

Séries Temporais Incompletas: uma aproximação Bayesiana usando Sistemas Dinâmicos com INLA aplicados ao Preço de Pescado

Carlos Edgar Prill Dullius¹

Paul Gerhard Kinas²

Patrícia Raggi Abdallah³

Resumo

O objetivo do estudo é o ajuste de modelos dinâmicos estocásticos a séries temporais com dados ausentes que, por esta característica, não permitem o ajuste por modelos frequentistas convencionais. Foi usada uma análise *Bayesiana* em que as distribuições posteriores marginais das estimativas foram obtidas com o método de aproximação de Laplace integradas e aninhadas (Integrated Nested Laplace Approximation - **INLA**). Selecionou-se o melhor modelo a partir do Critério de Informação da Deviância (Deviance Information Criterium - **DIC**). Como estudo de caso foi utilizada uma série temporal da evolução mensal do preço de varejo do Bagre no município de Rio Grande, ao longo de 11 anos (2006 a 2016). Esta série, contendo 22% dos meses sem informação (dados ausentes), foi disponibilizada pela Unidade de Pesquisa em Economia Costeira e Marinha do Instituto de Ciências Econômicas Administrativas e Contábeis, da Universidade Federal do Rio Grande. O melhor modelo selecionado via **DIC** foi o modelo de Markov Oculto (Hidden Markov Model - **HMM**) de ordem 3, **HMM(3)**. A série latente de preços foi ajustada a partir deste modelo, fornecendo estimativas intervalares de preço com os respectivos intervalos de credibilidade de 95% para todos os meses do período analisado.

Palavras-chaves: INLA, Modelo Dinâmico, Séries Temporais, Análise Bayesiana, Dados Ausentes.

Abstract

The article aims to fit a dynamic stochastics model to a time series containing missing data, that for this reason, does not allow a fit by classic models. It was used a *Bayesiana* approach, in which the Posteriors marginal distributions were estimated by Integrated Nested Laplace Approximation - **INLA**. The best fit model was selected by the Deviance Information Criterium - **DIC**. As a case study we used a time series of monthly evolutions of retail price of catfish in the municipality of Rio Grande, throughout 11 years (2006 to 2016). This time series containing 22% missing data, was available on Unidade de Pesquisa em Economia Costeira e Marinha do Instituto de Ciências Econômicas Administrativas e Contábeis, da Universidade Federal do Rio Grande. The best fit model selected by **DIC** was the Hidden Markov Model - **HMM**) of order 3, **HMM(3)**. The latent series was adjusted by this model, providing an interval estimation of price with credibility of 95% to all analysed months.

Keywords: INLA, Dynamic Model, Missing Data, Time Series, Bayesian Analysis.

Área 8: Econometria

JEL Classification: C11, C13, C80, C87, Q22.

Suporte: AUXPE 3166, Edital 55-2013/Pró-Integração/CAPES/MI.

¹Pesquisador Associado à Unidade de Pesquisa em Economia Costeira e Marinha - **UPEC-Mar** e ao Laboratório de Estatística Ambiental - **LEA**.

²Diretor do Laboratório de Estatística Ambiental - **LEA** do Instituto de Matemática, Estatística e Física - **IMEF**, Coordenador do Projeto de Estatística de Desembarque Pesqueiro

³Diretora do Instituto de Ciências Econômicas, Administrativas e Contábeis (**ICEAC**) da Universidade Federal do Rio Grande; e Coordenadora da Unidade de Pesquisa em Economia Costeira e Marinha (**UPEC-Mar**).

1 Introdução

A atividade da pesca no Brasil é um dos setores produtivos mais antigos da economia, e na literatura econômica um dos menos estudados nesta área, principalmente quando são buscados estudos analíticos, que requerem coeficientes estimados e modelagem melhor elaborada para análises de séries temporais. Este fato, já registrado por estudos que buscam por estas análises, ao longo das duas últimas décadas (Abdallah, 1998; Abdallah e Bacha, 1999; Finco e Abdallah, 2001; Fagundes, Vicente e Margarido, 2002; Silva, Hood e Pinto, 2006), traz à tona a preocupação com a defasagem científica na área da economia pesqueira, o que propicia o não desenvolvimento científico e tecnológico do setor pesqueiro brasileiro, principalmente quando da necessidade de formulação de políticas públicas orientadas para o desenvolvimento sustentável deste setor, em suas dimensões tanto econômica, como social, ambiental e política.

No país, os dados quantitativos de análise sobre a economia da pesca são, em sua maioria, quando existentes, registros incompletos, com coletas interrompidas, afetados pela descontinuidade e lacunas nas informações, fato este decorrente de políticas públicas também descontínuas do setor pesca, reflexo da vulnerabilidade e falta de política de Estado para estruturar este segmento produtivo, ou seja, estabelecimento de uma estatística pesqueira nacional.

Com o propósito de contribuir para o setor, melhorando a informação científica de análise da pesca no país, muitas das informações quantitativas da economia pesqueira nacional surgem de projetos de pesquisa e/ou extensão, muitos destes localizados e desenvolvidos em Universidades e/ou Institutos de Pesquisas do país, envolvendo trabalho de coleta, organização e análise por pesquisadores, técnicos e estudantes que atuam nesta área. Exemplos destes são os registros de projetos de pesquisa e extensão da UFES (www.pesca.ufes.br), da UNIVALE (<http://pmap-sc.acad.univali.br/index.html>), da FURG (<http://www.imef.furg.br/documentos/Boletim-Estatistica-Pesqueira-2016-.pdf>), entre outros, contendo estatísticas pesqueiras, porém, muitas vezes gerando dados num período específico do tempo, tendo vigência não contínua caracterizada pela finalização dos seus projetos e convênios, produzindo, assim, os dados de forma descontínuas, com lacunas, o que deixa o segmento produtivo com registros incompletos para análises.

O presente estudo utiliza de dados que foram coletados por um destes projetos, denominado “Indicadores de preços de pescado pago pelos consumidores no município do Rio Grande”, criado em 2004, localizado no Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio Grande – ICEAC/FURG, coordenado dentro da Unidade de Pesquisa em Economia Costeira e Marinha – UPEC-Mar www.upec.furg.br. A partir desse projeto, criou-se um banco de dados de registros de preços de pescados comercializados no varejo, do município de Rio Grande, de diferentes espécies e modalidades de venda, com periodicidade mensal e desde o ano de 2004.

Considerando a ausência de informações mensais de preços em alguns registros do banco de dados de preços de pescado no varejo do município de Rio Grande/RS, e com a preocupação em aprimorar séries temporais com dados ausentes para usos futuros de análises de modelagem matemática e econométrica na economia da pesca, desenvolveu-se este estudo, que tem como objetivo o ajuste de modelos dinâmicos estocásticos a séries temporais com dados ausentes, usando uma análise Bayesiana e a série temporal da evolução mensal do preço de varejo do Bagre no município de Rio Grande, ao longo de 11 anos (de 2006 a 2016), série esta com 22% dos meses sem informação (dados ausentes), tendo o preço de varejo do pescado “bagre” no município de Rio Grande – RS como estudo de caso.

