

# Encontros com David Gale\*

por Marilda Sotomayor

*Professora Titular, Departamento de Economia, Universidade de São Paulo (USP),  
Brasil*

Aula Magna Proferida no 39º Encontro da ANPEC, 06/12/2011

---

## 1. Introdução

É uma grande honra ter sido convidada para proferir esta aula magna. Agradeço aos organizadores desse encontro pelo convite, que aceitei como um desafio. Só sei falar sobre meus artigos, que são muito técnicos e portanto um tal discurso não seria adequado nesta ocasião. Sugeriram-me que falasse sobre minha trajetória. Em refletindo sobre ela, a figura de um grande economista matemático aflorou em minha mente, como parte obrigatória dos cenários que as minhas lembranças evocaram. Seu nome, David Gale.

De renome internacional, várias vezes cogitado para o prêmio Nobel em Economia, representou, por mais de 50 anos, um papel de liderança no desenvolvimento de alguns dos temas de importância fundamental na matemática, pura e aplicada, na teoria econômica e na teoria dos jogos. Através de seus trabalhos ele estabeleceu padrões para gerações de pesquisadores em todos esses campos. Escreveu cerca de 100 artigos, muitos dos quais foram obras mestras. O seu livro, *The Theory of Linear Economic Models* permanece como referência básica. Seu nome está ligado ao surgimento da teoria dos jogos de matching, minha atual área de pesquisas. O meu percurso nesta área contou com o seu apoio incomensurável. Decidi então rememorar aqui alguns dos encontros com David Gale que, marcados pela sabedoria e generosidade deste grande cientista, influenciaram a minha carreira. Dedico esta aula magna à sua memória.

Como todos sabemos, a importância da Teoria dos Jogos para a Economia é indiscutível. Basta citar os 9 prêmios Nobel em Economia concedidos a especialistas nesta área: J. Nash, J. Harsanyi, R. Selten, W. Vickrey, R. Aumann, T. Shelling, R. Myerson, L. Hurwicz, e E. Maskin.

A teoria dos jogos tem inúmeras sub-áreas. Recentemente editei a sessão de teoria dos jogos da *Encyclopedia of Complexity Science*, publicada pela

---

\* Dedicado à memória de David Gale (1921-2008). *E-mail address:* marildas@usp.br

Springer, que contou com artigos, de 30 sub-áreas distintas, incluindo a teoria dos jogos de Matching.

A teoria dos jogos de matching se iniciou em 1962, com o paper “College admission and the stability of marriage”, de autoria de David Gale e Lloyd Shapley, publicado na revista *American Mathematical Monthly*. Esse artigo propunha e resolvia o problema da admissão de estudantes às Universidades como um exercício em Matemática pura.

“Qualquer argumento que seja usado com suficiente precisão é matemático” –  
D. Gale

Existem um conjunto,  $U$ , de Universidades e um conjunto,  $C$ , de estudantes. Cada universidade tem uma cota, representando o seu número de vagas. Cada estudante só pode se matricular em no máximo uma universidade. Cada universidade tem um lista ordenada de preferências sobre os estudantes que aceitaria admitir; cada estudante tem uma lista ordenada de preferências sobre as universidades nas quais aceitaria ingressar. Assim por exemplo, a lista  $P(u) = c_1, c_2, c_3, u, c_4, c_5$  significa que a universidade  $u$  prefere  $c_1$  em primeira opção,  $c_2$  em segunda opção,  $c_3$  em terceira opção e prefere ficar com uma vaga não preenchida a admitir os estudantes  $c_4$  ou  $c_5$ . Isto é, os únicos estudantes aceitáveis para ela são  $c_1, c_2$  e  $c_3$ .

Informalmente, um matching é uma alocação dos estudantes para as Universidades que respeita as cotas dos agentes. Um matching é individualmente racional se o parceiro de todo agente é aceitável para ele. Ele é estável se é individualmente racional e se não existe um par formado por uma Universidade e um estudante, não alocados entre si, tais que a Universidade prefere o estudante a um dos estudantes que admitiu e o estudante prefere a Universidade àquela que o admitiu. Esse mercado pode ser tratado matematicamente como um jogo cooperativo. A idéia intuitiva de equilíbrio cooperativo é captada pelo conceito de estabilidade.

A questão é se, dados quaisquer conjuntos de estudantes e universidades com suas respectivas preferências e quotas, existe sempre um matching estável. A resposta é sim. Gale e Shapley mostraram a existência de matchings estáveis para qualquer mercado de admissão de estudantes às Universidades usando um algoritmo bem simples, que partindo das preferências dos participantes encontra um matching estável num número finito de etapas. Uma demonstração não construtiva é oferecida em Sotomayor (1996).

