Um Tópico em História da Teoria dos Jogos: A Análise dos Jogos Simétricos Por Émile Borel e John von Neumann

Jorge Paulo de Araújo, professor associado do Departamento de Economia e Relações Internacionais da Universidade Federal do Rio Grande do Sul;

Geraldo Edmundo Silva Júnior, professor associado do Departamento de Economia e do Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de São Carlos.

RESUMO

O objetivo deste artigo é acompanhar o desenvolvimento das ideias de Émile Borel (1871-1956) sobre jogos tal como está nos seus artigos de 1921, 1924 e 1927 para buscar esclarecer se podemos conjecturar, como John von Neumann (1903-1957) inicialmente supôs, que Borel percebera a solução do problema como a verificação da hipótese minimax. Nossa opinião é que Borel não formulou a hipótese minimax, mas sugeriu imperfeitamente uma outra que foi finalmente formulada sob o título de "Teorema das Alternativas" por von Neumann e Oskar Morgenstern (1902-1977) no livro "Theory of Games and Economic Behavior" de 1944. Ao abordar nosso objetivo principal somos conduzidos ao contexto teórico posterior no qual von Neumann, David Gale (1921-2008), Harold W. Kuhn (1921-2014) e Albert W. Tucker (1905-1995) trataram jogos simétricos através dos Teoremas das Alternativas de von Neumann e Stiemke. Finalmente, observamos que von Neumann demonstra via simetrização no artigo "Solutions of Games by Differential Equations" de 1950 que a ênfase dada por Borel aos jogos simétricos estava essencialmente correta pois von Neumann mostra que a existência de equilíbrio para jogos simétricos conduziria a demonstração da existência de equilíbrio para jogos em geral.

ABSTRACT

This paper aims to follow the development of Borel's ideas about games such as appear in his articles dated from 1921, 1924, and 1927, respectively. We seek to clarify if, as von Neumann originally did, Borel realized the solution of problem as a checking of the minimax hypothesis. In our opinion, Borel did not make the Minimax Theorem hypothesis but suggested another that von Neumann and Morgenstern correctly formulated it on "Theory of Games and Economic Behavior" of 1944. To work with the theme our main goal was to analyze the context in which later von Neumann, Gale, Kuhn, and Tucker returned to symmetric games and how they established those games through the von Neumann and Stiemke's Theorems of Alternatives. Finally, we comment that von Neumann demonstrates via symmetrization that Borel's emphasis on symmetric games was essentially correct since von Neumann shows that the existence of equilibrium for symmetric games drives to the demonstration of existence equilibrium for general games in the article "Solutions of Games by Differential Equations" of 1950.

Palavras-Chave: História do Pensamento Econômico: Métodos Matemáticos, Teoria dos Jogos

Keywords: History of Economic Though: Quantitative and Mathematical; Minimax; Symmetric Games

Área de Submissão Área 1: Metodologia e História do Pensamento Econômico

JEL-Classification: B-16; C-7; C-70

Introdução

Na seção de 14 de maio de 1928, Émile Borel inteirou a Academia de Ciências sobre a nota dirigida a esta instituição pelo jovem matemático John von Neumann (VON NEUMANN, 1928). Nesta nota, von Neumann informou que resolvera um problema proposto por Borel. A questão, tratando de jogos simétricos, é "Quelle est la meilleure façon de jouer pour [jogador] I et pour [jogador] II?" Na nota, Neumann não apenas afirmou ter resolvido o problema, como criticou a forma como Borel o propusera:

> Une remarque plus essentielle est la suivante: "comment I (resp. II) doit-il jouer, pour s'assurer un gain aussi grand que possible, c'est-à-dire pour rendre a_{xy} aussi gran (resp. petit) que possible?" n'a pas de sens défini. [...] Le vrai problème, c'est de trouver ici une définition exacte et plausible (de l'intérêt de I e resp. II), permettant une solution unique. (VON NEUMANN, 1928, p. 1690)

Reconhecendo e adotando o conceito de estratégias mistas, introduzido por Borel no artigo de 1921 (BOREL, 1953a) ao analisar jogos simétricos, von Neumann afirmou na nota citada acima que Borel formulara a hipótese minimax, mas que a verificara apenas em alguns casos particulares, e que ele, von Neumann, por sua vez, provara a validade desta hipótese para todos os jogos de dois jogadores sem a necessidade de se restringir aos jogos simétricos (VON NEUMANN, 1928).

Um dos nossos objetivos neste artigo é acompanhar o desenvolvimento das ideias de Borel sobre jogos nos seus artigos de 1921, 1924 e 1927 e buscar esclarecer se podemos admitir, como von Neumann o fez, que Borel tenha compreendido a solução do problema como a verificação da hipótese minimax. Enfim, o teorema minimax é a resposta do problema que Borel formulou em seus trabalhos? Nossa opinião é que Borel não formulou a hipótese minimax, mas uma outra e de maneira imperfeita, que explicitaremos abaixo. Esta hipótese foi reformulada por von Neumann e Morgenstern no livro "Theory of games and Economic Behavior" sob o título de "Teorema das Alternativas". Ao tratar de nosso objetivo principal somos conduzidos ao contexto teórico no qual von Neumann, Gale, Kuhn e Tucker se voltaram posteriormente ao tratarem jogos simétricos e estabelecerem os teoremas minimax para estes jogos via os teoremas de alternativas de von Neuman e Stiemke.

Borel em Jogos Simétricos

No artigo de 1921 (BOREL, 1953a), Borel definiu jogos simétricos, ou seja, aqueles jogos tais que o número de estratégias disponíveis para um e outro jogador – digamos o jogador I e o jogador II – é igual, e as estratégias disponíveis para os dois jogadores são as mesmas. Se os jogadores escolherem as mesmas estratégias as suas chances de ganhar e perder são iguais, ou seja, ½. Borel adotou a seguinte matriz para expressar as probabilidades em estratégias puras para ambos os jogadores

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\alpha_{12} & \cdots & \frac{1}{2}+\alpha_{1n} \\ \frac{1}{2}-\alpha_{12} & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}-\alpha_{1n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12} & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos representar a matriz C por $\frac{1}{2}+A$, onde, $\frac{1}{2}$ é a matriz que tem todas as entradas iguais a $\frac{1}{2}$ e A é uma matriz antissimétrica, ou seja, $\alpha_{ji}=-\alpha_{ij}$. Evidentemente, $\alpha_{ii}=0$. Em outras palavras, $A'=-A$. Por convenção, se o jogador I escolher a estratégia pura i, então suas probabilidades de vencer o jogo estão representadas na linha. Se o jogador I escolher a estratégia pura i e o jogador II escolher a estratégia j então probabilidade do jogador I vencer é $\frac{1}{2}+\alpha_{ij}$. A probabilidade do jogador II vencer é $\frac{1}{2}-\alpha_{ij}$. A matriz de probabilidades do jogador II, respeitada esta convenção, é $\frac{1}{2}+A'=\frac{1}{2}-A$.

Observe que para Borel são matrizes de probabilidades. A matriz da representação normal de um jogo de soma-zero, definida por von Neumann no artigo de 1928, é uma matriz de payoffs e não de probabilidades (VON NEUMANN, 1959). Borel passou a empregar matrizes de payoffs a partir do artigo de 1924.

Borel questiona-se se é possível determinar um método de jogar que é melhor que qualquer outro: se confere ao jogador que o adota uma superioridade sobre aquele jogador que não o adota; "um código que determina, para toda a circunstância possível, o que o jogador deve fazer" (BOREL, 1953a, p. 97), ou seja, se tal código oferece uma probabilidade de vitória maior que ½ para o jogador em questão, caso o adversário não empregue o mesmo método.

