo onde as firmas aguardam o movimento de seu rival para realizar sua ação.

firmas buscarem fazer um jogo de prevenção, a inovação será feita no mesmo período por ambas, havendo uma equalização de lucros⁷. Aborda-se também a possibilidade da curva L ser descontínua. Neste caso os autores afirmam que suas proposições se mantêm válidas para curvas L que possuam uma descontinuidade posterior ao período de tempo onde a curva F fica em um nível inferior à curva L. Ressalta-se no artigo que descontinuidades na curva L podem causar situações onde há múltiplos equilíbrios. Múltiplos equilíbrios ocorrem quando não há apenas uma estratégia ótima para os jogadores. Neste cenário, a firma líder, ao desenvolver a tecnologia primeiro, entra no mercado com um produto inferior ao de seu concorrente. Isso se deve ao fato de que a curva “F” é não crescente na escolha do líder, segundo os autores, essa premissa é crível e de fácil aceitação.

Um parâmetro importante para a compreensão do modelo proposto pelos autores é λ , que representa o custo com P&D de cada firma por unidade de tempo. Para inovações de processos, percebe-se que a função de retornos da firma seguidora (curva F) não possui apenas um pico. Isso implica em uma possível descontinuidade da curva L, como visto anteriormente. Os autores fazem a ressalva de que quando o ritmo de progresso tecnológico α é igual à taxa de preferência temporal r , as descontinuidades não ocorrem. O comportamento do parâmetro de custo λ demonstra que o jogo neste cenário é dado por um jogo de espera. Esse jogo de espera é caracterizado pela vantagem da firma seguidora, que aumenta monotonicamente com os custos de P&D. Em cenários onde os custos, representados por λ , são elevados, a firma seguidora se torna monopolista, após a firma líder desistir deste mercado. Esse aumento nas vantagens ocorrerem concomitantemente com o aumento dos custos de P&D se dão pois, neste cenário, a firma líder busca se prevenir da seguidora adotando a tecnologia em um período anterior. Como ressaltado anteriormente, tecnologias melhoram qualitativamente ao longo do tempo, logo, no caso descrito anteriormente a firma líder terá uma tecnologia de qualidade inferior. A firma seguidora, conseqüentemente, adota a tecnologia mais cedo que em outras condições, gastando menos em P&D. Esse gasto relativamente menor em pesquisa é somado aos lucros maiores de duopólio, o que ocorre devido à tecnologia da firma seguidora ser mais recente e melhor que a da firma líder. Segundo os autores, isso sugere que o aumento no custo de P&D é superado pelos efeitos indiretos que ocorrem no tempo de duração do monopólio da firma líder e pelos lucros da firma seguidora. Para inovações de produto, similarmente às inovações de processo, o jogo entre as firmas é de prevenção, para situações onde λ é baixo, assim os lucros são iguais para ambas as firmas. Essa situação ocorre dado que, neste caso, este jogo possui apenas um equilíbrio possível. Porém, se o parâmetro λ crescer, o jogo muda de natureza e se torna um jogo de espera, novamente com vantagens para a firma seguidora. Essas vantagens aumentam monotonicamente com os custos em P&D. Hoppe; Lehmann-Grube (2005) ressaltam que, no modelo proposto em seu artigo, um subsídio à pesquisa e ao desenvolvimento sempre acarreta em aumentos no bem estar. Percebe-se que o modelo de Hoppe; Lehmann-Grube (2005) aborda algumas hipóteses de Reinganum (1981), Fudenberg; Tirole (1985) e Dutta et al. (1993), essas hipóteses são alteradas com o intuito de fazer com que o modelo seja capaz de analisar de maneira mais eficiente o processo de tomada de decisão das firmas. A hipótese da curva “L” com múltiplos picos ou até mesmo uma curva “L” descontínua contrastam com as hipóteses levantadas em artigos anteriores.

2.2 Processo de difusão tecnológica

Esta seção tem como objetivo justificar, com base em estudos empíricos e teóricos, a modificação contida no modelo deste artigo. A modificação consiste em afirmar que a difusão tecnológica é acelerada pelo lançamento de inovações. Em certas partes da literatura, considera-se que o progresso tecnológico (ou os custos de se desenvolver uma inovação) são constantemente decrescentes ao longo do tempo. Apresentam-se aqui argumentos que sugerem que este processo de difusão pode ser mais dinâmico. Há de se ressaltar que esse dinamismo não é idêntico em todos os setores, apresentando mudanças em sua magnitude. Gallini (2002) e Schankerman (2018) afirmam que patentes robustas⁸ podem ser um incentivo à difusão tecnológica mais acelerada. Quando uma firma registra uma patente, ela deve explicitar qual é a natureza de sua inovação. A ocorrência de licenciamento tecnológico também é um fator que acelera a difusão tecnológica, sendo um processo onde uma firma permite o uso de uma de suas patentes por outras firmas, mediante o pagamento de uma taxa. Mesmo com as proteções conferidas contra a cópia por terceiros que não paguem pela licença, esses registros podem incentivar as concorrentes e mostrar qual o caminho que o processo de pesquisa deve seguir. Uma proteção forte a inovações também incentiva firmas a manterem um grande portfólio de patentes, de maneira a licenciar as tecnologias ou litigar judicialmente possíveis cópias. Percebe-se então, segundo a argumentação dos autores, que a geração de uma inovação serve como incentivo para a geração de mais inovações. Miller; Olleros (2007) apontam que o processo de inovar é, com frequência, representado de forma excessivamente rígida na literatura convencional. Segundo os autores, na realidade o processo é mais dinâmico. Há uma heterogeneidade na difusão tecnológica, certos mercados absorvem inovações de maneira mais eficiente que outros. Merges; Mattioli (2017) analisam a maneira com que a tecnologia é licenciada pelas firmas, fator fundamental para compreender o processo de difusão tecnológica. Segundo os autores, as

⁷Situação onde os retornos da firma líder são iguais aos da firma seguidora.