Propõe-se, assim, ajustar modelos dinâmicos estocásticos a série temporal de preços do bagre, com dados ausentes em sua série temporal, e por esta característica, não permitem o ajuste por modelos convencionais. A análise Bayesiana é usada, estimando os dados a partir do método de aproximação de Laplace integradas e aninhadas (Integrated Nested Laplace Approximation – **INLA**). Especificamente, os objetivos são: i) modelar as observações do preço do Bagre como função da variável latente com ruído em um **GLDM**; ii) implementar o modelo no software R usando o pacote **INLA** partindo de uma abordagem Bayesiana; iii) selecionar o melhor modelo ajustado dando um grau de incerteza

para cada ponto, permitindo estudos futuros sobre a série; e iv) levantar hipóteses sobre o modelo ajustado que possam servir de motivação para trabalhos futuros.

Espera-se, com este estudo, contribuir com o aprimoramento e robustez de séries temporais com dados ausentes a partir da aplicação de ajustes por modelagem matemática não convencional, aplicados em princípio, a dados que traduzem a economia pesqueira. Uma vez ajustada a série, a meta num passo futuro é analisá-la, sob a ótica econômica, considerando o contexto de análise em que o comportamento dos dados estão inseridos, e aplicando tais séries para estimativas de coeficientes na área econômica de análise. Este estudo se traduz como um suporte à evolução da área da economia da pesca no país, uma vez que permitirá aprimorar a fonte de informação quantitativa para usos em análises com modelagem econômicas para o setor pesca.

Este artigo apresenta a introdução, nesta primeira parte. Na parte 2 é apresentada a base metodológica, descrevendo na sequência o material e métodos utilizados na parte 3. Na parte 4 faz-se a aplicação metodológica e a discussão dos resultados, e na última parte, tem-se a conclusão do estudo

2 Referência Metodológica

Neste item são apresentadas a base metodológica para o entendimento de séries de tempo, modelos dinâmicos e inferência Bayesiana, conteúdo básico para a melhor compreensão do modelo dinâmico de ajuste.

2.1 Processo estocástico e Séries de Tempo

Um processo controlado por leis de probabilidades, o processo estocástico é uma família Y de funções onde cada par ordenado $(Y(t), \omega)$ segue uma função distribuição de probabilidade (**F.D.P.**). É definido formalmente em [Morettin e Tolo \(2006\)](#) como:

Definição 1. *Seja T um conjunto arbitrário, um processo estocástico é uma família $y = \{Y(t), t \in T\}$, tal que, para cada $t \in T$, $Y(t)$ é uma variável aleatória.*

Dado um certo $\omega \in \Omega$, onde Ω é o espaço amostral do ponto t , então, obtemos uma trajetória $Y^{(\omega)}(t)$, esta função é conhecida como *Trajectoria* ou *Série Temporal*, usaremos a notação y_t em simplificação a $Y_t = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, onde n é o número de observações, e y_t quando escalar.

Em séries temporais geralmente o foco principal é a previsão (forecast), onde queremos saber Y_{t+h} para $h, t \in \mathbb{Z}^+$. Como é intuitivo, supõe-se que quanto menor for o h mais precisa será a nossa previsão. Podemos também fazer uma previsão retrocedendo no tempo quando tomamos $\{h \in \mathbb{Z}^-; t \in \mathbb{Z}^+; |h| < t\}$ para preencher lacunas desconhecidas (*missing data*), nesse caso, chamamos o processo de *backcast*. Além de previsões, o processo da série em si é também um objeto de estudo. A decomposição de série em tendência, sazonalidade e ruído pode nos dar muitas informações sobre o seu comportamento, e o modelo ajustado pode nos permitir criar hipóteses sobre o processo.

2.2 Modelos Dinâmicos

Os Modelos Dinâmicos ou *Espaço estado*, são um conjunto de modelos onde o tempo é a variável explicativa dada a forma funcional. Permitindo descrever a evolução do fenômeno em relação aos parâmetros do modelo.

Usaremos um Modelo Dinâmico Linear Gaussiano (Gaussian Linear Dynamic Model - **GLDM**), de-

finido em [West e Harrison \(1989\)](#) como:

$$\text{Equação de Observações} \quad y_t = F_t' x_t + v_t, \quad v_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, V_t) \quad (1)$$

$$\text{Equação do Processo} \quad x_t = G_t x_{t-1} + w_t, \quad w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, W_t) \quad (2)$$

$$(3)$$

- i) Onde y_t é um vetor $n \times 1$ dos dados observados, é a variável observada ou estado, explicada ou pelo processo.
- ii) x_t é um vetor $p \times 1$, uma simplificação para $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, do processo de estado no tempo t , parâmetro estocástico, com p sendo o número de defasagens (lag's) do modelo.
- iii) v_t e w_t são os erros, considerados não correlacionados temporalmente nem entre si.
- iv) G_t é chamado de matriz do sistema e F_t' a matriz de observações. Onde G_t é $p \times p$, e F_t' é $n \times p$ onde $n \geq p$
- v) Sendo onde n numero de coletas por observação e os hiperparâmetro $\theta = \{F_t', G_t, V_t, W_t\}$

2.3 Revisão dos Modelos

Existe uma ampla gama de modelos utilizados para a análise de séries temporais. Dos modelos dinâmicos univariados clássicos, propostos em [E.P.Box e M.Jenkins \(1976\)](#) temos:

- i) O Autorregressivo (*Autoregressive* - **AR**) de ordem h , **AR**(p):

$$\mathbf{AR}(p) \quad y_t = \rho_0 + \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_p y_{t-p} + w_t \quad w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (4)$$

- ii) O Médias Móveis (*Moving Average* - **MA**) de ordem q , **MA**(q)

$$\mathbf{MA}(q) \quad y_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \dots + \theta_q w_{t-q} + w_t \quad w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (5)$$

- iii) O Autorregressivo de Médias Móveis (*Autoregressive Moving Average* - **ARMA**) de ordem h e q , **ARMA**(h, q).

$$\mathbf{ARMA}(p, q) \quad y_t = \rho_0 + \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_h y_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \dots + \theta_p w_{t-q} \quad w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (6)$$

onde $\theta_1, \dots, \theta_q, \rho_1, \dots, \rho_p$ são constantes reais, h e q são números inteiros não negativos que indicam a ordem (número de defasagens) dos processos **AR** e **MA**, respectivamente.

Esses modelos são estimados pelo método frequentista dos Mínimos Quadrados Ordinários (**MQO**), possuem muitas limitações, dentre elas:

- i) O problema da micro-numerosidade, quando se tem poucas observações e necessita-se estimar um número grande de parâmetros;
- ii) Séries com lacunas, acarretam a impossibilidade de ajustar o modelo inferencial;
- iii) As observações são produzidas pelo processo sem o erro do processo latente.

As limitações (i) e (ii), se devem ao método **MQO**, a limitação (iii) é um erro estrutural dos modelos, por não levar em consideração os erros observacionais v_t .