O algoritmo é fácil de descrever. Primeiramente o modelo foi reduzido a um outro em que cada Universidade é replicada tantas vezes quanto o seu número de vagas. Assim cada cópia tem apenas uma vaga. Esse outro modelo foi denominado modelo do casamento, porque os agentes podem ser pensados como se fossem homens e mulheres que desejam contrair matrimônio e um matching é então um conjunto de casamentos monogâmicos. No modelo do casamento, existem um conjunto de homens e um conjunto de mulheres. Cada

homem tem uma lista ordenada de preferências sobre as mulheres com as quais aceitaria se casar. Cada mulher tem uma lista ordenada de preferências sobre os homens com os quais gostaria de contrair matrimônio. A grosso modo, um matching é estável se é à prova de divórcio. Isto é, não existe um homem e uma mulher, não associados pelo matching, e que se preferem mutuamente aos seus cônjuges. A interpretação é a natural. Se existir um tal casal, os dois fariam melhor se se divorciassem de seus cônjuges e se casassem um com o outro. O algoritmo de Gale e Shapley pode ser descrito brevemente como segue.

Para começar, cada homem se candidata à sua mulher favorita, isto é, à primeira mulher de sua lista de preferências de mulheres aceitáveis. Cada mulher rejeita a proposta de qualquer homem inaceitável para ela. Cada mulher que recebe mais de uma proposta aceitável aceita a mais preferida e rejeita as demais. Os homens rejeitados se candidatam à sua segunda mulher preferida. Novamente, cada mulher que recebe mais de uma proposta aceitável aceita a mais preferida e rejeita as demais, etc. O algoritmo pára depois de qualquer etapa em que nenhum homem for rejeitado. Neste ponto, todo homem ou está comprometido com alguma mulher ou foi rejeitado por todas as mulheres de sua lista de mulheres aceitáveis e fica solteiro. Um conjunto de parcerias (casamentos monogâmicos) são então formadas, em que uma mulher que não recebeu nenhuma proposta aceitável fica solteira.

O algoritmo deve eventualmente parar, porque existe somente um número finito de homens e mulheres e nenhum homem se candidata mais de uma vez à mesma mulher. O resultado do algoritmo é um matching, desde que, em cada etapa, cada homem estará comprometido com uma mulher no máximo e cada mulher terá aceito um homem, no máximo. Este matching é individualmente racional, desde que todo homem se candidata somente a mulheres aceitáveis de uma lista de preferências e toda mulher que recebe uma oferta inaceitável para ele a rejeita. Assim, para ver que o matching é estável, suponha que existam um homem  $m$  e uma mulher  $w$  tais que  $m$  prefere  $w$  à sua parceira no matching (que pode ser ele mesmo, no caso de ele estar solteiro). Então,  $m$  se candidatou a  $w$  em alguma etapa do algoritmo e  $w$  o rejeitou em benefício de algum outro homem que ela prefere a  $m$ . Pela transitividade das preferências,  $w$  prefere o homem dado a ela pelo matching a  $m$ , logo  $m$  e  $w$  não podem causar uma instabilidade.

Gale e Shapley mostraram que o matching produzido com os homens fazendo as ofertas é o matching estável mais preferido por todos os homens e o menos preferido por todas as mulheres a qualquer matching estável. Este matching é chamado matching estável ótimo para os homens. Revertendo-se os papéis entre homens e mulheres no algoritmo, obtém-se o matching estável ótimo para as mulheres, com propriedades simétricas.

De uma maneira natural podemos retornar ao modelo de admissão dos estudantes às Universidades e obter o matching estável ótimo para os estudantes e o ótimo para as Universidades.

O meu interesse por essa área de pesquisas foi despertado em 1983, no

Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia, em Berkeley, onde eu participei, durante dois anos, do meu primeiro programa de pós-doutorado, com Bolsa financiada pelo CNPq.

## 2. O Início

Com uma formação em matemática pura obtida no IMPA, e professora do Departamento de Matemática da PUC/RJ, tencionava fazer meu doutorado em processos estocásticos. Meu orientador era Jack Schechtman, na época professor do IMPA. Depois de dois meses de leitura nesta área, Jack me apresentou um problema na área de crescimento econômico: “Não é sobre processos estocásticos, disse ele. Mas não se preocupe, eu só quero saber como você se sai em economia matemática”. O modelo econômico estava pronto e só precisei entrar com a matemática. Tratava-se da situação com que se depara um consumidor que tem um horizonte temporal infinito e em cada período de tempo deve decidir quanto consumir e quanto poupar de forma a maximizar assintoticamente a utilidade esperada acumulada e descontada. O problema era encontrar uma política ótima a ser seguida pelo consumidor. Dependendo do fator de descontos  $\partial$  e do fator de juros  $r$  esse problema apresentava três casos para serem analisados:  $\partial r > 1$ ,  $\partial r < 1$  e  $\partial r = 1$ . O caso  $\partial r < 1$  tinha sido a tese de doutorado do Jack, que me pediu que estudasse o caso  $\partial r = 1$ . Aloisio Araujo me sugeriu que também estudasse o caso. E foi assim que este problema gerou a minha tese de doutorado em 1981. Foi publicada no *Journal of Economic Theory* em 1984 com o título: “On income fluctuations and capital gains”.