Borel, então, sugere que o jogador I elimine todas as linhas da matriz C tais que as entradas sejam menores ou iguais a $\frac{1}{2}$, isto é, aquelas linhas que na matriz A são constituídas de elementos negativos ou nulos. Borel chama tais linhas de "maneira ruim" de jogar. Além disso, sugere que as linhas nulas de A também sejam eliminadas. Depois que estas linhas são eliminadas e que aquelas linhas nulas de A são deixadas à parte, restam linhas com elementos positivos e negativos, ou como diz Borel, aquelas linhas de A que conservam pelo menos um elemento positivo. Por exemplo, no caso da matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

a segunda linha é eliminada. Borel, a seguir, observa que se existir uma linha cujas entradas são nulas ou positivas então esta é a melhor maneira de jogar. No caso acima é a linha três. Para contornar o problema da inexistência da melhor maneira de jogar, como no caso da matriz abaixo,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

Borel introduz o conceito de estratégias mistas (BOREL, 1953a, p.98). Como as matrizes C e A definidas por Borel, são matrizes de probabilidades então

$p'\cdot C\cdot q=\frac{1}{2}-\frac{p_1\cdot(q_2+q_3+q_4)}{3}+\frac{p_2\cdot(q_1-q_3+q_4)}{3}+\frac{p_3\cdot(q_1-q_2+q_4)}{3}+\frac{p_4\cdot(q_1-q_2-q_3)}{3}$, é a probabilidade de I vencer o jogo caso as escolhas de estratégias mistas, por parte de I e II, sejam $p'=(p_1,p_2,p_3)$ e $q'=(q_1,q_2,q_3)$, respectivamente. No exemplo acima, observe que o jogador I jamais deve escolher a linha 1 que implica $p'\cdot C\cdot q=\frac{1}{2}-\frac{(q_2+q_3+q_4)}{3}$, ou seja, a menos que o jogador II escolha a coluna 1, as chances de A vencer resultam menores que $\frac{1}{2}$. Entretanto, eliminada, a estratégia “um”, restam aquelas estratégias que correspondem às linhas de A onde pelo menos um elemento α_{hk} é positivo.

A maneira de eliminação de estratégias proposta por Borel implica que o jogador II deve escolher as estratégias “dois” ou “três” que resultam em $p'\cdot C\cdot q=\frac{1}{2}-\frac{p_1+p_3+p_4}{3}$ e $p'\cdot C\cdot q=\frac{1}{2}-\frac{p_1+p_2+p_4}{3}$, respectivamente contra o jogador I. Portanto, o melhor que o jogador II pode fazer é escolher a estratégia dois ou três indiferentemente, o que é coerente, pois o jogo é simétrico.

Dadas as escolhas das estratégias mistas $x,y\in\Delta_{p-1}$, onde $\Delta_{n-1}=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n, x_i\geq 0, x_1+\ldots+x_n=1\right\}$, a probabilidade do jogador I vencer é igual à $x'\cdot\left(\frac{1}{2}+A\right)\cdot y=\frac{1}{2}\cdot x'\cdot y+x'\cdot A\cdot y=\frac{1}{2}+x'\cdot A\cdot y$. Evidentemente, a probabilidade do jogador II vencer é igual à $x'\cdot\left(\frac{1}{2}-A\right)\cdot y=\frac{1}{2}\cdot x'\cdot y-x'\cdot A\cdot y=\frac{1}{2}-x'\cdot A\cdot y$. De fato, o que importa é matriz A e toda a análise recai sobre a forma bilinear $x'\cdot A\cdot y$.

No artigo de 1921, Borel analisa jogos com três estratégias no quais não existe uma maneira boa de jogar. Se, na matriz abaixo, $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & -\alpha_{31} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & -\alpha_{23} & 0 \end{pmatrix}$, dois, entre os números

α_{12}, α_{23} e α_{31}, têm sinais opostos, então uma linha da matriz é constituída de elementos positivos exceto pelo elemento da diagonal principal e, portanto, existem para ambos os jogadores estratégias ótimas puras. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$, a melhor estratégia para ambos os jogadores é $p = q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que resulta em probabilidades iguais de ambos vencerem. Portanto, estratégias mistas são as melhores se e só se os números α_{23}, α_{31} e α_{12} têm o mesmo sinal. Neste caso, se escolhemos $q_1 = \dfrac{\alpha_{23}}{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}}$, $q_2 = \dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}}$ e $q_3 = \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31}}$ então $A \cdot q = 0$ e, consequentemente, $\alpha = p' \cdot A \cdot q = 0$, independentemente da escolha de p. O jogador II pode, de qualquer maneira, assegurar chances iguais ao jogador I de vencer: "it is therefore possible to adopt a manner of playing which enables one to compete with even chances against every player" (BOREL, 1953a, p.98). Em resumo, no caso $n = 3$, de fato, Borel obteve o teorema minimax, pois existem estratégias mistas, p^* e q^* tais que $p^{*\prime} \cdot A \cdot q^* = 0$, e, portanto, $p \cdot A \cdot q^* \leq p^{*\prime} \cdot A \cdot q^* \leq p^{*\prime} \cdot A \cdot q$, para quaisquer outras escolhas $p \neq p^*$ e $q \neq q^*$. No entanto, a formulação não é na forma do teorema minimax.

Borel observa que, se o número de estratégias disponíveis é maior que sete, ou seja, a ordem n da matriz A é tal que $n > 7$, esta situação ocorre apenas em circunstâncias especiais, ou seja, para determinados valores de α_{ij}, e afirma que em geral é possível escolher q de maneira que α tenha o sinal determinado previamente independentemente da escolha de p (BOREL, 1953a, p. 98). Esta última afirmação é uma negação do teorema minimax, pois, se o jogador I escolhe a estratégia ótima p^*, então, pelo teorema minimax, $\alpha = 0 = p^{*\prime} \cdot A \cdot q^* \leq p^{*\prime} \cdot A \cdot q$, ou seja, o jogador II não tem a oportunidade de jogar de forma que sua chance de vencer seja maior que $\dfrac{1}{2}$. Borel conclui que "that the calculation of probabilities can serve only to facilitate elimination of bad manners of playing and the calculation of α_{ij}; for the rest, the art of play depends on psychology and not on mathematics" (BOREL, 1953a, p.99) . Borel, na verdade, opta por imaginar, contra o teorema minimax, que em jogos em geral sempre existe pelo menos uma estratégia que permita a quaisquer dos jogadores terem chance de vencer o jogo com probabilidade maior que $\dfrac{1}{2}$, independentemente da estrutura do jogo.

No breve artigo de 1927, Borel comenta o problema matemático central em relação à teoria dos jogos: "in two recent notes I have pointed out an algebraic problem concerning systems of linear equations with a skew symmetric determinant of odd order, to which one is led by the general theory of play" (BOREL, 1953c, p. 116). As notas recentes são os artigos de 1921 e 1924. O problema se refere à forma bilinear $G = x \cdot A \cdot y = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j$, onde $x, y \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz antissimétrica $n \times n$, e é enunciado no fim do artigo:

> Determine the a_{ik} such that for all nonnegative y_i there are Y_i nonzero and not all of the same sign. In this case, player A [I] can, by suitably choosing the x_i, give G the sign he wishes; i.e., win for certain on the average. This problem, unsolvable for n = 3 and n = 5, seems to me unsolvable also for n = 7. It would be interesting either to demonstrate that it is un-solvable in general or to give a particular solution. (BOREL, 1953c, p. 117)

Borel define $Y_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j$. O problema matemático formulado por Borel é sobre a matriz A e não sobre as escolhas dos jogadores. O problema é determinar as matrizes A tais que quaisquer que sejam a escolha de estratégia mista q feita pelo jogador II, resulte em Y_i não todos nulos e dentre estes alguns com sinais opostos, pois, apenas desta maneira tem o jogador I, a possibilidade de vencer. Em outras palavras, Borel quer investigar a existência de jogos em que escolhas erradas por parte de II, possibilitem a vitória de I. Borel afirma que este problema é insolúvel nos casos n = 3 e n = 5 porque nestes casos ele mostrou que existem estratégias $q's$ para o jogador II tais que $A \cdot q = 0$. O caso n = 5 foi tratado no artigo de 1924 (BOREL,1953b). O autor termina o artigo propondo aos leitores a busca de uma demonstração que este problema é insolúvel ou, caso em contrário, a apresentação de uma solução. Claramente, este não é o problema minimax resolvido por von Neumann.

No "Theory of games and Economic Behavior", von Neumann através do chamado "Teorema das Alternativas de von Neumann", mostra que sempre existe $q \in \Delta_{n-1}$, tal que $A \cdot q \leq 0$ e com algumas componentes $A \cdot q$ necessariamente nulas, pois não existe $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot q < 0$ (NEUMANN, 1953, p.143). Portanto, o jogador II não pode escolher uma estratégia que necessariamente implique para o jogador I um payoff esperado negativo. Se o jogador I, escolher uma estratégia mista $p \in \Delta_{n-1}$, $p \neq q$, o payoff esperado do jogador I é $p \cdot A \cdot q \leq 0$. O melhor que o jogador I, pode fazer é escolher a estratégia p. Portanto, o problema proposto por Borel tem uma resposta negativa: não é verdade que qualquer que seja $q \in \Delta_{n-1}$, $A \cdot q$ tem componentes negativas e positivas que permitam ao jogador I um payoff esperado positivo. Ou seja, o problema é insolúvel para matrizes simétricas de qualquer ordem. Borel ao buscar mostrar que o problema não tinha solução o restringiu demasiadamente ao estudar o caso $A \cdot q = 0$. A formulação adequada é $A \cdot q \leq 0$.