2.4 Inferência Bayesiana

Na abordagem *Bayesiana* de inferência estatística, a probabilidade é definida como métrica de incerteza. Modelando um **GLDM**, faremos inferência sobre os parâmetros calculando graus de incerteza sobre os mesmos, tanto observados como latentes, por meio de uma **F.D.P. Posteriori**. O teorema de *Bayes* é a peça central dessa abordagem, nos dando uma relação de proporcionalidade para a distribuição a *Posteriori* em função da: **i)** função de *verossimilhança* $\pi(y_t|\theta)$, que é o modelo de probabilidade que descreve os dados; **ii)** distribuição a *Priori* $\pi(\theta)$, o que já sabíamos sobre os parâmetros antes de vermos os dados; **iii)** Probabilidade Marginal dos dados $\pi(y_t)$, que é a probabilidade de obtermos esse dado dentre todos os θ 's possíveis:

$$\pi(\theta|y_t) = \frac{\pi(y_t|\theta)\pi(\theta)}{\pi(y_t)} \quad (7)$$

Note que tanto os dados futuros quanto ausentes também são incertos e podem ser representados por distribuições *Posteriori*'s, estas que em alguns casos particulares podem ser escritas analiticamente como uma conjugação de distribuições já conhecidas, método conhecido como famílias conjugadas, definido em [Kinas e Andrade \(2010\)](#), como:

Definição 2. *Seja F uma família de distribuições para a verossimilhança $\pi(y | \theta)$ e P uma família de distribuições para a priori $\pi(\theta)$. Dizemos que F e P são famílias conjugadas de distribuições se a distribuição posterior $\pi(\theta | y)$ também for membro de P .*

Em casos genéricos existem dois caminhos para se utilizar, um de simulação e o outro de aproximação. Dentro dessas sub-áreas existem alguns métodos como:

- i) Simulação por Cadeias de Markov de Monte Carlos (**MCMC**) (Markov chain Monte Carlo) para esse propósito temos por exemplo o *Amostrador de Gibbs* e *Metropolis-Hastings*. Uma introdução a esses métodos pode ser vista em [D. Cemgil A.T. \(2011\)](#);
- ii) A Aproximação de Laplace Aninhada Integrada (*Integrated Nested Laplace Approximation - INLA*) ([RUE; MARTINO, 2005](#)) e Aproximação Gaussiana ([RUE; HELD, 2005](#))
Ambos os caminhos tem seus respectivos pacotes implementados no *software R*. A principal diferença prática entre eles é o custo computacional. O **MCMC**, por exemplo, depende de critérios de convergência, embora sua robustez seja indiscutível. Para Modelos Dinâmicos, em particular os **GLDM**, onde o tempo computacional do **MCMC** deixa muito a desejar, os métodos de aproximação como o **INLA** vem ganhando mais adeptos nos últimos anos.

3 Material e Métodos

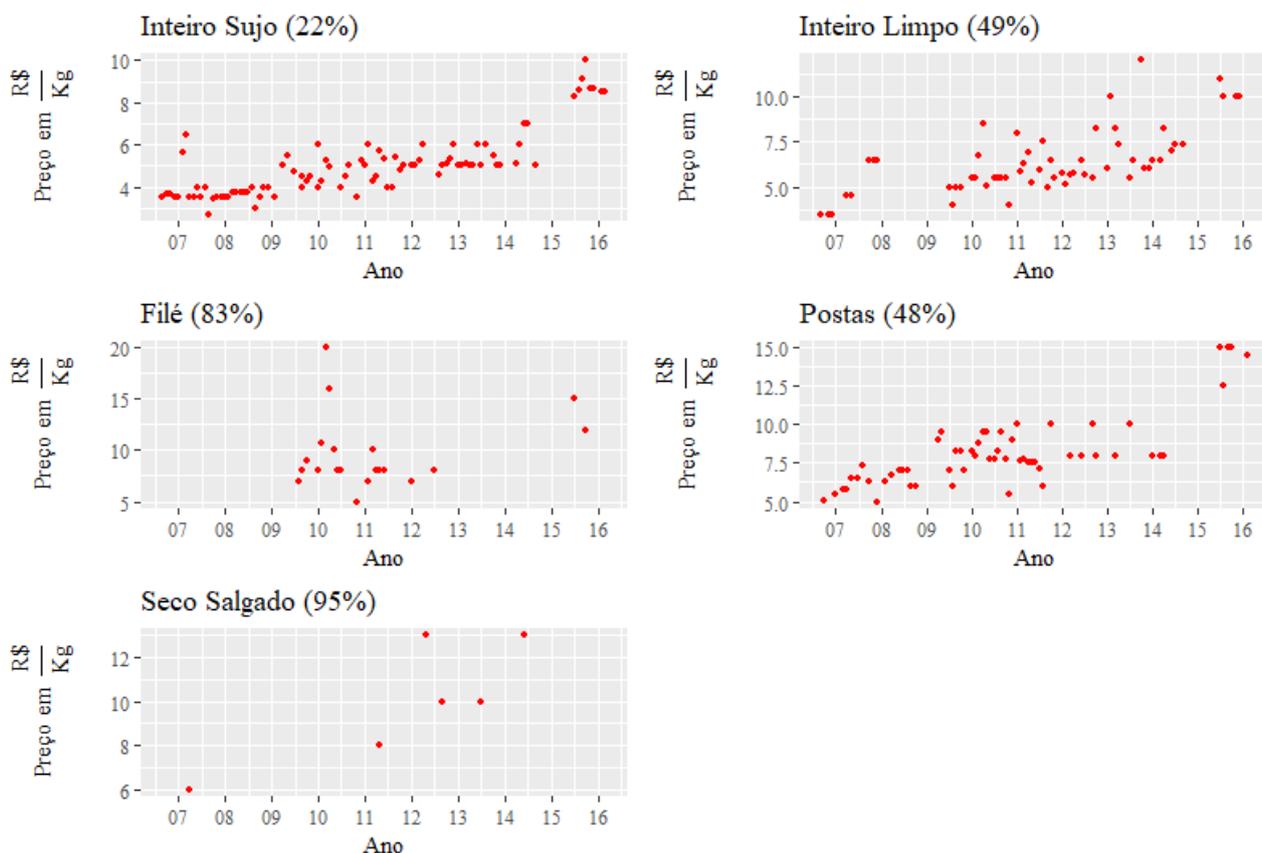
3.1 Banco de Dados

O banco de dados utilizado constitui-se de séries de preços de pescados comercializados no município de Rio Grande, coletados com periodicidade mensal, desde o ano de 2006, pela Unidade de Pesquisa Costeira e Marinha (UPEC-Mar). A coleta é realizada em pontos amostrais de comercialização de pescados em diferentes bairros no Município, registrados os preços em reais por quilograma, valores correntes, categorizados por espécies e tipos de processamentos (inteiro sujo, inteiro limpo, filés, posta, etc). Os preços estão disponíveis mensalmente no site **UPEC_Mar** www.upec.furg.br. Das séries analisadas, escolheu-se o Bagre, contendo 116 observações mensais, no período de 2006 a 2016, porém, observando ausência de alguns registros. O preço deste pescado representa o registro de três espécies de bagre: **(i)** *Genidens genidens*, **(ii)** *Genidens barbatus* e **(iii)** *Genidens planifrons*.

As espécies **(ii)** e **(iii)** estão em foco pela recente discussão sobre a sustentabilidade de sua

pesca. Elas foram categorizadas respectivamente como Espécies em Perigo (**EN**) e Espécies Criticamente em Perigo (**CR**), na portaria 445 de 2014 e MMA 2016 que tratam sobre o tema. Na Figura 1, pode-se visualizar as séries do Bagre categorizadas por processamentos, ressaltando as respectivas ausências de dados em meses específicos.

Figura 1: Preço mensal do Bagre em Rio Grande agosto de 2006 a Março de 2016, parenteses indicam a proporção de dados ausentes.



Fonte: Elaborado com dos dados de preços mensais do bagre,ICEAC-FURG:www.upec.furg.br.