⁸Que conferem uma proteção mais completa à propriedade intelectual.

firmas, na tentativa de possuir maiores poderes de mercado, buscam patentear diversos componentes complementares que formam um produto. Desta maneira, é possível garantir uma integridade no produto e incentivar outras firmas a buscarem licenças da firma inovadora. Outra forma de difusão ocorre com a formação de um *pool* de patentes, onde empresas cruzam suas licenças de suas tecnologias com o objetivo de salvar recursos através da colaboração. Este tipo de ação pode acelerar consideravelmente a difusão tecnológica em um setor, pois poupa tempo e recursos das firmas. Considerando que esse tipo de ação é disseminada em diversos setores, não é absurdo considerar que o lançamento de uma inovação por uma firma pode acelerar o progresso tecnológico em todo um setor. Os autores ainda afirmam que, em certos casos, as firmas podem optar por compartilhar as suas patentes de forma gratuita. A motivação por trás desta ação (conhecida como *fair, reasonable, and non-discriminatory (FRAND)*) é que haja uma certa padronização dos produtos em um mercado, de maneira a não criar incentivos para uma "estagnação" causada por firmas que concentrassem certas tecnologias vitais. Esses acordos geralmente ocorrem quando todas as firmas no mercado são beneficiadas por essa modalidade. Para a firma que inova, o "ganho" em compartilhar sua tecnologia de forma gratuita é o de vender produtos ou serviços complementares a ela. Merges; Mattioli (2017) ainda ressaltam que nem sempre os consumidores serão beneficiados por estes processos de licenciamento, por muitas vezes as reduções de custos para as firmas não serão transferidas para os consumidores. Isso pode ocorrer devido a reduções de competitividade entre firmas, onde tecnologias que deveriam competir umas com as outras entram em um processo de colaboração, efetivamente elevando os preços finais para o consumidor. O artigo de Comino et al. (2018) aborda as estratégias das firmas na geração de propriedade intelectual. O artigo analisa, especificamente, o setor de tecnologia de comunicações. Segundo os autores, o papel do nível de proteção oferecido para patentes não é evidente, com diversas consequências e implicações para os mercados. Atualmente, em diversos setores, inovações ocorrem de forma rápida e sequencial (muitas vezes provenientes de desenvolvedores diferentes). Dada esta característica, a vantagem de ser o primeiro a desenvolver uma inovação já não é garantida. Sabendo de imperfeições nos sistemas de proteção e nas políticas de compartilhamento de informações entre as firmas, uma inovação prematura pode servir como base para uma inovação sequencial mais completa. Assumindo essa difusão tecnológica causada pelo desenvolvimento inicial, encontra-se um argumento para dar uma forma funcional não contínua para o desenvolvimento tecnológico. A possibilidade de ocorrência de imitações de inovações são um incentivo para o investimento em P&D. Isso ocorre, segundo os autores, pelo efeito de médio prazo desse fenômeno ser mais forte que o de curto prazo. O efeito de curto prazo é a diminuição dos lucros do inovador e o efeito de médio prazo é a ampliação do mercado, que ocorre após os consumidores terem acesso à inovação original e as imitações. Os autores concluem que, em certos setores, há um processo de cumulatividade da tecnologia, onde a geração de conhecimento acelera a geração de conhecimentos complementares. Nos modelos apresentados anteriormente, propunha-se um modelo de cumulatividade tecnológica linear e constante. Com base no que foi apresentado nesta seção este presente trabalho propõe um modelo que considere que a geração de uma inovação pode ter um caráter acelerador no ritmo de evolução do conhecimento.

Bessen; Maskin (2009) oferecem uma formulação teórica para mercados onde inovações são lançadas continuamente, mesmo sem proteções eficientes à propriedade intelectual. Os autores afirmam que as indústrias de software, computadores e semicondutores possuem altas taxas de imitação e proteção ineficiente via patente, mas, são altamente dinâmicas. Segundo a teoria convencional, em um mercado onde as inovações são facilmente apropriadas por terceiros, o incentivo para inovar tende a diminuir. Fortalecendo as hipóteses dos autores houve, nas décadas de 1980 e 1990, diversas decisões judiciais que fortaleceram as patentes de empresas dos setores citados anteriormente. Segundo os autores, esse fortalecimento se traduziu em menores gastos com P&D das firmas atuantes nestes mercados. A hipótese levantada para explicar esse comportamento é de que as inovações podem ocorrer de forma sequencial e complementar. Nestes casos, o lançamento de uma nova tecnologia serve como um fator de incentivo ou de facilitação para que firmas rivais ofertem novos produtos. Ressalta-se ainda que imitações de produtos podem ser socialmente desejáveis, dado que as imitações podem ampliar o mercado em questão, ou, incentivar outras inovações sequenciais. Destas situações, percebe-se que uma inovação em um setor com proteções imperfeitas à propriedade intelectual pode ser um fator acelerador para o desenvolvimento tecnológico. No caso de patentes rígidas, percebe-se que a falta de difusão tecnológica pode limitar o escopo do mercado, bem como oferecer menores oportunidades para o desenvolvimento tecnológico das firmas rivais. O modelo proposto por Bessen; Maskin (2009) utiliza probabilidades para a realização de uma inovação em diferentes circunstâncias. Neste modelo, o gasto em P&D incorre em uma probabilidade de se ter sucesso na inovação. Assume-se que a quantidade de recursos gasta com P&D é uma informação privada da firma, com a outra não tendo conhecimento. É também possível que as firmas tenham comportamentos distintos, mesmo sendo simétricas em termos de porte. Os autores concentram suas análises na situação onde a firma chamada de "1" é agressiva e a firma "2" é passiva. Para este equilíbrio, tem-se que, sem a proteção conferida pelas patentes, não é viável para a firma 1 investir em P&D. Já com a existência de patentes, não somente a firma 1 passa a investir em P&D, como a outra firma no mercado também passa a ter incentivos para se mobilizar pela inovação. Isso demonstra que há um efeito indireto das patentes nos mercados, onde a existência de direitos para o inovador servem de incentivo para diversas firmas buscarem possuir patentes. Outra formulação alternativa presente em Bessen; Maskin (2009) lida com a existência de inovações sequenciais, onde uma inovação pode ser melhorada por outra