No artigo de 1924, Borel trata o conhecido problema de pedra-papel-tesoura e uma pequena modificação deste jogo. Neste trabalho, Borel emprega, como von Neumann fará em 1928, o payoff esperado dos jogadores. Se representamos este jogo na forma normal, a matriz dos payoffs dos jogador I, que joga pelas linhas, é $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Borel não escreve a matriz A acima e nem expressa o payoff esperado do jogador das linhas, $E(p,q) = x \cdot y' - x' \cdot y + y \cdot z' - y' \cdot z + z \cdot x' - z' \cdot x$, na forma

$$E(p,q) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Após um prolixo comentário sobre E, Borel acaba por concluir que a melhor estratégia para cada jogador é $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ e que o payoff máximo esperado é $E=0$. A seguir, Borel propõe uma modificação $A=\begin{pmatrix} 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e após algumas considerações análogas às que fez anteriormente conclui que se $s>1$, o jogador das linhas leva vantagem sobre o jogador das colunas pois seu payoff esperado é positivo, ou seja, $E>0$. Observemos que este jogo não é simétrico.

A seguir, Borel estuda o caso $n=5$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & k \\ -c & -f & -h & 0 & l \\ -d & -g & -k & -l & 0 \end{pmatrix},$$

que reduz à matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & -a_4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & a_2 & -a_5 \\ -a_1 & -1 & 0 & 1 & a_3 \\ a_4 & -a_2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & a_5 & -a_3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz é nulo, e as soluções do sistema homogêneo $A\cdot y=0$ são dados por

$$y_1=\frac{a_2\cdot a_3+a_5-1}{a_1\cdot a_2+a_4-1}\cdot y_5,\ y_2=\frac{a_3\cdot a_4+a_1-1}{a_1\cdot a_2+a_4-1}\cdot y_5,\ y_3=\frac{a_4\cdot a_5+a_2-1}{a_1\cdot a_2+a_4-1}\cdot y_5 \text{ e } y_4=\frac{a_1\cdot a_5+a_3-1}{a_1\cdot a_2+a_4-1}\cdot y_5,$$

se o denominador $a_1\cdot a_2+a_4-1\neq 0$. O denominador e os numeradores das frações acima correspondem a determinantes menores da matriz A. Por exemplo, $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=1$, implica que $y_1=y_2=y_3=y_4=y_5$. Borel, então, observa que

> In this case, positive values of the $y's$ may be found rendering all the $Y's$ zero. It is thus possible for the second player to so govern his play that G is always zero. The discussion is in this case completely analogous to that we made when there are only three manners of playing. Similarly one will find the rules to be followed by that player of the two to whom the rules give a slight advantage, if he is to be sure of profiting by that advantage, however, his adversary may play. (BOREL, 1953b, p. 110)

Se, por outro lado, os $D_i's$ não são todos de mesmo sinal, é impossível fazer $A\cdot y=0$ com valores positivos de $y's$ e “the second player cannot, therefore, if he does not make any

y zero, be protected against a sure loss if the first player knows his average manner of playing" (BOREL, 1953b, p. 111). Ou seja, Borel está afirmando contra o teorema minimax que, exceto em casos particulares, o jogador II, não tem maneira de se proteger contra uma probabilidade maior que $\frac{1}{2}$ de perder. Esta última afirmação nega aquela feita posteriormente no artigo de 1927 que este problema é insolúvel para n=5, ou seja, esta convicção firmou-se entre 1924 e 1927.

A leitura dos artigos de Borel não indicam que este autor, na nossa opinião, tenha pensado o teorema minimax. Ainda que tenha obtido este teorema para o caso $n = 3$ no artigo de 1921, afirma que "but it is easy to see that, once n exceeds 7, this circumstance will occur only for particular values of the α_{ik}. In general, whatever the $p's$ may be, it will be possible to choose the $q's$ in $\alpha = \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n}\alpha_{ik}\cdot p_i\cdot q_k = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=i-1}\alpha_{ik}\cdot\left(p_i\cdot q_k - p_k\cdot q_i\right)$ in such a manner that α has any sign determined in advanced" (Borel, 1921, p.98). No artigo de 1924, Borel insiste

> I will assume the hypothesis that, for n sufficiently larger, it is possible to so choose the constants that it is not possible to find positive nonzero values of the $y's$ in such fashion that all the $Y's$ should be all positive or zero (or else all negative and zero). Under these conditions, whatever the $y's$ may be, once they are determined, the $x's$ can be chosen in such fashion that G will be positive. (BOREL, 1953b, p. 114)

Como comentamos anteriormente, no "Theory of games and Economic Behavior", von Neumann através do chamado "Teorema das Alternativas de von Neumann", mostra que sempre existe $q \in \Delta_{n-1}$, tal que $A\cdot q \le 0$ e com algumas componentes de $A\cdot q$ necessariamente nulas. Portanto, o problema proposto por Borel tem uma resposta negativa.

No artigo de 1927, novamente, Borel propõe o problema de determinar as matrizes A de maneira que qualquer que seja a escolha $y \in \Delta_{m-1}$, seja sempre possível encontrar $x^* \in \Delta_{m-1}$ tal que $G > 0$. Ainda que este problema seja insolúvel para $n = 3$ e $n = 7$, Borel diz que seria interessante mostrar que é insolúvel em geral. Ora, isto não é o problema minimax, ainda que o teorema minimax responda a esta questão.

Podemos conjecturar que Borel estivesse pensando em classificar as matrizes A. Existem aquelas matrizes tais que existe $y^* \in \Delta_{m-1}$ e $A\cdot y^* = 0$. Obviamente, estas têm determinante nulo, e, portanto, as matrizes antissimétricas de ordem ímpar aparecem como candidatas naturais, ainda que reste o problema de exigir a condição $y^* \in \Delta_{m-1}$. Por isto, Borel trata apenas os casos $n = 3$, $n = 5$. Excetuando as matrizes anteriores, Borel parece pensar que o problema é determinar aquelas em que existe $x^* \in \Delta_{m-1}$ tal que $G > 0$, qualquer que seja a escolha $y \in \Delta_{m-1}$. Como restariam matrizes que não contemplam as duas possibilidades acima: "the player who does not observe the psychology of his partner and does not modify his manner of playing must necessarily lose against an adversary whose mind is sufficiently flexible to vary his play while taking account of that of the adversary" (BOREL, 1953b, p. 115). Ou seja, Borel acredita que excluindo situações particulares em relação às matrizes $A's$, sempre é possível determinar vetores $y^*(x) \in \Delta_{m-1}$ de maneira que $x\cdot A\cdot y^*(x) < 0$, fixada uma escolha $x \in \Delta_{m-1}$, ou vetores $x^*(y) \in \Delta_{m-1}$ de maneira que $x^*(y) \cdot A \cdot y > 0$, fixada a escolha $y \in \Delta_{m-1}$. E, Borel conclui “The knowledge of the psychology of the adversary must at each instance be taken into account to modify the rules of conduct that are adopted” (BOREL, 1953c, p. 115). Mas, isto é uma negação do teorema minimax que assegura que é possível, por exemplo, determinar $y^* \in \Delta_{m-1}$ de maneira que $x \cdot A \cdot y^* \leq 0$, qualquer que seja a escolha $x \in \Delta_{m-1}$, ou seja, y^* não depende do x fixado. Neste caso, não é possível determinar $x^*\left(y^*\right) \in \Delta_{m-1}$ de jeito que $x^*\left(y^*\right) \cdot A \cdot y^* > 0$.

Tanto no seu artigo (LEONARD,1992) quanto no seu livro (LEONARD, 2010), Robert Leonard enfatiza que Borel constantemente assinala as limitações da matemática para tratar problemas de psicologia humana. Este preconceito colaborou no sentido de dificultar o entendimento que é a estrutura matemática dos jogos que determina a existência de estratégias mistas ótimas, aos jogadores resta encontrá-las.

Von Neumann também tem responsabilidade em relação a confusão em relação ao teorema minimax, pois na nota do artigo de 1928, diz que “Borel formulates the question of bilinear forms for symmetric two-person game and states that no examples for $Max\,Min < Min\,Max$ are know. Our result above answers his question” (NEUMANN, 1959, p.25). Em 1953 na resposta a Fréchet, von Neumann continua pensando da mesma maneira: “in 1921 and thereafter, Borel surmised the theorem to be false or possible false” (NEUMANN, 1953, p. 125).