3.2 Modelos Dinâmicos e Modelo de Markov Oculo

Dentro dos Modelos Dinâmicos optamos por utilizar um processo da família dos Autorregressivos como na Equação 4 no campo latente, também conhecido como modelo de de *Markov Oculo* (Hidden Markov Model - **HMM**). Um **AR(1)** adicionado à variável latente seria um **HMM(1)**, considerando o erro observacional v_t . Ou seja, um **AR(p)** e um **HMM(p)** teriam a mesma forma dinâmica, considerando que o erro da observação é nulo $v_t = 0$. Reescrevendo **GLDM** da Equação 2 com $k=1$ observações por mês temos:

$$\text{Equação de Observações} \quad y_t = F'x_t + v_t, \quad v_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, V) \quad (8)$$

$$\text{Equação do Processo} \quad x_t = G_t x_{t-1} + w_t, \quad w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, W) \quad (9)$$

$$(10)$$

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-p+1} \end{bmatrix}_{px1} \quad x_{t-1} = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-h} \end{bmatrix}_{px1} \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{px1} \quad w_t = \begin{bmatrix} w_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{px1} \quad v_t = \begin{bmatrix} v_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{px1}$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{h-1} & \rho_h \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{pxp}$$

Um modelo Dinâmico pode ser visto na forma de modelo Hierárquico Bayesiano. Nesses modelos existem pelo menos dois níveis de dependência entre as variáveis.

$$\text{Hierarquia} \quad (11)$$

$$\text{Nível 3} \quad \boldsymbol{\theta} \sim \pi(\boldsymbol{\theta}) \quad (12)$$

$$\text{Nível 2} \quad x \sim \pi(x | \boldsymbol{\theta}) = N(x; 0, \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (13)$$

$$\text{Nível 1} \quad \mathbf{y} | \mathbf{x} \sim \pi(y_i | x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Onde os *hiperparâmetros* do **HMM** da Equação 8 são $\boldsymbol{\theta} = \{V, W, \rho_t\}$. Estes são estimados como base para encontrar o processo gerador para as variáveis latentes e observadas. A distribuição *Posteriori* da forma Hierárquica 11 é escrita como:

$$\pi(x, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto \pi(\boldsymbol{\theta}) \pi(x | \boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^n (y_i | x_i).$$

Essas redes de informação *hierárquica* são melhor representadas como Grafos Dirigidos Acíclicos (Directed Acyclic Graph -**DAG**). Formalmente definido em [Rue e Held \(2005\)](#) como:

Definição 3. Um grafo dirigido \mathbf{G} é o par $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, onde \mathbf{V} é o conjunto de nós e \mathbf{E} é o conjunto de arcos $\{i, j\}$, onde $i, j \in \mathbf{E}$, e existe uma ligação dirigida entre os nós i e j . Caso contrário não há ligação entre os elementos i e j . Um grafo é completamente conectado se $\{i, j\} \in \mathbf{E}$ para todo $i, j \in \mathbf{V}$ com $i \neq j$.

A forma *hierárquica* 11 usando **DAG** é representada na Figura 2. Onde a direção dos arcos representa a dependência condicional, e os nós são variáveis com incerteza associada.

Cada um dos níveis contém ainda outras dependências simplificadas nesse grafo. Em particular a do **GLDM** escolhido na Equação 8 considerando $h = 1$ em um **DAC** seria escrito como na Figura 3.

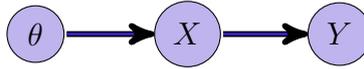
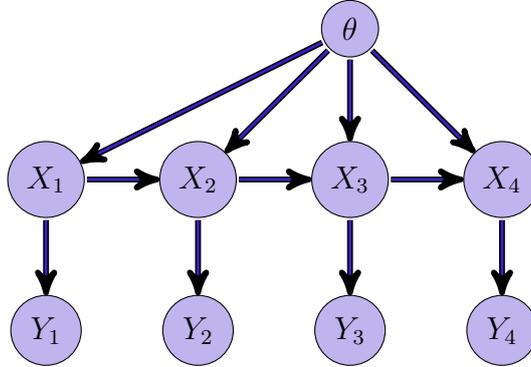


FIGURA. 2: Grafo Dirigido Acíclico

Figura 3: Grafo Dirigido Acíclico de um HMM(1)



3.3 Campos Aleatórios Gaussianos Markovianos

Uma das bases do INLA são os Campos Aleatórios Gaussianos Markovianos (Gaussian Markov Random Field - **GMRF**), estes provém dos *Processo de Markov* que é o processo de crescimento da variável latente do **HMM**, e possui uma propriedade muito interessante de independência condicional. Um **GMRF** é formalmente definido em [Rue e Held \(2005\)](#) como:

Definição 4. (*Campos Aleatórios Gaussianos Markovianos*) O vetor aleatório $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$ é um **GMRF** com relação ao grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ com média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de precisão $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} > 0$, onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é matriz de covariância, se e somente se sua densidade tem a forma

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

$$\mathbf{Q}_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathbf{E} \quad \forall i \neq j$$

Ou seja é um vetor normalmente distribuído com a propriedade de independência condicional associada. Uma forma de ver a independência condicional se dá pelo Teorema 1.

Teorema 1. *Seja \mathbf{x} normalmente distribuído com média $\boldsymbol{\mu}$ e precisão \mathbf{Q} . Então para $i \neq j$ temos:*

$$x_i \perp x_j \mid \mathbf{x}_{-ij} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_{ij} = 0$$

Onde \perp significa independência, ou seja, podemos verificar em \mathbf{Q} quando x_i e x_j são condicionalmente independentes, observando apenas se a entrada \mathbf{Q}_{ij} é zero. \mathbf{Q} é uma matriz esparsa, ou seja com muitos zeros. A demonstração desse teorema pode ser vista [Rue e Held \(2005, p. -33\)](#). Quando o **GMRF** é escrito na forma dinâmica a propriedade de independência condicional não fica tão clara. Por exemplo considere um **AR(1)** na forma dinâmica teríamos:

Equação de Observações	$y_t = 1x_t + v_t$	$v_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, V)$
Equação do Processo	$x_t = \rho_1 x_{t-1} + w_t$	$w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$

Simplificando:

$$x_t = \rho_1 x_{t-1} + w_t, \quad w_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1), \quad \text{com } |\rho_1| < 1$$

Escrevendo na forma condicional:

$$x_t | x_1, \dots, x_{t-1} \sim N(\rho_1 x_{t-1}, 1) \quad t = 2, \dots, n$$

Como o processo é estacionário sua variância pode ser facilmente obtida. Usando $\mathbb{V}(\cdot)$ como símbolo para função Variância e $\mathbb{E}(\cdot)$ como símbolo para função Esperança.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(x_t) &= \mathbb{V}(\rho_1 x_{t-1}) + \mathbb{V}(w_t) \Rightarrow \mathbb{V}(x_t) - \rho_1^2 \mathbb{V}(x_{t-1}) = 1 \Rightarrow \mathbb{V}(x_t) = \frac{1}{1 - \rho_1^2} \\ \mathbb{E}(x_t) &= \mathbb{E}(\rho_1 x_{t-1}) + \mathbb{E}(w_t) \Rightarrow \mathbb{E}(x_t) = 0 \end{aligned}$$

Sua densidade conjunta é da forma:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}) &= \pi(x_1) \prod_{t=2}^n \pi(x_t | x_{1:t-1}) = \pi(x_1) \pi(x_2 | x_1) \dots \pi(x_n | x_{n-1}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}\right) \end{aligned}$$

Um **GMRF** como pode ser visto na Definição 3.