feita em sequência. Neste cenário, há a existência de complementariedade entre as firmas, onde uma pode utilizar produtos ou processos desenvolvidos pela outra, com o intuito de melhorá-los e comercializá-los. Para este tipo de mercado, não é realista supor que toda a informação referente a uma inovação fica completamente retida ou disponibilizada para as firmas deste setor. Os autores argumentam que é mais natural supor que parte das informações se tornam públicas, com esse grau de abertura, dependendo das características do mercado. O modelo exposto por Bessen; Maskin (2009) é composto por um duopólio, onde uma inovação serve de incentivo para as próximas. Mantém-se a proposição de que se uma das firmas é mais agressiva e a outra será mais passiva. No caso de inovações complementares e sequenciais, percebe-se que há uma tendência das firmas manterem seus investimentos em P&D mesmo que a proteção conferida pela patente seja imperfeita ou inexistente. Isso ocorre dado que esses mercados se tornam mais dinâmicos com as inovações de uma firma servirem de base para o desenvolvimento das inovações das firmas rivais.

Conclui-se em Bessen; Maskin (2009) que a mudança de leis de proteção de patentes pode ter efeitos indesejáveis em certos setores. Isso ocorre dado que o mecanismo de incentivo para as firmas é heterogêneo e dependente de diversas variáveis, a imitação de firmas rivais pode oferecer oportunidades para a expansão do mercado e gerar novos produtos. Segundo Bessen; Maskin (2009) os modelos teóricos anteriores não captavam corretamente essas dicotomias entre incentivos e proteções em certos mercados. Esse problema é resolvido pela modelagem de Bessen; Maskin (2009). Ainda ressalta-se que a moderação é importante na formulação de leis de propriedade intelectual. Leis muito restritivas podem estagnar o desenvolvimento tecnológico em certos mercados e leis muito permissivas podem anular os ganhos que a firma tem com a inovação. Uma abordagem moderada e que seja capaz de se adaptar a setores diferentes é mais capaz de gerar resultados socialmente eficientes. Este presente ensaio não faz uso da mesma abordagem que Bessen; Maskin (2009), mas utiliza os preceitos teóricos defendidos pelos autores. Para tentar tornar um modelo de jogos de tempo mais realista é necessário considerar que a inovação pode ter um papel de elemento catalisador de desenvolvimento tecnológico. A maneira que esse efeito catalisador será representado é baseado em estudos teóricos e empíricos, como os citados anteriormente.

3 Modelo de lucros para empresas em oligopólio.

O modelo proposto neste artigo é uma adaptação de Hoppe; Lehmann-Grube (2005), por consequência, certos pressupostos da modelagem matemática do presente modelo serão condizentes com o que foi assumido pelos autores citados anteriormente. Estes pressupostos são desenvolvidos e provados em Hoppe; Lehmann-Grube (2005).

3.1 Considerações sobre o parâmetro α

Assume-se que α é uma função degrau⁹, ou seja, ela apenas assume um valor diferente de zero à partir de certo ponto no tempo. Anteriormente a esse período específico, considera-se que $\alpha = 0$. Como discutido anteriormente, esse incremento na taxa de progresso tecnológico ocorrerá após a firma líder lançar sua inovação no mercado. Como em Comino et al. (2018) e Bessen; Maskin (2009) as firmas pertencentes a um setor são beneficiadas pelas inovações da firma líder, assumindo que a proteção à propriedade intelectual é imperfeita. Em um caso onde a proteção é perfeita, assume-se que $\alpha = 0$ mesmo após t_L . Ao assumir que a proteção é perfeita o modelo contido neste artigo é o mesmo de Hoppe; Lehmann-Grube (2005).

$$\alpha(t) = \alpha H(t - t_L) \tag{6}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha = 0 & \text{se } t < t_L \\ \alpha > 0 & \text{se } t \geq t_L \end{cases}$$

A Figura 1 é uma representação gráfica do comportamento da função α ao longo do tempo. Observa-se que no período escolhido pela firma L para inovar, α deixa de ser equivalente a 0 e passa a assumir um valor constante até o fim dos períodos analisados. O motivo teórico para esse valor de α ser representado por uma constante é que cada setor possui particularidades próprias, como exposto adiante. Existem diversas maneiras de se proteger propriedade intelectual, a mais conhecida entre elas é a patente. Patentes são direitos que o inventor possui sobre sua criação, geralmente sujeito a um regime de leis e regras específicas. A patente permite que outros utilizem a tecnologia caso ela seja licenciada. O licenciamento ocorre através de uma permissão, emitida pelo inventor, para que outros agentes utilizem a inovação, em troca de alguma taxa de uso, conhecida como *royalties*. Patentes devem possuir, na maioria das legislações, algumas características, como ser uma novidade, ser útil e ser não-óbvia. Schankerman; Schuett (2018) apresentam um modelo para verificar a qualidade de uma patente, bem como os mecanismos de incentivo para firmas decidirem a qualidade de sua inovação. Uma patente pode ser contestada pelos rivais do inovador, essa contestação ocorrendo judicialmente. A maneira como as regras para concessão de patentes, assim como o nível de exigência para a validade de uma inovação,

⁹Função que pode ser escrita como uma combinação linear infinita de funções características de intervalos.