Von Neumann em Jogos Simétricos

É um fato notável que von Neumann não tenha feito uso dos trabalhos em inequações dos também húngaros, Gyula Farkas (1847-1930), Alfréd Haar (1855-1933), do matemático de Göttingen, Herman Minkowski (1864-1909) e desconhecesse o trabalho de Erich Stiemke. Como escreveu András Prékopa, o trabalho de Farkas passou a ser referência em inequações apenas depois do artigo “Nonlinear Programming” de Kuhn e Tucker em 1951 (PRÉKOPA, 1980). Aparentemente, von Neumann desconhecia a demonstração do teorema minimax pelo emprego dos teoremas de separação de convexos em 1941-42 até saber da existência de uma demonstração do matemático francês Jean Ville (1910-1989) via este método (KJELDSEN, 2001, p. 57). No artigo de 1976, sobre suas reminiscências em relação ao trabalho conjunto no “Teoria dos Jogos”, Morgenstern afirma

> “I went for a walk on a brilliant, snowy cold winter day. I went towards the Institute for Advanced Study and since I was cold, I walked into the library, looking around idly. I picked E. Borel´s Traité du Calcul de Probabilités, and there I saw in it suddenly a paper by Jean Ville dealing with Johnny´s 1928 paper. There, in restating Jonny´s minimax theory, instead of using Brouwer´s fixed point theorem, he gave a more elementary proof (Johnny´s two earlier proofs were definitely not elementary). I phoned Johnny to whom this as new.” (MORGENSTERN, 1976, p. 811)

Depois dos artigos da década de 1920, Émile Borel aparentemente não se interessou mais por jogos e seu trabalho último tratando deste assunto aparece num livro sobre teoria das probabilidades publicado em 1937 onde “quite strikingly there is no reference at all to von Neumann and the minimax theorem” (KJELDSEN, 2001, p. 57). O teorema minimax é tratado no mesmo livro por Jean Ville numa nota intitulada “Théorème de M. Von Neumann” e aí está a famosa “elementarization” que, como afirma Kjeldsen, estabelece o teorema minimax na teoria da convexidade. A “elementarization” iniciada por Ville é incorporada no “Teoria dos Jogos” de 1944 como a segunda demonstração de von Neumann do teorema minimax na seção 17.6 do “Teoria dos Jogos”.

O resultado básico que von Neumann apresentou para obter a nova demonstração do teorema minimax está na seção 16.4 e é atualmente conhecido como Alternativa de von Neumann (Neumann, 1953, p.138), do “Teoria dos Jogos”. Este resultado é o mesmo apresentado por Gale, Kuhn e Tucker no artigo “On the Symmetric Games” de 1950 (GALE, 1950).

Teorema das Alternativas de von Neumann: seja A uma matriz $m \times n$ então apenas uma das alternativas abaixo tem solução i) existe $x \in \Delta_{n-1}$, $A \cdot x \le 0$ ou ii) existe $w \in \Delta_{m-1}$, $w > 0$, $w' \cdot A > 0$. A demonstração deste resultado é obtida através dos teoremas de separação de convexos que está na seção 16.3 do “Teoria dos Jogos” (NEUMANN, 1953). Primeiramente, consideremos o fecho convexo C gerado pelas colunas da matriz A e pela base canônica do $\mathbb{R}^m$:

$$x^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ x^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, x^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \delta^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \text{ e } \delta^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Caso $0 \in C$, então existem $t_1, t_2, \ldots, t_n \ge 0$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \ge 0$ tais que $\sum_i t_i + \sum_l s_l = 1$ e $\vec{0} = t_1 \cdot x^1 + \cdots + t_n \cdot x^n + s_1 \cdot \delta^1 + \cdots + s_m \cdot \delta^m$. Ou, em termos das componentes, $-s_i = t_1 \cdot a_{i1} + \cdots + t_n \cdot a_{in}$. Se $\sum_i t_i = 0$, então $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Neste caso, $s_1 = s_2 = \cdots = s_m = 0$, o que é absurdo. Portanto, $\sum_i t_i > 0$, se definimos, $x_j = \dfrac{t_j}{\sum_i t_i}$, então $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Delta_{n-1}$ e $A \cdot x \le 0$. Caso $0 \notin C$, então, existe um hiperplano separando $\vec{0}$ e C estritamente, ou seja, existe um vetor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$, para todo $\vec{v} \in C$. Portanto, $\vec{a} \cdot \delta^i = a_i > 0$. Seja $w_i = \dfrac{a_i}{\sum_i a_i}$. Se definimos $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \Delta_{m-1}$, então, $w > 0$ e $w' \cdot A > 0$. Estas alternativas são obviamente excludentes. Se i) é válida, ou seja, existe $x \in \Delta_{n-1}$, $A \cdot x \le 0$, então ii) não é válida. Se por outro lado, ii) é válida, existe $w \in \Delta_{m-1}$, $w > 0$, $w' \cdot A > 0$, então i) não é válida.

A partir deste resultado, von Neumann e Morgenstern (NEUMANN, 1953, p. 143) concluem que para uma matriz antissimétrica A, $n \times n$, existe $x \in \Delta_{n-1}$, $A \cdot x \le 0$. Pois, para uma matriz antissimétrica A, a alternativa ii) não é válida. Se a alternativa ii) fosse válida, existiria $w \in \Delta_{m-1}$, $w > 0$, $w' \cdot A > 0$, que implica $w' \cdot A \cdot w > 0$ e $w' \cdot A' \cdot w > 0$, mas $A' = -A$, então

$w' \cdot (-A) \cdot w > 0$, ou seja, $w' \cdot A \cdot w < 0$, o que é absurdo. Observemos que ao demonstrar que a alternativa ii) - $\exists w \in \Delta_{m-1}, w > 0, w' \cdot A > 0$ - não é válida, von Neumann sublinha matematicamente o que Borel observou "it is evident, by reason of the same symmetry, that it is not possible to formulate advice permitting one of the players to win for sure; because if his adversary followed this same advice, he must also win for sure" (BOREL, 1953b, p. 102).

O artigo "Solutions of Games by Differential Equations", de von Neumann em co-autoria com G. W. Brown, foi publicado em 1950 no n° 24 do Annals of Mathematic Studies, o volume I do "Contributions To The Theory of Games" (NEUMANN, 1950). Segundo Samuel Karlin, o método via equações diferenciais de Brown e von Neumann buscava esclarecer o método interativo proposto por Brown no artigo "Some Notes on Computation of Games Solutions" de 1949 (KARLIN, 1959). Neste artigo, os autores apresentam uma nova demonstração para existência de selas em jogos simétricos. Na verdade, temos uma nova demonstração do resultado que para uma matriz antissimétrica A, $m \times m$, existe $x \in \Delta_{n-1}$, $A \cdot x \leq 0$.

Considerando uma matriz antissimétrica $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}$ e os vetores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ e $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ de maneira que $u = A \cdot x$, definimos $u_i = \sum_j A_{ij} \cdot x_j$, $\varphi(u_i) = \max(0, u_i)$, $\phi(x) = \sum_i \varphi(u_i)$ e $\psi(x) = \sum_i (\varphi(u_i))^2$. Seja o sistema de equações diferenciais $x_i'(t) = \varphi(u_i(x(t))) - \phi(x(t)) \cdot x_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, e valor inicial $x(0) = x^0 \in \Delta_{m-1}$.

Suponhamos que exista $t_1 > 0$, tal que $x_i(t_1) < 0$, como $x_i(0) \geq 0$, então existe $t_0 < t_1$, máximo tal que $x_i(t_0) = 0$. Portanto, se t é tal que $t_0 < t < t_1$ então $x_i(t) < 0$. Pelo teorema do valor médio, existe $\bar{t}$, $t_0 < \bar{t} < t_1$ tal que $\frac{x_i(t_1) - x_i(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{x_i(t_1)}{t_1 - t_0} = x_i'(\bar{t}) < 0$. Pela observação anterior, $x_i(\bar{t}) < 0$. Como $x_i'(\bar{t}) = \varphi(u_i(\bar{t})) - \phi(x(\bar{t})) \cdot x_i(\bar{t}) \geq 0$, o que é uma contradição. Portanto, não pode existir $t > 0$ tal que $x_i(t) < 0$, ou seja, $x_i(t) \geq 0$, para $t \geq 0$.

Por outro lado, somando e derivando

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i(t)\right) = \sum_i x_i'(t) = \sum_i \varphi(u_i(t)) - \phi(x(t)) \cdot \sum_i x_i(t) = \phi(x(t)) - \phi(x(t)) \cdot \sum_i x_i(t),$$

ou seja, $\frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i(t)\right) = \phi(x(t)) \cdot \left(1 - \sum_i x_i(t)\right)$.