Na Matriz de precisão \mathbf{Q} para um $n=7$. Como no Teorema 1 ela tem forma esparsa, o que indica as independências condicionais. As entradas em branco são zeros.

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & & & & & \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho \\ & & & & & -\rho & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Já a matriz de covariância para é da forma:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{1 - \rho_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

O que não nos fornece muitas informações sobre o processo analisado.

3.4 Aproximação de Laplace e Laplace-Simplificada

A aproximação de Laplace-Simplificada é uma aproximação de uma curva qualquer $g(x)$ por uma família de funções exponenciais. Para isso é usada uma expansão em séries de Taylor até a segunda ordem centrada na moda x^* , pois a moda é um ponto de máximo local (global se unimodal), portanto

sua derivada naquele ponto é zero.

$$\begin{aligned}\log g(x) &\approx \log g(x^*) + \frac{\partial \log g(x^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log g(x^*)}{\partial x^2}(x - x^*)^2 \\ &= \log g(x^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log g(x^*)}{\partial x^2}(x - x^*)^2 \\ \text{Tomando } \hat{\sigma}^2 &= -\frac{1}{\frac{\partial^2 \log g(x^*)}{\partial x^2}}\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\int e^{\log g(x)} dx \approx g(x^*) \int \exp \left[-\frac{(x - x^*)^2}{2\hat{\sigma}^2} \right] dx = \text{Normal}(x^*, \hat{\sigma}^2)$$

A aproximação de Laplace para com x multivariado pode ser vista em [Tierney e Kadane \(1986\)](#) como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{ng(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{n |-\mathbf{H}|}} \quad (17)$$

onde \mathbf{H} é a matriz Hessiana na moda x^* (18)

$$H_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=x^*} \quad (19)$$

As propriedades do **GMRF** são preservadas em ambos os casos.

3.5 Integrated Nested Laplace Approximation

O principal objetivo do **INLA** é a aproximação das marginais as *Posteriori*'s tanto das variáveis latentes (isto é, não observadas) quanto dos *Hiperparâmetros* do **GMRF** os dados observados (coletados), permitindo assim realizar inferência *Bayesiana* sobre as variáveis. Ele produz uma aproximação numérica para as nossas *Posteriori*'s de Interesse usando a Aproximação de Laplace ([TIERNEY; KADANE, 1986](#)). As Marginais são escritas como:

$$\pi(x_i | \mathbf{y}) = \int \pi(x_i | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \quad (20)$$

$$\pi(\theta_j | \mathbf{y}) = \int \pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta}_{-j} \quad (21)$$

Seja $\tilde{\pi}(\cdot | \cdot)$ a densidade condicional aproximada de Laplace dos argumentos, o **INLA** tenta construir a aproximação aninhada (*Nested*) das marginais como:

$$\tilde{\pi}(x_i | \mathbf{y}) = \int \tilde{\pi}(x_i | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta} \quad (22)$$

$$\tilde{\pi}(\theta_j | \mathbf{y}) = \int \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta}_{-j} \quad (23)$$

Já que não temos uma forma analítica para $\pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ e para $\pi(x_i | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ para o cálculo de 23 e 22 o **INLA** faz aproximações analíticas e integrações numéricas em duas etapas:

- i) Etapa - Se calcula $\pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ e todas as outras marginais $\pi(\theta_j | \mathbf{y})$ que queremos também podem ser calculadas.
- ii) Etapa - Calculamos $\pi(x_i | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ que é necessária para o cálculo das marginal *Posteriori*'s dos parâmetros.

Primeiramente é feita uma aproximação da *Posteriori* $\pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ dos Hiperparâmetros $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \in \mathbb{R}^m$. Usando a definição de probabilidade conjunta temos:

$$\pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{\pi(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})} \propto \frac{\pi(\boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})}{\pi(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})} \simeq \frac{\pi(\boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})}{\tilde{\pi}_G(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})} \Big|_{x=x^*(\boldsymbol{\theta})} \quad (24)$$

Onde $\tilde{\pi}_G(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ é a aproximação gaussiana para a condicional completa $\pi(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$, também conhecida como aproximação por **GMRF**, com $x = x^*(\boldsymbol{\theta})$ sua moda (RUE; MARTINO; CHOPIN, 2009), (RUE; HELD, 2005).

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) &\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x} \Sigma_i \log \pi(y_i \mid x_i)\right) \approx \\ &\approx \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) + \text{diag}(C_i))(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) = \tilde{\pi}_G(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Onde C_i é o coeficiente da expansão de $\log \pi(y_i \mid x_i)$ em Taylor até a segunda ordem, com centro na moda, x_i^* , como visto em Rue e Held (2005, p.-211). O que é equivalente a aproximação de Laplace para $\pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$, mostrado em Tierney e Kadane (1986).

Agora precisamos calcular $\pi(x_i \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$. Uma maneira direta é para $\tilde{\pi}(x_i \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ usando uma distribuição Normal, onde o cálculo da matriz de precisão é baseada na decomposição de Cholesky (RUE; HELD, 2005). A aproximação foi testada em Rue e Martino (2005) mas apresenta erros de assimetria e de alocação. A solução encontrada por eles foi usar a aproximação de Laplace novamente. Primeiramente decomposmos $x = (x_i, \mathbf{x}_{-i})$. Temos então:

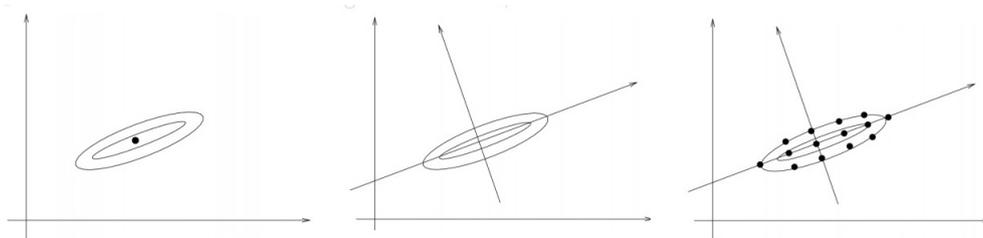
$$\pi(x_i \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = \frac{\pi((x_i, \mathbf{x}_{-i}) \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{\pi(\mathbf{x}_{-i} \mid x_i, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})} \simeq \frac{\pi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})}{\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}_{-i} \mid x_i, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})} \Big|_{x_{-i}=x_{-i}^*(x_i, \boldsymbol{\theta})} \quad (25)$$

Onde $\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}_{-i} \mid x_i, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ é a aproximação gaussiana para a $\pi(\mathbf{x}_{-i} \mid x_i, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ e $\mathbf{x}_{-i} = \mathbf{x}_{-i}^*(x_i, \boldsymbol{\theta})$ sua moda.

Como a aproximação de Laplace é computacionalmente muito "cara", o **INLA** opta pela aproximação simplificada de Laplace por *default*, para $\pi(x_i \mid \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$.

Na prática o **INLA** primeiro procura na marginal *Posteriori* conjunta do hiperparâmetro pela moda de $\pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$. Disto é montada uma malha de pontos, deixando a nova base com origem na moda, e se escolhe um conjunto **G** dos pontos relevantes $\{\boldsymbol{\theta}^*\}$ juntamente com um conjunto de pesos para os pontos mais relevantes $\{W_{\boldsymbol{\theta}^*}\}$, de modo a gerar uma distribuição aproximada como na Figura 4.