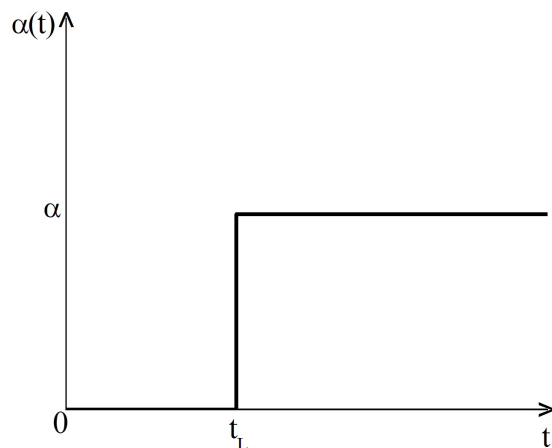


Figura 1: Valores assumidos por α no tempo. Elaboração própria.

afetam as decisões das firmas. A qualidade dos tribunais também pode afetar o comportamento no mercado de inovações, tribunais imperfeitos podem conceder direitos para quem não os mereceria em condições normais, bem como prejudicar inovações válidas ao validar contestações indevidas. Todas as situações e mecanismos descritos anteriormente podem afetar o parâmetro denominado como α . Outra maneira de se proteger a propriedade intelectual é o segredo industrial. Esta maneira de proteção é radicalmente diferente do regime de patentes. No regime de segredo industrial, o inventor não é obrigado a revelar os componentes e processos de sua inovação. A "fraqueza" do regime de segredo industrial é de que o inventor não é protegido de engenharia reversa, assim, se um concorrente duplicar com sucesso a inovação, poderá usá-la sem limitações. Uma firma racional escolherá o regime de proteção mais adequado para sua inovação, inovações relativamente simples tenderão a ser protegidas por patentes. Se uma inovação não for de difícil reprodução, é mais fácil para os concorrentes do inovador duplicarem esta inovação, conseqüentemente, o regime de patentes é mais sólido neste caso. Já se a inovação é de grande complexidade e de difícil duplicação, a firma pode optar por tê-la como segredo industrial, considerando que seus rivais teriam dificuldades e incorreriam em grandes custos para replicá-la. Soma-se a isso a não obrigatoriedade de revelação da composição da inovação. Caso existam imperfeições em tribunais ou escritórios de patentes, uma firma pode ser prejudicada e ainda ter revelado os componentes de sua inovação para suas rivais, mesmo com direito teórico a ser protegida. Em casos específicos, as inovações podem ser um bem público, geralmente quando há um grande interesse social e político na distribuição desta tecnologia. Por exemplo, algumas vacinas e medicações são inventadas fora de uma lógica competitiva e distribuídas sem a necessidade de se pagar direitos ao inovador. Isso ocorre especialmente quando desenvolvidas por instituições de ensino superior, ou incentivadas por governos que busquem realizar políticas públicas de saúde. Um caso célebre do que foi descrito anteriormente é a vacina da pólio, desenvolvida por Jonas Salk em 1955. Salk não patenteou sua descoberta, permitindo o uso indiscriminado de sua inovação e colaborando para a erradicação da pólio no mundo. Os três casos citados anteriormente representam parâmetros α diferentes. Quanto mais eficiente a proteção à propriedade intelectual é, menor o valor real de α tende a ser. No caso de um bem público o valor de α seria extremamente elevado, dado que o custo para se desenvolver a inovação após ela ter sido feita seria reduzido drasticamente. Considerar que o progresso tecnológico se dá de maneira constante ao longo do tempo é uma simplificação bastante útil para modelos econômicos. Porém, para certos casos, é interessante assumir que é possível que ocorram descontinuidades neste processo. Em mercados mais dinâmicos, onde a proteção à propriedade intelectual é mais complexa, ser o primeiro desenvolvedor de uma tecnologia pode gerar efeitos dicotômicos. Por um lado, a firma terá ganhos de monopólio no período que antecede a inovação das firmas rivais. Por outro, abre-se a brecha para que as firmas rivais copiem e ainda melhorem o produto ou processo criados pelo inovador. Soma-se a isso uma redução de custos ainda maior ao longo do tempo, dada pela natureza do processo de difusão tecnológica.