Sabemos que $\sum_i x_i(0) = 1$. Suponhamos que exista $t_1 > 0$, tal que $\sum_i x_i(t_1) \neq 1$, então

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left|1-\sum_i x_i(t)\right|\right)_{t=t_1} = \frac{1}{\left(1-\sum_i x_i(t_1)\right)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i(t_1)\right) = -\phi(x(t_1)) < 0,$$

portanto, $\sum_i x_i(t_1) < 1$. Pelo teorema do valor médio, $\frac{\sum_i x_i(t_1)-1}{t_1} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i(t)\right)_{t=\bar{t}} < 0$, mas $\sum_i x_i(\bar{t}) < 1$, o que implica que $\frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i(t)\right)_{t=\bar{t}} = \phi(x(\bar{t}))\cdot\left(1-\sum_i x_i(\bar{t})\right) > 0$, o que é uma contradição. Logo, $\sum_i x_i(t) = 1$, para todo $t \geq 0$. A conclusão é que $x(t) \in \Delta_{m-1}$, para $t \geq 0$.

A próxima etapa é mostrar que $\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = -2\cdot\phi(x(t))\cdot\psi(x(t))$. Como $\psi(x) = \sum_i (\varphi(u_i))^2$, consideramos aquelas parcelas tais que $\varphi(u_i) = \max(0,u_i) > 0$, $\varphi(u_i) = u_i$ e, como $u_i = \sum_j A_{ij}\cdot x_j$, então

$$\frac{d}{dt}\varphi(u_i(t)) = \frac{d}{dt}u_i(t) = \sum_j A_{ij}\cdot x'_j(t) = \sum_j A_{ij}\cdot\left[\varphi(u_j(t)) - \phi(x(t))\cdot x_j(t)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(u_i(t)) = \sum_j A_{ij}\cdot\varphi(u_j(t)) - \phi(x(t))\cdot\sum_j A_{ij}\cdot x_j(t).$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(u_i(t))\right]^2 = 2\cdot\varphi(u_i(t))\cdot\frac{d}{dt}\varphi(u_i(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(u_i(t))\right]^2 = 2\cdot\varphi(u_i(t))\cdot\left[\sum_j A_{ij}\cdot\varphi(u_j(t)) - \phi(x(t))\cdot\sum_j A_{ij}\cdot x_j(t)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(u_i(t))\right]^2 = 2\cdot\sum_j A_{ij}\cdot\varphi(u_i(t))\cdot\varphi(u_j(t)) - 2\cdot\phi(x(t))\cdot\sum_j A_{ij}\cdot\varphi(u_i(t))\cdot x_j(t).$$

Somando sobre os índices i, resulta

$$\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = 2\cdot\sum_{i,j} A_{ij}\cdot\varphi(u_i(t))\cdot\varphi(u_j(t)) - 2\cdot\phi(x(t))\cdot\sum_{i,j} A_{ij}\cdot\varphi(u_i(t))\cdot x_j(t) \ ,$$

mas $\sum_{i,j} A_{ij}\cdot\varphi(u_i(t))\cdot\varphi(u_j(t)) = 0$, porque a matriz A é antissimétrica. Portanto,

$\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = -2\cdot\phi(x(t))\cdot\sum_i\left(\varphi(u_i(t))\cdot\sum_j A_{ij}\cdot x_j(t)\right) = -2\cdot\phi(x(t))\cdot\sum_i \varphi(u_i(t))\cdot u_i(t)$.Como $\sum_i \varphi(u_i(t))\cdot u_i(t) = \psi(x(t))$, resulta $\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = -2\cdot\phi(x(t))\cdot\psi(x(t))$.

Para quaisquer $a_1,\ldots,a_m$, temos que $\left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2} \leq \sum_i |a_i| \leq \left(m\cdot\sum_i a_i^2\right)^{1/2}$. Logo, $\left(\psi\left(x(t)\right)\right)^{1/2} \leq \phi\left(x(t)\right) \leq \left(m\cdot\psi\left(x(t)\right)\right)^{1/2}$. Portanto, $\frac{d}{dt}\psi\left(x(t)\right) \leq -2\cdot\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{3/2}$, ou, $-\frac{1}{2}\cdot\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{-3/2}\cdot\frac{d}{dt}\psi\left(x(t)\right) \geq 1$. De maneira similar, $\frac{d}{dt}\psi\left(x(t)\right) \leq -2\cdot m^{1/2}\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{3/2}$.

Pelo teorema do valor médio,

$$\frac{\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{-1/2} - \left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{-1/2}}{t} = -\frac{1}{2}\cdot\left[\psi\left(x(\bar{t})\right)\right]^{-3/2}\cdot\frac{d}{dt}\psi\left(x(t)\right)_{t=\bar{t}} \geq 1.$$

Portanto, $\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{-1/2} \geq \left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{-1/2} + t$, ou, $\frac{1}{\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{1/2}} \geq \frac{1}{\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}} + t$, ou ainda, $\left[\psi\left(x(t)\right)\right]^{1/2} \leq \frac{1}{\frac{1}{\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}} + t}$, que resulta, $\psi\left(x(t)\right) \leq \frac{\psi\left(x(0)\right)}{\left[1+\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}\cdot t\right]^2}$.

Da mesma maneira, inferimos que $\varphi(u_i) \leq \phi\left(x(t)\right) \leq \left(m\cdot\psi\left(x(t)\right)\right)^{1/2} \leq \frac{m^{1/2}\cdot\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}}{\left[1+\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}\cdot t\right]}$.

Das desigualdades $\psi\left(x(t)\right) \leq \frac{\psi\left(x(0)\right)}{\left[1+\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}\cdot t\right]^2}$, $\phi\left(x(t)\right) \leq \frac{m^{1/2}\cdot\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}}{\left[1+\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}\cdot t\right]}$ e $\varphi(u_i) \leq \frac{m^{1/2}\cdot\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}}{\left[1+\left[\psi\left(x(0)\right)\right]^{1/2}\cdot t\right]}$, obtemos que $\lim_{t\to+\infty}\psi\left(x(t)\right) = 0$, $\lim_{t\to+\infty}\phi\left(x(t)\right) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty}\varphi\left(u_i(t)\right) = 0$. Como $x(t) \in \Delta_{m-1}$, então $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = u^\infty$. Mas, $\lim_{t\to+\infty}\varphi\left(u_i(t)\right) = \varphi\left(u_i^\infty\right) = 0$. Mas, neste caso, $u_i^\infty = \sum_j A_{ij}\cdot x_j^\infty \leq \max\left(0, u_i^\infty\right) = 0$, ou seja, $u_i^\infty = \sum_j A_{ij}\cdot x_j^\infty \leq 0$, ou ainda, $A\cdot x^\infty \leq 0$.

Desta maneira, se estabelece novamente o resultado 16:G da página 143 do “Game Theory (NEUMANN, 1953).

Dada a escolha inicial $x^0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix}$, por parte do jogador das colunas (II), resulta $u_i^0 = \sum_j A_{ij}\cdot x_j^0$. Possivelmente, alguns destes u_i^0 são negativos ou nulos e outros positivos. Não pode ocorrer que sejam todos positivos, pois para matrizes antisimétricas não existem $w's$ tais que $w \in \Delta_{m-1}$, $w > 0$, $A \cdot w = u > 0$. Observe que se $u_i^0 \leq 0$ então $x_i'(0) = -\phi(x(0)) \cdot x_i(0) \leq 0$, pois $\phi(x(0)) \leq 0$, portanto, na proximidade de zero, x_i é não crescente. Caso todos os $u_i^0 \leq 0$, então $x_i'(0) = 0$, pois x^0 é uma estratégia ótima. Por outro lado, se $u_i^0 > 0$ então $x_i'(0) == u_i(0) \cdot (1 - x_i(0)) - (u_1(0) + \ldots + u_m(0)) \cdot x_i(0)$, onde, obviamente, na última parcela $(u_1(0) + \ldots + u_m(0))$ está omitido $u_i(0)$. Caso $(u_1(0) + \ldots + u_m(0)) = 0$, então $x_i'(0) = u_i(0) \cdot (1 - x_i(0)) > 0$, se $x_i(0) < 1$, ou seja, x_i é crescente na proximidade de zero. Se esta situação se manter, resulta $x_i(t) = 1$, então $A \cdot e_i \leq 0$ e e_i é uma estratégia ótima. O crescimento de x_i é limitado pela parcela $(u_1(0) + \ldots + u_m(0)) \cdot x_i(0)$, na medida em que outros u_i sejam positivos já que neste caso outros x_i são possivelmente não decrescentes e os $x(t) \in \Delta_{m-1}$.