Figura 4: Moda Encontrada; Mudança de Base; Pontos Relevantes

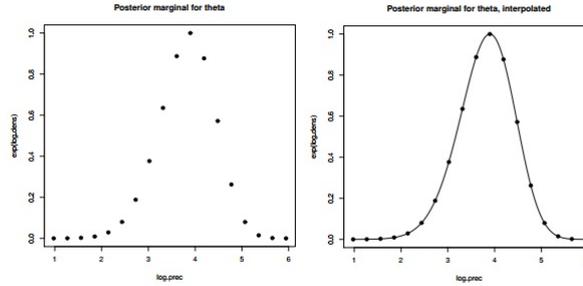


Fonte: Minicurso Håvard Rue

Cada Marginal *Posteriori* $\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ pode ser obtida interpolando os pontos calculados usando uma taxa de correção de assimetria. Como mostra na Figura 5.

Para cada $\boldsymbol{\theta}^*$, a *Posteriori* condicional $\tilde{\pi}(x_i \mid \boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{y})$ é então verificada na malha dos valores seleti-

Figura 5: Pontos Encontrados; Interpolação da Marginal *Posteriori*.



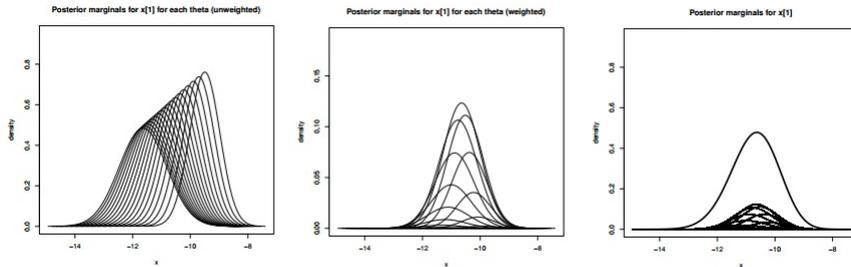
Fonte: Minicurso Håvard Rue

onados x_i e a marginal *Posteriori* $\tilde{\pi}(x_i | y)$ é obtida por integração numérica, como na Equação 26, considerando o conjunto de pesos W_{θ^*} , como na Figura 6 .

$$\tilde{\pi}(x_i | \mathbf{y}) = \sum_{\theta^* \in \mathcal{G}} \tilde{\pi}(x_i | \theta^*, \mathbf{y}) \tilde{\pi}(\theta^* | \mathbf{y}) W_{\theta^*} \quad (26)$$

Comparações com o **MCMC**, comparação entre as aproximações de Laplace e Gaussiana para as

Figura 6: Conjuntos de Marginais *Posteriori*; Ajuste Com Pesos; Integração Numérica.



Fonte: Minicurso Håvard Rue

Marginais *Posteriori*'s podem ser encontradas em: [Smedt et al. \(2015\)](#), [Rue e Martino \(2005\)](#), [Rue, Martino e Chopin \(2009\)](#), [Rue e Held \(2005\)](#).

3.6 Seleção de Modelo

O grau de ajuste aos dados é muito importante, em analogia com o R^2 em uma regressão linear, queremos comparar diferentes modelos em uma mesma escala. Com esse propósito foi criado o Critério de Informação da Deviância (Deviance information criterion **DIC**), calculado como:

$$D(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = 2 \sum_i \log(y_i | x_i, \boldsymbol{\theta})$$

$$DIC = 2 \mathbb{E}(D(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})) - D(\mathbb{E}(\mathbf{x}); \boldsymbol{\theta}^*)$$

Ou seja **DIC**= "Qualidade do ajuste"+ "penalidade pela complexidade".

Outras métricas também são utilizados com o mesmo intuito, por exemplo: **i**) Akaike information criterion **AIC**, Bayesian information criterion **BIC**, usados para análise frequentista; **ii**) **DIC** e mais recentemente Watanabe–Akaike information criterion **WAIC** para modelos *Bayesianos* .

4 Aplicação e Discussão

O pacote com o método já implementado pode ser instalado facilmente usando o comando `install.packages(INLA)` no `prompt` do *R* ou *Rstudio*. Pode-se atualizar usando o comando `inla.upgrade()`, ou caso convenha a versão de teste `inla.upgrade(testing = TRUE)`. O pacote **RINLA** está disponível para Linux, Windows e Mac. Depois de instalado, para carregar utiliza-se o comando `library(INLA)`.

Os modelos autorregressivos já estão implementados. Outros modelos dinâmicos podem ser ajustados aplicando o método proposto em Cardenas, Krainski e Rue (2010), e Cortes (2014). No Site R-INLA project www.r-inla.org é possível encontrar documentos técnicos com uma pequena descrição de cada modelo implementado na pasta *models*.

Alguns critérios de seleção podem ser solicitados para serem computados como: **DIC**, **AIC**, **WAIC**, entre outros.

Para a aplicação a série do Bagre (Inteira Limpa), primeiramente foi considerado um modelo simples, um Passeio Aleatório de ordem 1 (Random Walk - **RW**(1)) ajustado no processo latente. O que no **HMM**(p) da Equação 8 seria $p=1$ e $\rho = 1$. Em outras palavras, um **RW**(p) é um **AR**(p) com as variáveis ρ_t que multiplicam as defasagens constantes e iguais a 1 $\rho_t = 1$ (RUE; HELD, 2005). Ele é ajustado como:

```
formula <- dados ~f(i, model="rw1", constr=F, prior = "normal",
                    param = c(mean=0, prec=1e-5)) -1
saida <- inla(formula, data = data.frame(t, pescado),
family = "gaussian",
          control.compute = list(dic=T), verbose=F)
```

Para um **RW**(2), basta modificar "rw1" por "rw2".

Escolhemos uma *Priori* não informativa deixando a precisão 1×10^{-5} (precisão é o inverso da variância) logo, escolhemos uma variância alta para não enviesar a estimativa. Podemos ver na saída do ajuste com o comando `summary(r)`:

```
Time used:
Pre-processing      Running inla Post-processing      Total
           0.1670             0.8640             0.0890             1.1201
```

Usando como *Default* do programa a aproximação de Laplace simplificada, podemos ver que o tempo total de processamento levou aproximadamente 1 segundo (1.1201), usando um processador Intel core *I5* com 4 *Gb* de memória *Ram*.

Com base nas *Posterioris* o **INLA** calcula um intervalo de credibilidade por padrão de 95% dando quantis para cada ponto amostral (dados ausentes ou não), como podemos visualizar na Figura 7. Onde os pontos vermelhos são as observações.

Figura 7: Intervalos de Credibilidade estimados para Bagre-Sujo com o modelo **RW(1)**.



Fonte: Elaborada pelo autor

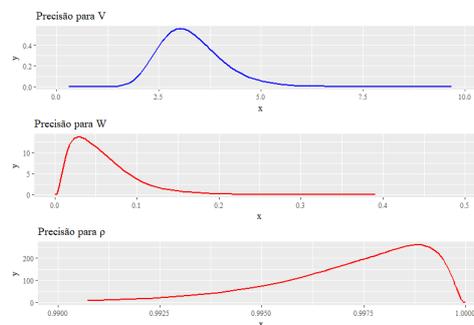
Para seleção de modelos calculamos o **DIC**. Ajustamos para comparação um **HMM(1)**, Equação 8, com $h = 1$ e ρ um hiperparâmetro a ser estimado, no código:

```
formula <- dados ~ f(i, model="ar", order=p, constr=F, prior =
"normal", param = c(mean=0, prec=1e-5)) -1
```

Onde p é a ordem que queremos do auto-regressivo (em particular **HMM(1)** model="ar1").