3.2 Definição das funções de lucro

No modelo proposto neste artigo, assume-se um mercado com duas firmas "L" e "F", sendo "L" líder e "F" seguidora. Durante qualquer tempo " t " a firma pode optar por tomar a decisão de lançar uma inovação, com $t \in R^+$. Considerando-se que a firma líder terá lucros de monopólio com a inovação até o momento no qual a firma seguidora desenvolva o

mesmo produto, após a firma seguidora desenvolver a inovação, as firmas dividem o mercado igualmente. Se as firmas inovarem simultaneamente, elas dividem igualmente o mercado (equalização de lucros). As firmas possuem dois tipos de receita, uma receita independente de inovações e uma receita proveniente do produto desenvolvido. Analogamente, as firmas possuem dois custos, um custo independente da inovação e um custo para inovar. O custo para inovar, assumindo o que Dutta et al. (1993) e Hoppe; Lehmann-Grubbe (2005) afirmam, é decrescente ao longo do tempo, dado que há concomitantemente um progresso tecnológico. O modelo aqui apresentado assumirá ainda que a difusão tecnológica é acelerada após o desenvolvimento de uma inovação. Isso ocorre por dois motivos. O primeiro é que a proteção conferida ao desenvolvedor da inovação tem para ela é imperfeita, como em Comino et al. (2018). O segundo é que as firmas podem ter incentivos para compartilhar informações entre si, [?]. As receitas provenientes da inovação serão depreciadas ao longo do tempo, essa hipótese é assumida por Hoppe; Lehmann-Grubbe (2005). Os lucros das firmas são representados pelas funções 7 e 8:

$$\pi_L(t_L, t_F) = \int_{t_L}^{t_F} e^{-rt} R_M(t_L, t_F) + \int_{t_L}^{\infty} e^{-rt} R_L(t_L, t_F) dt - \int_{t_0}^{t_L} e^{-rt} C(t) dt \quad (7)$$

$$\pi_F(t_L, t_F) = \int_{t_F}^{\infty} e^{-rt} R_F(t_L, t_F) dt - \int_{t_0}^{t_F} e^{-[r+\alpha]t} C(t) dt \quad (8)$$

Onde: R_L é a receita da firma L após a firma F lançar sua inovação, R_F é a receita da firma F , t_L é o tempo onde a firma L inova, t_F é o tempo onde a firma F inova, R_M é a receita de monopólio que a firma L possui antes de t_F , $C(t)$ é o custo de desenvolvimento da inovação, r é uma taxa constante de progresso tecnológico no tempo t e α é uma taxa de difusão tecnológica que ocorre após a inovação ser lançada pela firma L . Assume-se que $r > 0$, $\alpha \geq 0$ e $t_0 \leq t_L \leq t_F < \infty$. A inversa da demanda é dada por $p = 1 - q$ e os custos por período de tempo são representados por $C_i(t) = e^{-r(t)}$ para a firma líder, de maneira idêntica ao modelo de Hoppe; Lehmann-Grubbe (2005). A mudança se dá no custo da firma seguidora, definido por $C_i(t) = e^{-r(t)+\alpha(t)}$. No caso da proteção à propriedade intelectual ser perfeita, $\alpha = 0$ e o modelo deste presente artigo se torna igual em sua lógica ao de Hoppe; Lehmann-Grube (2005).

Este modelo é uma adaptação do que é proposto por Hoppe; Lehmann-Grube (2005). A principal diferença é que há uma difusão tecnológica pós-lançamento da inovação que acelera o progresso tecnológico. Esta modificação oferece uma maneira de representar, de forma alternativa, como a tecnologia se difunde nos mercados. Como visto em Comino et al. (2018), quando uma tecnologia entra no mercado, ela gradativamente passa a ser incorporada pelos agentes. A questão torna-se determinar com que velocidade ela é difundida e o quanto isso impacta no custo de desenvolvimento das firmas seguidoras. Neste modelo, o que determinará qual firma tem vantagens é a taxa α (quando as firmas forem de tamanhos iguais), logo, a vantagem será decidida pelo nível de difusão da inovação no mercado. Esse nível de difusão dependerá do grau de proteção conferido pela patente, dos incentivos para as firmas compartilharem informações entre si e se o lançamento de inovações em sequência aumenta o tamanho do mercado, como em Bessen; Maskin (2009).

3.3 Solução para o jogo de tempo

A questão central do modelo apresentado nesta seção é o parâmetro α e a maneira que ele afeta o modelo original de Hoppe; Lehmann-Grube (2005). Para se obter os efeitos da inclusão do parâmetro α aplicam-se os limites de integração na equação (8) para o período imediatamente anterior a t_L e ao período seguinte. Chega-se assim nas premissas onde se tem uma descontinuidade na função F . As operações que levam a essa definição da descontinuidade estão contidas no apêndice A. A curva da firma seguidora é decrescente por partes e esse decrescimento se dá de forma monotônica, analogamente a Hoppe; Lehmann-Grube (2005).

$$\Delta_\alpha = C \left[\frac{e^{-[r+\alpha]t_L} - e^{-[r+\alpha]t_F}}{[r+\alpha]} \right] \quad (9)$$

Onde: Δ_α é a magnitude da descontinuidade. Neste caso, assume-se que a firma seguidora chega a um nível de lucros superior ao da firma L , mediante as condições estabelecidas, por Hoppe; Lehmann-Grube (2005) para o equilíbrio neste jogo. Essas premissas não são violadas pela alteração realizada no presente artigo. Essas condições são dados por:

$$T_L := \min \{ \tau : L(t_L^*(\tau)) \geq F(\tau) \}$$

$$t_L^*(\tau) := \max \{ t^* : t^* = \arg \max_{[0, \tau]} L(x) \}$$

À partir destas condições chega-se ao lema proposto e provado por Hoppe; Lehmann-Grube (2005). Esse lema apresenta as condições onde há um equilíbrio único em T_L :

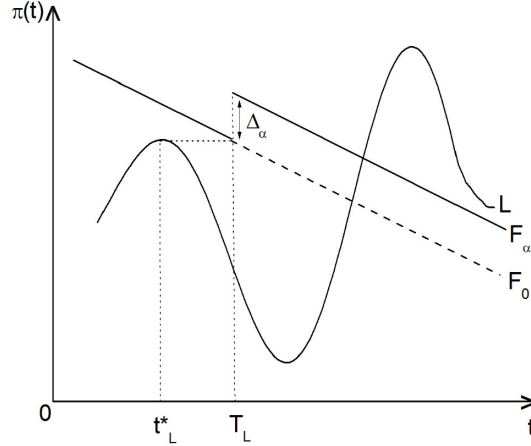


Figura 2: Lucros das firmas em função do tempo. Elaboração própria.