A seguir, von Neumann e Brown propõem um método de simetrização. Dada uma matriz $A = (A_{ij})$, $m \times n$, definimos a matriz antissimétrica S tal que $S_{ij|kl} = A_{il} - A_{kj}$. Sem dúvida, S, $(m \cdot n) \times (m \cdot n)$, é antissimétrica, pois $S_{kl|ij} = A_{kj} - A_{il} = -S_{ij|kl}$. Portanto, existe $u^* \in \Delta_{m+n-1}$, $u^{*\prime} \cdot S \geq 0$, ou seja, $\sum_{i,j} u_{ij}^* \cdot S_{ij|kl} = \sum_{i,j} u_{ij}^* \cdot (A_{il} - A_{kj}) = \sum_{i,j} u_{ij}^* \cdot A_{il} - \sum_{i,j} u_{ij}^* \cdot A_{kj} \geq 0$.

Se $x_i^* = \sum_j u_{ij}^* \in \Delta_{m-1}$ e $y_j^* = \sum_i u_{ij}^* \in \Delta_{n-1}$, então $\sum_i x_i^* \cdot A_{il} \geq \sum_j A_{kj} \cdot y_j^*$, para todo l e k.

Portanto, $\sum_i x_i^* \cdot A_{ir} = \min_l \sum_i x_i^* \cdot A_{il} \geq \max_k \sum_j A_{kj} \cdot y_j^* = \sum_j A_{sj} \cdot y_j^*$. A partir daí temos,

$\sum_{i,j} x_i \cdot A_{ij} \cdot y_j^* = \sum_i x_i \cdot \left(\sum_j A_{ij} \cdot y_j^* \right) \leq \sum_i x_i \cdot \left(\sum_j A_{sj} \cdot y_j^* \right) = \sum_j A_{sj} \cdot y_j^*$, para $x \in \Delta_{m-1}$. Da mesma maneira, $\sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ij} \cdot y_j = \sum_j y_j \cdot \left(\sum_i A_{ij} \cdot x_i^* \right) \geq \sum_j y_j \cdot \left(\sum_i A_{ir} \cdot x_i^* \right) = \sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ir}$, para $y \in \Delta_{n-1}$. Logo,
$\sum_{i,j} x_i \cdot A_{ij} \cdot y_j^* \leq \sum_j A_{sj} \cdot y_j^* \leq \sum_i x_i^* \cdot A_{ir} \leq \sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ij} \cdot y_j$.Então,
$\sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ij} \cdot y_j^* \leq \sum_j A_{sj} \cdot y_j^* \leq \sum_i x_i^* \cdot A_{ir} \leq \sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ij} \cdot y_j^*$.
Portanto $\sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ij} \cdot y_j^* = \sum_j A_{sj} \cdot y_j^* = \sum_i x_i^* \cdot A_{ir} = \sum_{i,j} x_i^* \cdot A_{ij} \cdot y_j^*$, ou seja,

$$x' \cdot A \cdot y^* \leq x^{*\prime} \cdot A \cdot y^* \leq x^{*\prime} \cdot A \cdot y.$$

Na verdade, os autores estabelecem o seguinte resultado: todo o jogo tem uma solução minimax se e só se todo o jogo simétrico tem solução minimax.

Gale, Kuhn e Tucker em Jogos Simétricos

Como temos observado, para uma matriz antissimétrica A, a existência de um vetor $x^* \in \Delta_{m-1}$ tal que $A \cdot x^* \leq 0$, implica a existência de um ponto de sela pois $x^{*\prime} \cdot A \geq 0$ e, portanto, $y' \cdot A \cdot x^* \leq x^{*\prime} \cdot A \cdot x^* \leq x^{*\prime} \cdot A \cdot z$ para $y, z \in \Delta_{m-1}$. No Annals of Mathematics Studies nº 24, “Contributions to the Theory of Games”, v. I, publicado em setembro de 1950, no artigo “On Symmetric Games”, David Gale, Harold Kuhn e Albert Tucker fornecem uma demonstração que para qualquer matriz antissimétrica A, existe $x^* \in \Delta_{m-1}$ tal que $A \cdot x^* \leq 0$ (GALE, 1950). A demonstração se apoia numa resultado conhecido como “Teorema de Stiemke”: dada uma matriz A, $m \times n$, então vale apenas uma das alternativas i) $A \cdot v = 0$ para algum $v > 0$ ou ii) $A' \cdot u \gneqq 0$ para algum $u \in \mathbb{R}^m$. O símbolo $v \gneqq 0$ significa que as componentes v_i do vetor v são tais que $v_i \geq 0$ e existe pelo menos uma $v_j > 0$. Os autores comentam que o resultado de Stiemke publicado em 1915 é pouco conhecido e que fornece uma prova direta do teorema minimax para matrizes antissimétricas (GALE, 1950, p. 87). A demonstração do deste resultado é simples.

Teorema de Stiemke: dada uma matriz A, $m \times n$, então vale apenas uma das alternativas i) $A \cdot v = 0$ para algum $v > 0$ ou ii) $A' \cdot u \gneqq 0$ para algum $0 \neq u \in \mathbb{R}^m$. Digamos que vale i), ou seja, existe $v_0 \in \mathbb{R}^n, v_0 > 0$, $A \cdot v_0 = 0$. Neste caso, não pode existir $u \in \mathbb{R}^m$, $A' \cdot u \gneqq 0$, pois, caso existisse, teríamos $v_0' \cdot A' \cdot u > 0$, mas $u' \cdot A \cdot v_0 = 0$. Portanto, não vale ii). Por outro lado, se vale ii), ou seja, $A' \cdot u_0 \gneqq 0$ para algum $u_0 \in \mathbb{R}^m$, então, para qualquer $v > 0$, $v \cdot A' \cdot u_0 > 0$, portanto, $A \cdot v \neq 0$, ou seja, não vale i).

Primeiramente, os autores estabelecem dois novos conjuntos de alternativas, corolário 1 e 2, a partir do Teorema de Stiemke (GALE, 1950, p. 84). Seja S matriz $m \times n$, então vale apenas uma das alternativas i) $S \cdot v < 0$ para algum $v > 0$ ou ii) $u' \cdot S \geq 0$ para algum $0 \leq u$, $0 \neq u$. O resultado se estabelece facilmente aplicando as alternativas de Stiemke à matriz

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{21} & \cdots & s_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & I_{m \times m} \end{pmatrix}.$$

Digamos que vale a alternativa i), ou seja, existe $v^* \in \mathbb{R}^n, v^* > 0$, $S \cdot v^* < 0$, isto é,

$$\begin{gathered} s_{11} \cdot v_1^* + s_{12} \cdot v_2^* + \cdots + s_{1n} \cdot v_n^* = -v_{n+1}^* < 0 \\ s_{21} \cdot v_1^* + s_{22} \cdot v_2^* + \cdots + s_{2n} \cdot v_n^* = -v_{n+2}^* < 0 \\ \vdots \\ s_{m1} \cdot v_1^* + s_{m2} \cdot v_2^* + \cdots + s_{mn} \cdot v_n^* = -v_{n+m}^* < 0. \end{gathered}$$

Então,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{21} & \cdots & s_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \\ v_{n+1}^* \\ \vdots \\ v_{n+m}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & I_{m \times m} \end{pmatrix} \cdot \overline{v}^* = 0,$$

isto é, $\begin{pmatrix} S & I_{m \times m} \end{pmatrix} \cdot \overline{v}^* = 0$ e $\overline{v}^* > 0$, ou seja, vale a alternativa i) no Teorema de Stiemke, logo não existe $u \in \mathbb{R}^m$, $u \neq 0$, $u' \cdot \begin{pmatrix} S & I_{m \times m} \end{pmatrix} \geq 0$ e $u' \cdot \begin{pmatrix} S & I_{m \times m} \end{pmatrix} \neq 0$, ou seja,

$$
\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{21} & \cdots & s_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \cdot S & u \end{pmatrix} \geq 0 .
$$

Portanto, não existe $u \in \mathbb{R}^m$, $u' \cdot S \geq 0$, $0 \leq u$, $0 \neq u$,isto é, não vale ii).

Se por outro lado, se supomos que vale ii), ou seja, existe $u_0 \in \mathbb{R}^m$, $u_0' \cdot S \geq 0$, $0 \leq u_0$, $0 \neq u_0$, então $\begin{pmatrix} u_0' \cdot S & u_0 \end{pmatrix} \geq 0$, $\begin{pmatrix} u_0' \cdot S & u_0 \end{pmatrix} \neq 0$. Pelo teorema de Stiemke, portanto, não existe $0 < \overline{v} \in \mathbb{R}^{n+m}$, tal que $\begin{pmatrix} S & I_{m \times m} \end{pmatrix} \cdot \overline{v} = 0$, ou seja, não existe, $v \in \mathbb{R}^n$, $v > 0$, $S \cdot v < 0$. Em outras palavras, não vale i).