Note

Figura 8: Marginais Posteriores Hiperparâmetros do modelo **HMM(1)**



Fonte: Elaborada pelo autor

na Figura 8 que, neste caso, a precisão para ρ , manteve-se abaixo de 1, diferentemente do **RW(1)**.

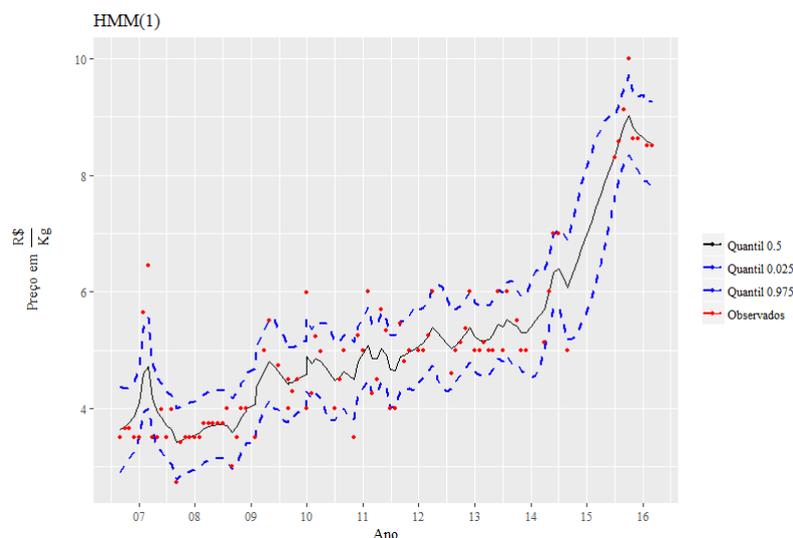
Testamos outros **HMM(p)**, com diferentes defasagens $p = \{2, 3, 4\}$, mudando apenas no código $p = 2, 3, 4$. Os resultados dos critério de informação podem ser vistos na Tabela 1. O modelo

Tabela 1: Critério de Informação da Deviância dos Modelos Testados

INTEIRO SUJO					
HMM(1)	HMM(2)	HMM(3)	HMM(4)	RW(1)	RW(2)
180.68	181.86	161.88	-515.26	182.72	195.54

escolhido foi o de menor **DIC** em valor absoluto, (3) com **DIC**=161.88, onde a qualidade do ajuste

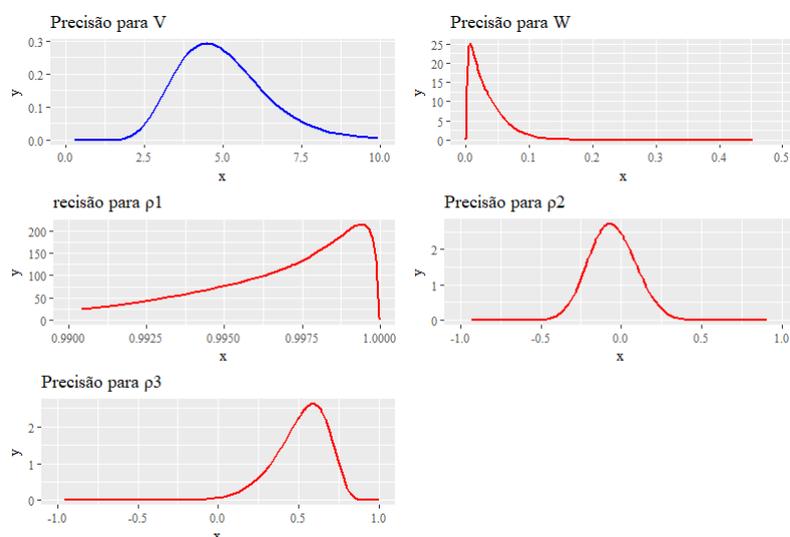
Figura 9: Intervalos de Credibilidade estimados para Bagre-Sujo com o modelo **HMM(1)**.



Fonte: Elaborada pelo autor

(*Deviance Mean*) foi de 116.34 e o número de parâmetros efetivos (complexidade) foi de 45.54. Note que um **HMM(4)** apresenta um **DIC** negativo, o que indica um sobreajuste (*Overfitting*) do modelo. As posteriores podem ser vistas na Figura 10 e os intervalos de credibilidade de 95% ajustados podem ser visualizados na Figura 11.

Figura 10: Marginais *Posterioris* dos Hiperparâmetros do modelo **HMM(3)**



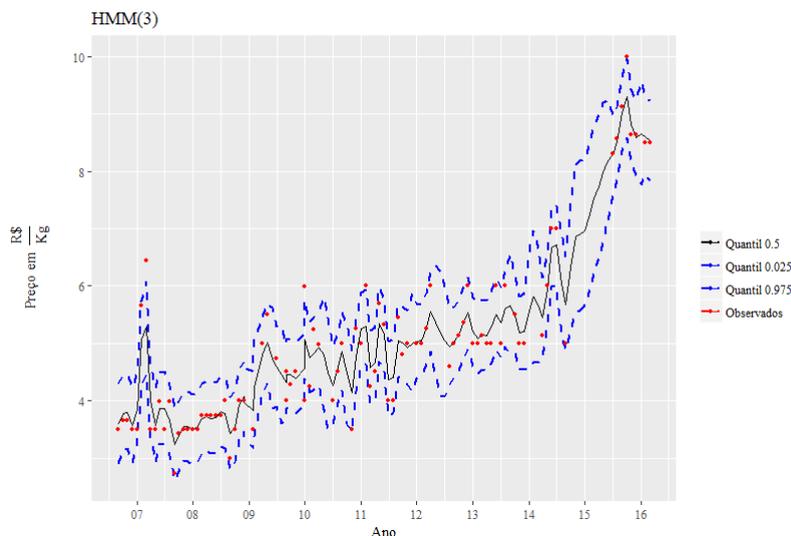
Fonte: Elaborada pelo autor

Com menor **DIC**, as diferenças de ajuste entre o **HMM(1)** Figura 9 e **HMM(3)** Figura 11 se tornam visíveis. O **HMM(3)** tem um refinamento maior, capturando além da tendência, as oscilações referentes ao preço.

Como o peixe é um bem inelástico, ou seja pequenas oscilações no preço não alteram a demanda, é provável que essas variações se devam então ao volume de oferta do Bagre ou às oscilações de espécies substitutas. Tal hipótese poderia ser testada adicionando co-variáveis de volume e preço ao modelo, e verificando através da melhora efetiva no **DIC** por exemplo.

Poderíamos procurar padrões, decompondo as séries de quantis em: tendência, sazonalidade e ruído.

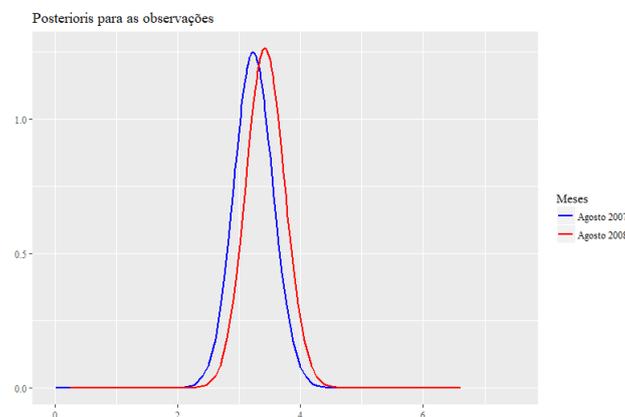
Figura 11: Intervalos de Credibilidade estimados para Bagre-Sujo com o modelo **HMM(3)**.