1. Assume-se que há uma função melhor resposta $\mathfrak{R}(t)$
2. Existe algum ponto $t' \in (0, \infty)$ tal qual $F(0) > L(0) \geq 0$ e $F(t') \leq 0$

Então há apenas um equilíbrio em T_L .

Assim, a mudança proposta neste presente artigo não viola as premissas requeridas pelos autores para um equilíbrio único no jogo. As condições que regem a descontinuidade da curva F presente na Figura 2 são dadas por:

$$L(t_L) < F(t_L^-) < F(t_L^+) = F(t_L^-) + \Delta_\alpha \quad (10)$$

A diferença do modelo representado pela Figura 2 consiste na área existente entre as curvas F_α e F_0 . Com F_α sendo a curva para quando $\alpha > 0$ e F_0 para quando $\alpha = 0$, no segundo caso o modelo é idêntico ao caso oferecido por Hoppe; Lehmann-Grube (2005). A área entre estas duas curvas representa o ganho que a aceleração na difusão tecnológica, representada por α , causa no lucro da firma seguidora. Ressalta-se que esta aceleração na difusão tecnológica é exógena ao modelo, sendo dependente de fatores jurídicos e da natureza da inovação. Essa exogeneidade do parâmetro α implica que nenhuma ação das firmas participantes do jogo é capaz de causar uma alteração neste parâmetro. Dado que as firmas não podem alterar fatores exógenos, a estratégia de maximização da firma L será a mesma do modelo original de Hoppe; Lehmann-Grube (2005), inovando em T_L , quando o valor máximo que sua forma funcional assumiu até esse período se iguala ao valor da curva F. Já a firma F passará a inovar no período seguinte ao período onde a firma L inovou (T_{L+1}), de maneira a se aproveitar da descontinuidade causada pela aceleração na difusão tecnológica. Observa-se que neste caso a firma seguidora pode ter um incremento substancial em seus retornos, sendo este ganho dependente da magnitude de Δ_α . Assume-se que ambas as firmas tem ciência da incidência do parâmetro α sobre o modelo.

4 Aplicações

Uma característica interessante do modelo apresentado neste trabalho é criar a oportunidade para um artigo empírico que estime um valor de α . Há uma literatura de estimação de difusão tecnológica já existente, onde se apresentam maneiras para estimar os parâmetros r e α citados acima. Em Bloom et al. (2002) estima-se a difusão tecnológica, chamada de produtividade total de fatores (acrônimo em inglês, TFP), em um contexto macroeconômico, mas percebe-se que esta difusão ocorre de maneira desigual, variando entre países distintas. A análise desses autores poderia ser modificada para analisar setores específicos da economia, de maneira a captar as disparidades de diferentes mercados. Comin; Hobijn (2010) analisam a difusão tecnológica com dados de 15 inovações e sua respectiva adoção em 166 países nos últimos dois séculos. Os autores afirmam que há uma grande heterogeneidade entre os países observados, com alguns demorando consideravelmente mais que outros para adotar certas inovações. Uma informação relevante extraída em Comin; Hobijn (2010) é de que há uma aceleração no ritmo de adoção de inovações que ocorre globalmente, em parte reforçando a

hipótese de que o progresso tecnológico é acelerado pelo lançamento de mais inovações. Os autores utilizam as diferenças dos *lags* de adoção de inovações como estimativa para a difusão tecnológica, bem como as diferenças nas taxas de TFP e as diferenças de preços relativos de bens de investimento. O período analisado neste estudo é de 1820 até 2003. Os autores encontram que os *lags* entre a inovação e sua adoção são o coeficiente mais significativo em seu modelo. Esse hiato entre os estágios de desenvolvimento tecnológico permitem encontrar a relação entre este com a produtividade do capital associado à tecnologia. Encontram-se três resultados importantes: os *lags* de adoção são grandes, 45 anos, e com um desvio padrão de 39 anos; os crescimentos de países como o Japão e os tigres asiáticos coincidem com reduções abruptas e de grande escala no *lag* tecnológico; as diferenças de renda *per capita* são explicadas em um quarto de sua magnitude pelo atraso tecnológico. Comin; Hobijn (2010) concluem afirmando que em estudos posteriores seria importante mensurar como fatores institucionais e políticos. Na formulação do presente artigo verifica-se que a literatura, por diversas vezes, aponta a difusão tecnológica como um fator exógeno, dado que as leis de patentes e segredos industriais, ou propriedade intelectual no geral, não são estritamente consequência do sistema econômico.

Young (1993) realiza uma comparação entre nove formas distintas de se representar curvas de tecnologia, em outras palavras, a maneira com que se dá o progresso tecnológico. A conclusão desse autor é de que a representação do progresso tecnológico como uma taxa é uma das maneiras mais eficientes de representação, quando comparada com uma feita em termos absolutos ou cumulativos. Essa afirmação é robusta para uma análise tanto em curto quanto em longo prazo. O trabalho de Young (1993) tem como objetivo mostrar qual é a maneira mais eficiente de se realizar previsões para o desenvolvimento tecnológico. No modelo apresentado na seção 3 deste trabalho, assim como em suas principais referências, Fudenberg; Tirole (1985) e Hoppe; Lehmann-Grubbe (2005), o progresso tecnológico é representado por taxas. Considerando o que é exposto por Young (1993), é possível assumir que as estimações realizadas em trabalhos aplicados tendem a ser robustas, quando são usados os modelos anteriormente citados.