O segundo resultado, a partir do anterior, estabelece um conjunto de alternativas para matrizes antissimétricas. Seja S matriz antissimétrica $m \times m$, então vale apenas uma das alternativas i) $u' \cdot S \geq 0$ para algum, $0 \neq u$, $0 \leq u$ ou ii) $v' \cdot S > 0$ para algum v, $0 < v$. Para demonstrar este resultado, utilizando a alternativa anterior, basta observar que a antissimetria implica que se $S \cdot v < 0$ então $v' \cdot S > 0$. Digamos que vale i), então, não existe $v > 0$, $S \cdot v < 0$, ou seja, $v' \cdot S' < 0$, mas $S' = -S$. Logo, não existe $v > 0$, $v' \cdot S > 0$, isto é, não vale ii). Por outro lado, se vale ii), ou seja, existe $v_0 > 0$, $v_0' \cdot S > 0$ então, $v_0' \cdot S \cdot u > 0$, para $0 \leq u$ e $0 \neq u$, ou seja, $u' \cdot S \cdot v_0 < 0$, portanto, não pode existir $u' \cdot S \geq 0$, para $0 \leq u$ e $0 \neq u$, ou seja, não vale i).

Com este último resultado, os autores (GALE, 1950, p. 84) mostram que para matrizes antissimétricas S sempre existe $0 \leq u$, $0 \neq u$, tal que $u' \cdot S \geq 0$. Novamente, é resultado 16:G do “Theory of Games” (NEUMANN, 1953, p. 143). A alternativa ii) do parágrafo anterior não é válida para matrizes antissimétricas, pois, se existisse $v_0 > 0$, $v_0' \cdot S > 0$, então, $v_0' \cdot S \cdot v_0 > 0$, neste caso, $0 < \left(v_0' \cdot S \cdot v_0 \right)' = v_0' \cdot S' \cdot v_0 = -v_0' \cdot S \cdot v_0 < 0$, o que é absurdo.

Como para matrizes antissimétricas S sempre existe $0 \leq u$, $0 \neq u$, tal que $u' \cdot S \geq 0$, normalizando u, isto é, fazendo $u^* = \dfrac{1}{u_1 + \cdots + u_m} \cdot u \in \Delta_{m-1}$, então u^* satisfaz a condição minimax, pois $y' \cdot S \cdot u^* \leq u^{*\prime} \cdot S \cdot u^* \leq u^{*\prime} \cdot S \cdot z$ para todo $y, z \in \Delta_{m-1}$. Observe que $u^{*\prime} \cdot S \cdot u^* = 0$, $y' \cdot S \cdot u^* \leq 0$ e $u^{*\prime} \cdot S \cdot z \geq 0$. Observe que se $u' \cdot S \geq 0$, $0 \leq u$, $0 \neq u$ então necessariamente algumas componentes de $u' \cdot S$ são nulas, pois não podemos ter $u' \cdot S > 0$, pois isto implicaria $u' \cdot S \cdot u > 0$ e $u' \cdot S \cdot u < 0$, o que é absurdo.

Como os autores enfatizam, utilizar o Teorema de Stiemke para obter o resultado anterior se explica pela demonstração inteiramente algébrica fornecida por Stiemke, ou seja, sem uso dos resultados de separação de convexos. Isto é importante, se estamos procurando procedimentos computacionais que nos permitam obter as soluções de jogos de soma-zero e não simplesmente afirmar a existência destas soluções.

Supondo a existência de sela para uma matriz qualquer, os autores mostram que os equilíbrios e o valor do jogo podem ser obtidos através de um processo de simetrização (GALE, 1950, p. 83). Para provar este resultado, os autores supõe um jogo qualquer, dado por uma matriz A, $m \times n$, cujo valor v seja positivo. Sempre podemos somar um número em todas as entradas da matriz A, $m \times n$, de maneira que o valor do jogo seja positivo sem com isto alterar a existência e e própria solução minimax. Seja a matriz antissimétrica S, $(m+n+1)\times(m+n+1)$, definida por

$$S=\begin{pmatrix} 0 & A & -1 \\ -A' & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} & -1 \\ \vdots & m\times m & \vdots & \vdots & m\times n & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & -1 \\ \hline -a_{11} & \cdots & -a_{m1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & n\times m & \vdots & \vdots & n\times n & \vdots & \vdots \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Pelo resultado anterior, existe uma estratégia $z=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix}$ tal que $z\geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i+\sum_{j=1}^{n} y_j+\lambda=1$ e $z'\cdot S\geq 0$. Portanto, se notamos por $\vec{1}=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^k$, $\left(\left(-A\cdot y+\lambda\cdot\vec{1}\right)\ \left(A'\cdot x-\lambda\cdot\vec{1}\right)\ \left(-\sum_{i=1}^{m} x_i+\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\right)\geq 0$, isto é, $-A\cdot y+\lambda\cdot\vec{1}\geq 0$, $A'\cdot x-\lambda\cdot\vec{1}\geq 0$ e $-\sum_{i=1}^{m} x_i+\sum_{j=1}^{n} y_j\geq 0$, ou, ainda, $-\sum_j a_{ij}\cdot y_j+\lambda\geq 0$, $\sum_i a_{ij}\cdot x_i-\lambda\geq 0$ e $-\sum_i x_i+\sum_j y_j\geq 0$. Se supomos que $\sum_j y_j=0$, então $-\sum_i x_i\geq 0$, mas $\sum_i x_i\geq 0$, neste caso, $x=0$, $y=0$ e $\lambda=0$, o que é impossível pois $\sum_{i=1}^{m} x_i+\sum_{j=1}^{n} y_j+\lambda=1$. Portanto, $\mu=\sum_j y_j>0$. Seja $y^*=\frac{1}{\mu}\cdot y\in\Delta_{n-1}$. Se supomos que $\lambda=0$, então $-A\cdot y\geq 0$, ou, $A\cdot y\leq 0$. Se x^{**} e y^{**} é uma das soluções minimax para A,então $v=x^{**\prime}A\cdot y^{**}\leq x^{**\prime}A\cdot y^*\leq 0$, mas, estamos supondo que $v>0$, logo $\lambda>0$. Como,$\sum_j a_{ij}\cdot y_j\leq\lambda$, então $x'\cdot A\cdot y\leq\lambda\cdot\sum_i x_i$. Por outro lado, $\sum_i a_{ij}\cdot x_i\geq\lambda$, o que implica que $x'\cdot A\cdot y\geq\lambda\cdot\sum_j y_j$. A conclusão é que $\lambda\cdot\sum_j y_j\leq\lambda\cdot\sum_i x_i$. Portanto, $\sum_j y_j=\sum_i x_i=\mu$. Seja $x^*=\frac{1}{\mu}\cdot x\in\Delta_{m-1}$. Como, $\sum_j a_{ij}\cdot y_j\leq\lambda$, então $\sum_j a_{ij}\cdot y_j^*\leq\frac{\lambda}{\mu}$, logo, $x^*\cdot A\cdot y^*\leq\frac{\lambda}{\mu}$. Por outro lado, $\sum_i a_{ij}\cdot x_i\geq\lambda$, implica $\sum_i a_{ij}\cdot x_i^*\geq\frac{\lambda}{\mu}$, logo, $x^*\cdot A\cdot y^*\geq\frac{\lambda}{\mu}$. E a conclusão é que $x^*\cdot A\cdot y^*=\frac{\lambda}{\mu}$.

No Annals of Mathematics Studies nº 37, “Lectures on the Theory of Games”, resultado de cursos ministrados por Harold Kuhn na década de 1950, mas publicado apenas em 2003, Kuhn fornece uma nova demonstração que para qualquer matriz antissimétrica A, existe $x^*\in\Delta_{m-1}$ tal que $A\cdot x^*\geq 0$ (KUHN, 2003). Para a demonstração da segunda proposição, Kuhn usa o chamado Lema de Farkas do qual fornece uma demosntração elementar, ou seja, sem o uso dos teoremas de separação de convexos (KUHN, 2003, p. 49) .