Fonte: Elaborada pelo autor

Com as posteriores para cada ponto possuímos muito mais informações que originalmente; e mais hipóteses que podem ser levantadas e testadas do que com uma simples série completa. Algumas delas que antes seriam impensáveis agora podem ser propostas. Por exemplo poderíamos comparar as posteriores de dois meses como na Figura 12.

Figura 12: *Posteriori* para as Observações



Fonte: Elaborada pelo autor

Visualmente temos o efeito de translação da **FDP**, entre os períodos de Agosto de 2007 e agosto de 2008. Efeito este que pode ser explicado parcialmente pela inflação. Removendo a inflação, o preço poderia ser explicado por uma possível maior escassez do pescado. Poderíamos também analisar o grau de aumento dessas incertezas, entre períodos, calculando a razão entre as *Posteriori*'s. Essas e outras hipóteses podem ser levantadas no modelo com as *Posteriori*'s estimadas e as observações. Outros estudos podem ser iniciados a partir do modelo ajustado. O mesmo método pode ser ajustado a outras espécies do banco de dados.

5 Conclusão

O **INLA** apresentou um potencial promissor em termos de velocidade, na estimação das *Posterioris*, não havendo a necessidade de convergência, mostrando vantagem sobre métodos convencionais como simulações por Cadeias de Markov.

O método de estimação **INLA** está muito entrelaçado com os modelos dinâmicos **CAGM**, mesmo que este tenha uma ampla gama de modelos preditivos. Ou seja, os **DLM's** que se enquadram são somente os Gaussianos, sendo o **HMM** um deles.

Ajustes de modelos com **INLA** são mais vantajosos que ajustes via **MCMC**, mostrando-se este último muito proibitivo, tonando assim o **INLA** a saída mais recomendável.

Os materiais que explicam como o **INLA** funciona são difíceis de encontrar e muito pouco didáticos, o que torna o uso dele mais restrito.

Para a Inferência *Bayesiana*, o **INLA** é uma ferramenta que se tornará um de seus pilares, juntamente com o **MCMC**. Depois que as primeiras barreiras quanto ao aprendizado e entendimento de uso desta ferramenta são ultrapassadas, a facilidade para o uso começa a aparecer.

Na área econômica, a análise *Bayesiana* ainda é pouco explorada. O **INLA** será um bom começo, fornecendo uma ferramenta ágil e prática para ajustes de séries temporais econômicas, pela simplicidade de implementação do pacote do *Software R*, **RINLA**. Podem ser descobertas, a partir das *Posterioris* dos modelos ajustados, novas interpretações econômicas.

No uso do **RINLA**, neste estudo, obteve-se intervalos de credibilidade e distribuições de probabilidade para cada ponto, a partir de modelos ajustados, podendo ser escolhido o melhor modelo estimado através do **DIC**, tendo sido usada a série temporal de preços do bagre.

Dentre resultados possíveis a serem utilizados a partir destes ajustes, no presente estudo observou-se o efeito de translação da função de distribuição de probabilidade para dois meses em anos diferentes, e verificou-se que a forma da distribuição de cada mês se manteve com o mesmo padrão, indicando assim, que a variabilidade dos preços não foi modificada.

Economicamente, este tipo de resultado pode ser expandido para diferentes análises de variabilidade de séries temporais, verificando alterações em padrões de comportamento de variáveis, entre muitas outras análises. Enfatiza-se, assim, a aplicabilidade do método apresentado neste estudo, uma vez que séries temporais com lacunas não são utilizáveis em ajustamentos de modelos com métodos clássicos (como **MQO**, Máxima Verossimilhança, etc), comumente utilizados na área de análise econômica.

Referências

ABDALLAH, P. R. *Atividade Pesqueira no Brasil: política e evolução*. 137 p. Tese (Doutorado) — ESALQ/USP, 1998. Citado na página 2.

ABDALLAH, P. R.; BACHA, C. J. C. A benefit/cost analysis of the brazilian fishery fiscal incentive policy. *Revista de Economia e Sociologia Rural*, Brasília, v. 37, n. 03, p. 151–200, 1999. Citado na página 2.

CARDENAS, R. R.; KRAINSKI, E. T.; RUE, H. Fitting dynamic models using integrated nested laplace approximations – inla. 2010. Citado na página 13.

- CORTES, R. X. *Dissecação: Estimando modelos dinâmicos utilizando o INLA para Campos Aleatórios Markovianos Não Gaussianos*. Dissertação (Mestrado), 2014. Citado na página 13.
- D. CEMGIL A.T., C. S. e. B. *Bayesian Time Series Models*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0-521-19676-5. Citado na página 5.
- E.P.BOX, G.; M.JENKINS, G. *Time Series Analysis: Forecasting and Control (Revised Edition)*. Revised. [S.l.]: Holden-Day, 1976. ISBN 0816211043,9780816211043. Citado na página 4.
- FAGUNDES, L.; VICENTE, J. R.; MARGARIDO, M. A. Margens de comercialização e causalidade de preços de sardinha, 1984-1996. *Agricultura em São Paulo*, São Paulo, ano 49, n. 01, p. 01–14, 2002. Citado na página 2.
- FINCO, M. V. A.; ABDALLAH, P. R. Análise econômica da atividade pesqueira no município de rio grande. *XXIX CONGRESSO BRASILEIRO DE ECONOMIA E SOCIOLOGIA RURAL*, Editora da UFPE, Recife, 2001. Citado na página 2.
- KINAS, P. G.; ANDRADE, H. A. *Introdução à Análise Bayesiana (Com R)*. 1º edição. ed. [S.l.]: MaisQnada Editora, 2010. ISBN 9788561797102. Citado na página 5.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. [S.l.]: Edgard Blucher, 2006. ISBN 8521203896,9788521203896. Citado na página 3.
- RUE, H.; HELD, L. *Gaussian Markov Random Fields: Theory and Applications*. [S.l.: s.n.], 2005. ISBN 1584884320. Citado 6 vezes nas páginas 5, 7, 8, 11, 12 e 13.
- RUE, H.; MARTINO, S. Approximate bayesian inference for hierarchical gaussian markov random fields models. 2005. Citado 3 vezes nas páginas 5, 11 e 12.
- RUE, H.; MARTINO, S.; CHOPIN, N. Approximate bayesian inference for latent gaussian models using integrated nested laplace approximations. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- SILVA, F. M.; HOOD, A. da S. S.; PINTO, P. R. L. Análise dos preços do pescado no município de rio grande. *Revista de Iniciação Científica da ULBRA*, v. 05, n. 01, p. 201–211, 2006. Citado na página 2.
- SMEDT, T. D. et al. Comparing mcmc and inla for disease mapping with bayesian hierarchical models. 2015. Citado na página 12.
- TIERNEY, L.; KADANE, J. Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. 1986. Disponível em: <<https://www.cs.cmu.edu/~tom/10-702/laplace.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- WEST, M.; HARRISON, J. *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. [S.l.]: Springer Verlag, 1989. ISBN 0-387-97025-8. Citado na página 4.