O estudo aplicado feito por Denny et al. (1981) é direcionado a um setor interessante para a discussão contida neste presente trabalho, o setor de telecomunicações. Dado que o setor de telecomunicações é apresentado na literatura como um mercado onde inovações sequenciais ocorrem. O trabalho de Bessen; Maskin (2009), utilizado como uma das justificativas para a criação do parâmetro α , cita o setor de telecomunicações como um setor que se beneficia de inovações sequenciais, onde o lançamento de algo novo facilita desenvolvimentos subsequentes. Denny et al. (1981) analisam um período entre 1952 e 1976 buscando encontrar os efeitos de redução de custos advindos da difusão tecnológica no setor de telecomunicações. Utilizando uma função de custo econométrico de várias saídas, estima-se o quanto da redução de custos das firmas são explicados por este processo de difusão. Utiliza-se no modelo indicadores de avanço tecnológico, em contraste com o que era mais usual na literatura, que era a simples passagem do tempo. Denny et al. (1981) desenvolvem e implementam um processo onde mudanças nas estruturas de custos podem ser realocadas para mudanças de preço, de escala ou de técnicas. Com o intuito de verificar quais destes fatores foram alterados pelas inovações que ocorreram neste setor, os autores obtiveram dois resultados significativos em seus modelos. As inovações que mais contribuíram para a redução nos custos foram: a acessibilidade de equipamento de discagem à distância para os consumidores e a quantidade de consumidores com acesso a equipamentos de comutação modernos. Esses dois fatores são, em parte, explicados pelo ritmo de difusão tecnológica. Quanto maior a difusão de uma inovação, neste caso, mais a empresa reduzia seus custos, o que é coerente com as hipóteses sugeridas por Comino et al. (2018) e Bessen; Maskin (2009). Ressalta-se que o trabalho de Denny et al. foi realizado com a base de dados de apenas uma firma, a Bell Canada. Estes autores afirmam que se a base de dados de firmas com porte comparável à Bell Canada estivessem disponíveis, os resultados poderiam ser ainda mais significativos.

5 Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se uma modelagem alternativa de difusão tecnológica em jogos de tempo. Dado o que foi exposto na seção 3 deste trabalho sugere-se que trabalhos empíricos busquem estimar a magnitude do parâmetro α para os setores alvos do estudo. Essa estimativa poderia ser empregada observando os *lags* da adoção de novas tecnologias, como em Bloom et al.(2002), e a relação destes *lags* com os registros de patentes ao longo do período analisado. Seguindo o que é proposto por Bessen; Maskin (2009) a geração de patentes em certos setores deve reduzir os *lags* observados. A utilização do modelo teórico aqui desenvolvido pode auxiliar na precisão das estimativas. Essa maior precisão deve ser conferida por não se considerar o progresso tecnológico como uma taxa constante, e sim, uma taxa sujeita a mudanças. Ainda que o parâmetro α possua valor 0 ou próximo de 0 o modelo deste artigo ainda é funcional.

Ressalta-se que o modelo apresentado neste trabalho não violou as condições estabelecidas por Hoppe; Lehmann-Grube (2005), como demonstrado na seção 3.3. O resultado central do que foi desenvolvido é o ganho que a firma seguidora, identificada como F , teve associado ao parâmetro α . Esse aumento nos retornos ocorre de forma continuada a partir de t_L , dado que a elevação na curva F é permanente após esse ponto. Em ambientes onde há uma maior facilidade para a tecnologia se difundir, é esperado que firmas seguidoras possuam facilidades para o desenvolvimento de novas tecnologias.

O papel da rigidez da proteção intelectual é um tema controverso na literatura de organização industrial, especialmente sobre o funcionamento do mecanismo de incentivos das patentes. Para Gallini (2002) e Schankerman (2018) patentes mais rígidas podem servir de incentivo para que uma firma invista em P&D, dado que essa proteção oferece maior previsibilidade para o retorno do investimento. Ressalta-se que patentes que conferem uma maior proteção à propriedade intelectual podem, em certos casos, retirar o incentivo de firmas rivais em desenvolverem suas próprias criações. Isso ocorreria quando o mercado se torna dominado pela firma líder ou quando essa proteção mais forte bloqueia inovações sequenciais, como relatado em Comino et al. (2018) e Bessen; Maskin (2009). Já quando há uma maior flexibilidade e incerteza sobre os direitos à propriedade intelectual, pode ocorrer uma competição mais acirrada entre as firmas e um investimento em P&D mais elevado que no caso de patentes mais rígidas. Destaca-se que no modelo aqui desenvolvido, quando α tende a 0, é recuperado de maneira exata o modelo proposto por Hoppe; Lehmann-Grube (2005). Esta generalização do modelo introduz uma variável exógena importante, que não foi tomada em conta pela literatura apresentada na seção 2.