Dados os vetores $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, ..., $v_m = v_1 = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,..., $e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$, se u está no cone positivo gerado por v_1, ..., v_m, e_1, ..., e_m então existem $\alpha_i \geq 0$ tais que $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_m \cdot v_m + \alpha_{m+1} \cdot e_1 + \cdots \alpha_{2m} \cdot e_m$. Em termos das componentes dos vetores, temos que para todo o i, $-1 = \alpha_1 \cdot a_{i1} + \cdots + \alpha_m \cdot a_{im} + \alpha_{m+i}$. Se multiplicamos a equação anterior por α_i, obtemos $-\alpha_i = \alpha_i \cdot \alpha_{m+i}$, para todo $i = 1, \ldots, m$, pois $\alpha_i \cdot a_{i1} \cdot \alpha_1 + \cdots + \alpha_i \cdot a_{im} \cdot \alpha_m = 0$, porque a matriz A é antissimétrica, portanto, $\alpha' \cdot A \cdot \alpha = 0$. Mas, $-\alpha_i = \alpha_i \cdot \alpha_{m+i}$ implica que se $\alpha_i \neq 0$, para algum $i = 1, \ldots, m$, então $\alpha_{m+i} = -1$, o que é absurdo. Logo, $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Então, $u = \alpha_{m+1} \cdot e_1 + \cdots \alpha_{2m} \cdot e_m$ o que implica $\alpha_{m+i} = -1$, para todo $i = 1, \ldots, m$, o que novamente é absurdo. Portanto, por Farkas, existe $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ tal que $x_1 = x' \cdot e_1 \geq 0$, ..., $x_m = x' \cdot e_m \geq 0$ e $-x_1 - \cdots - x_m = x' \cdot u < 0$, ou seja, $x_1 + \cdots + x_m > 0$. . E, como $x' \cdot v_1 \geq 0$, ..., $x' \cdot v_m \geq 0$ então $x' \cdot A \geq 0$, ou ainda, $A \cdot x \leq 0$. Seja $x^* = \dfrac{1}{x_1 + \cdots + x_m} \cdot x \in \Delta_{m-1}$ então $A \cdot x^* \leq 0$. Novamente, temos a proposição 16:G. Neste caso, x^* satisfaz a condição minimax pois $y' \cdot A \cdot x^* \leq x^{*\prime} \cdot A \cdot x^* \leq x^{*\prime} \cdot A \cdot z$ para todo $y, z \in \Delta_{m-1}$ (KUHN, 2003, p. 51).

Conclusão

Como é relativamente sabido em 1953, Maurice Fréchet, famoso matemático francês, publicou e comentou, nas páginas da Econometrica, os artigos do conterrâneo Émile Borel sobre teoria dos jogos (FRÉCHET, 1953). O juízo normalmente aceito que Borel teria estabelecido o teorema minimax para jogos com 3 e 5 estratégias puras e duvidado da validade geral do resultado se origina, na nossa opinião, da leitura, profundamente influenciada por von Neumann, que Fréchet fez dos trabalhos de Borel. Uma análise mais atenta dos trabalhos de Borel não fornece elementos que justifiquem tal compreensão. Borel não concebeu o problema matemático dos jogos como um problema minimax.

Comentando a observação de Ulam que “early in his [von Neumann] work, a paper by Borel on the minimax property led him to develop in the paper, “Zur Theorie der Gesellschaft-Spiele” ideas which culminated later in one of his most original creations, the theory of games” (ULAM, 1958, p. 7), Philip Mirowski observa que

> in contrast to who claims that von Neumann derived his inspiration from Borel, I think that is more likely that the formalist program lent itself rather readily to a notion of the axiomatization of games, and that von Neumann’s distress at Fréchet claim that Borel should be considered the inventor of game theory derives from this source rather than simply from wounded ego. (MIROWSKI, 1992, p. 118).

O comentário de Ulam é suficientemente vago de maneira a promover a polêmica em torno da prioridade sobre a propriedade minimax. Acreditamos que a opinião de Mirowski esteja essencialmente correta, mesmo no caso em que a inspiração de von Neumann sobre o minimax se originasse efetivamente do artigo de Borel de 1927. Entretanto, não podemos deixar de levar em conta que von Neumann afirma que tomou conhecimento do artigo de Borel após a conclusão do seu artigo sobre a propriedade minimax (NEUMANN, 1953, p. 25). Ou seja, a demonstração da existência de equilíbrios via minimax é inteiramente criação de von Neumann.

Borel buscava provar que em qualquer jogo simétrico sempre existe uma maneira de vencer independentemente da forma como o oponente jogue. Esta busca o conduziu uma formulação imperfeita do teorema das alternativas que, finalmente, foi obtida por von Neumann no "Theory of Games" (NEUMANN, 1953).

A generalidade do resultado obtido por von Neumann em 1928 dispensou um resultado particular para jogos simétricos. Apenas, em 1944, no livro "Theory of Games and Economic Behavior" dará atenção aos jogos simétricos. Depois em 1950, apresenta uma nova demonstração da existência de equilíbrio para jogos simétricos através do uso de equações diferenciais. Neste mesmo artigo, von Neumann mostra a conexão existente entre jogos simétricos e os outros jogos através do seu processo de simetrização, ou seja, todo o jogo pode ser expresso como um jogo simétrico. Estes resultados encerram a análise iniciada por Borel através dos jogos simétricos. Em outras palavras, von Neumann mostra que ênfase dada por Borel aos jogos simétricos estava essencialmente correta e que a demonstração de existência de equilíbrio para estes jogos conduziria a demonstração da existência de equilíbrio para jogos em geral.

Respondendo a Fréchet (FRÉCHET, 1953), Von Neumann diz que "I find myself in essential disagreement with his [Fréchet] evaluation of the evolution of the theory of games" (VON NEUMANN, 1953 p. 124) e continua

> It is true, that we now know several simple and direct derivations of this theorem [teorema minimax] from various, more or less classical theorems on convex sets. This connection may now seem very obvious to someone who first saw the theory after it had obtained its present form. However, this was not at all the aspect of the matter in 1921-1938. The theorem, and its relation to the theory of convex sets were far from being obvious. […] It is common and tempting fallacy to view the later steps in a mathematical evolution as much more obvious and cogent after the fact than they were beforehand. (VON NEUMANN, p. 125)

No caso, o alerta de von Neumann é válido para todos que se aventuram na História da Ciência.

REFERÊNCIAS

BOREL, E. The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 97-100, 1953a.

______. On Games that Involve Chance and the Skill of the Players. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 101-115, 1953b.

______. On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 116-117, 1953c.

FRÉCHET, M. Commentary on the Three Notes of Émile Borel. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 118-124, 1953.

GALE, D, KUHN, H., TUCKER, A. On Symmetric Games. In: KUHN, H., TUCKER, A. (Org.). **Contributions to the Theory of Games. Vol. I**. Annals of Mathematical Studies, n. 24. Princeton: Princeton University Press, 1950. p. 81-7.

KARLIN, S. **Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics. Vol. I**. EUA: Addison-Wesley Publishing Company, INC., 1962.

KUHN, H W; TUCKER, A W. John von Neumann's Work in the Theory of Games and Mathematical Economics. **Bulletin of the American Math Soc.**, v. 64, p. 100-122, 1958.

KUHN, H. **Lectures on the Theory of Games**. Annals of Mathematical Studies, n. 37. Princeton: Princeton University Press, 2003.

KJELDSEN, T. John von Neumann's Conception of the Minimax Theorem: A Journey Though Different Mathematical Contexts**. Archive for History of Exact Science**, n. 56, p. 39-68, 2001.

LEONARD, Robert J. Creating a Context for Game Theory. **History of Political Economy**, v. 24, p. 29-76, 1992.

______. **Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory From Chess to Social Science 1900-1960**. Nova York: Cambridge University Press, 2010.

MIROWSKI, P. What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish? **History of Political Economy**, v. 24, p. 113-147, 1992.

MORGENSTERN, Oskar. The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. **Journal of Economic Literature,** v.14, n. 3, p. 805-816, set. 1976.

NEUMANN, J. Calcul des Probabilités – Sur la thèorie des Jeux. Note de M. J. v. Neumann, présentée par M. Émile Borel. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences**, v. 186, n. 25, p. 1689-91, 1928.

______, BROWN, G. Solutions of Games by Differential Equations. In: KUHN, H., TUCKER, A. (Org.). **Contributions to the Theory of Games,Vol. I**. Annals of Mathematical Studies, n. 24. Princeton: Princeton University Press, 1950. p. 38-43.

______. Communication on the Borel Notes. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 124-125, 1953.

______. On the Theory of Games of Strategy. In: TUCKER, A.; LUCE, R. (Ed.). **Contributions to the Theory of Games, v. 4**. Annals of Mathematics Studies, n.40. Ed. Princeton: Princeton University Press, 1959, p. 13–42.

______, MORGENSTERN, O. **Theory of games and Economic Behavior**. 7. Ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.

PRÉKOPA, A. On the Development of Optimization Theory. **The American Mathematical Monthly**, v.87, n. 7, p. 527-542, 1980.

ULAM, S. Tribute to John von Neumann. **Bulletin of the American Mathematical Society,** vol. 64, n. 3, p. 1-49, 1958.