REFERÊNCIAS

- BELLEFLAMME, P.; PEITZ, M. *Industrial Organization: Markets and Strategies*. Cambridge. Cambridge University Press. 2010.
- BESSEN, J. and MASKIN, E. Sequential Innovation, Patents, and Imitation. *RAND Journal of Economics* v. 40, n. 4, p. 611–635, 2009.
- BLOOM, D.; CANNING, D.; SEVILLA, J. Technological Diffusion, Conditional Convergence and Economic Growth. NBER Working Paper. n. 8713. 2002.
- COMIN, D.; HOBLIN, B. An Exploration of Technology Diffusion. *American Economic Review*. v. 100. n. December. p. 2031-2059. 2010.
- COMINO, S.; MANENTI, F. M.; THUMM, N. The Role of Patents in Information and Communication Technologies: A Survey of the Literature. *Journal of Economic Surveys*. v. 00. n. 0, p. 1-27. 2018.
- DENNY, M.; FUSS, M.; EVERSON, C.; WAVERMAN, L. Estimating the Effects of Diffusion of Technological Innovations in Telecommunications: The Production Structure of Bell Canada. *The Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'Economie*, v. 14, n. 1. p. 24-43. 1981.
- DUTTA, P. K.; LACH, S.; RUSTICHINI, A. Better Late Than Early: Vertical Differentiation in the Adoption of a New Technology. 1993.
- DUTTA, P. K.; RUSTICHINI, A. A Theory of Stopping Time Games With Applications to Product Innovations and Asset Sales. *Economic Theory*, v. 3, p. 743-763. 1993.
- FUDENBERG, D.; TIROLE, J. Preemption and Rent Equalization in the Adoption of New Technology. *The Review of Economic Studies*, v. 52, n. 3, p. 383–401, 1985.
- GALLINI, N. T. The Economics of Patents: Lessons From Recent U.S. Patent Reform. *Journal of Economic Perspectives*; v.16, n. 2, p. 131-154. 2002
- HOLDEN, S, RIIS, C. Organization Entry Into a New Market: A Game of Timing. *International Journal of Industrial Organization*, v. 12, p. 549-568. 1994.
- HOPPE, H. C.; LEHMANN-GRUBE, U. Innovation Timing Games: A General Framework with Applications. *Journal of Economic Theory*, v. 121, p. 30-50, 2005.
- LONG, N. VAN. *A Survey of Dynamic Games in Economics*. Singapore. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2010.
- MERGES, R. MATTIOLI, M. Measuring the Costs and Benefits of Patent Pools. *Ohio State Law Journal*, v. 78, n. 2, p. 281-347. 2017.
- MILLER, R; OLLEROS, X. The Dynamics of Games of Innovation. *International Journal of Innovation Management*, v. 11, n. 1 pp. 37–64. 2007.
- REINGANUM, J. F. Games of Innovation. *Journal of Economic Theory*, v. 41, n. 25, p. 20-41, 1981.
- SCHANKERMAN, M.; SCHUETT, F. Screening for Patent Quality. *International Industrial Organization Conference*. p.1–65, 2018.
- TIROLE, J. *The Theory of Industrial Organization*. London. The MIT Press. 1988.
- YOUNG, P. Technological Growth Curves: A Competition of Forecasting Models. *Technological Forecasting and Social Change*. v. 44. p. 375-389. 1993.

APÊNDICES

A aplicação das equações 7 e 8 é feita neste apêndice, Divide-se o custo em dois períodos distintos, o primeiro de t_0, t_L e o segundo de t_L, t_F . Essa divisão tem o intuito de facilitar a análise do parâmetro α .

$$\pi_L(t_L, t_F) = A \quad (11)$$

$$\pi_F(t_L, t_F) = B - \int_{t_0}^{t_L} e^{-rt} C dt - \int_{t_L}^{t_F} e^{-[r+\alpha]t} C dt \quad (12)$$

Após separar os custos em duas partes definidas anteriormente, aplica-se nos limites (t_0, t_L, t_F) :

$$\pi_F(t_L, t_F) = B - [C \frac{e^{-rt}}{-r}]_0^{t_L} - [C \frac{e^{-[r+\alpha]t}}{-(r+\alpha)}]_{t_L}^{t_F} \quad (13)$$

$$\pi_F(t_L, t_F) = B - [-\frac{C}{r} + \frac{Ce^{-rt_L}}{r}] - [\frac{Ce^{-[r+\alpha]t_L}}{(r+\alpha)} - \frac{Ce^{-[r+\alpha]t_F}}{(r+\alpha)}] \quad (14)$$

$$\pi_F(t_L, t_F) = B - \frac{C}{r} + (\frac{C}{r})e^{-rt_L} - (\frac{C}{r+\alpha})e^{-rt_L}e^{-\alpha t_L} + (\frac{C}{r+\alpha})e^{-rt_L}e^{-\alpha t_L} \quad (15)$$

$$\pi_F(t_L, t_F) = B - \frac{C}{r} + (\frac{C}{r})e^{-rt_L} [1 - \frac{e^{-\alpha t_L}}{1 + \frac{\alpha}{r}}] + (\frac{C}{r+\alpha})e^{-rt_L}e^{-\alpha t_L} \quad (16)$$

Assume-se que, nesta análise, $t = t_L$:

$$\pi_L(t_L, t_F) = L(t_L) \text{ e } \pi_F(t_L, t_F) = F(t_L) \quad (17)$$

Para fins de simplificação assume-se que há duas funções de $F(t_L)$, uma delas imediatamente anterior ao lançamento da inovação, dada por $F(t_L^-)$ e outra imediatamente após a inovação, dada por $F(t_L^+)$. As equações 18 e 19 oferecem, respectivamente, o limite inferior e superior da descontinuidade da curva F . Através destes pontos constrói-se a Figura 2 contida na seção 3.3.

$$F(t_L^-) = B - (\frac{C}{r})(e^{rt_L} - 1) \quad (18)$$

$$F(t_L^+) = F(t_L^-) + (\frac{C}{\alpha+r})(e^{-[rt_L+\alpha]}e^{-[rt_F+\alpha]}) = F(t_L^-) + \Delta_\alpha \quad (19)$$