Entretanto, a minha pouca familiaridade com a área de crescimento econômico me fazia sentir-me desconfortável para continuar trabalhando nela. Jack Schechtman tinha sido orientado em seu doutorado por David Gale, que era então professor titular da Universidade da Califórnia em Berkeley. Pedi então uma bolsa de pós-doutorado ao CNPq e com a minha tese já aceita para publicação no *JET*, fui para Berkeley, em janeiro de 1983, com a esperança de aprender mais sobre crescimento econômico com David Gale, para poder ganhar independência científica nesta área.

## 3. O Primeiro Encontro

Logo que cheguei tratei de conseguir um encontro com o grande matemático, o que não era fácil. No dia e hora combinados fui à sua sala e expus para ele a minha tese. No final de minha apresentação ele me parabenizou, mas para meu desapontamento me disse: “Não estou mais interessado nesta área...”

Passei os dois meses seguintes frequentando a biblioteca e tentando encontrar algum problema em crescimento econômico que me interessasse, mas completamente perdida. Num certo dia, Jorge, meu marido, que também é

matemático e também estava num programa de pós-doutorado em Berkeley, notando a minha frustração em relação às minhas expectativas chamou a minha atenção para o fato de que eu não estava aproveitando a oportunidade de estar tão próxima de um gênio como David Gale. “Por que não lhe pergunta qual o assunto sobre o qual ele está interessado e tenta aprender esse assunto, seja ele qual for?” Por mais absurda que a ideia de aprender algo novo em matemática, em tão pouco tempo, pudesse me parecer, enchi-me de coragem e fiz o que Jorge me sugerira. No final, os seus conselhos sempre funcionavam...

#### 4. O Segundo Encontro

Nesse segundo encontro, Gale me respondeu que estava interessado em matching e deu-me três artigos e um livro para ler. Um dos artigos era o artigo seminal de sua autoria com Shapley. O segundo artigo era de Dubins e Freedman, publicado em 1981, que continha um teorema cuja demonstração tinha originalmente 20 páginas. O terceiro artigo, de Demange e Gale, foi publicado no ano seguinte na *Econometrica*. Tratava de um modelo de matching contínuo, em que as preferências dos agentes são dadas por funções utilidade contínuas na variável dinheiro. O livro, de autoria de Donald Knuth, escrito em francês e publicado em 1976, tratava da teoria de algoritmos e tinha um dos capítulos sobre o modelo do casamento.

Não é necessário dizer quão estranho me pareceu o modelo do casamento. Algumas semanas depois desse encontro devolvi a Gale o material que me emprestara. Eu não tinha nenhuma ideia do que fazer com todo aquele conhecimento novo, mas tinha a esperança de que Gale pudesse me apontar alguma direção. Tive então um outro desapontamento. “Bem, disse ele, eu não tenho nenhum problema para você...” Quando já estava saindo de sua sala ele me chamou de volta com um papel nas mãos: “O único problema que tenho é este lema que estou tentando demonstrar há algum tempo. Dubins e Freedman demonstraram o seu teorema em 20 páginas. Se este lema for verdadeiro será possível demonstrar o teorema de Dubins e Freedman em três linhas. Seria ótimo ter uma demonstração mais curta desse resultado porque então se poderia ensiná-lo em apenas uma aula, disse ele.”

O teorema de Dubins e Freedman é conhecido como o teorema da não-manipulabilidade. Suponha que uma central peça a cada estudante e universidade as suas listas de preferências e use o algoritmo de Gale e Shapley para produzir o matching estável ótimo para os estudantes. O teorema diz que nenhum estudante pode, mudando as suas verdadeiras preferências, obter uma Universidade que seja mais preferida do que a Universidade que teria obtido se tivesse informado à central suas verdadeiras preferências. Mais ainda, se um grupo de estudantes mudar as suas preferências, pelo menos um do grupo não será bem sucedido.

Este teorema foi a pedra fundamental para o estudo dos aspectos estratégicos

dos dois mercados de matching: o mercado da admissão dos estudantes às Universidades e o mercado do casamento. Ele também forneceu a base teórica para a implementação de mecanismos de alocação em inúmeros mercados de matching, como mercados de estudantes e Universidades na Turquia e Espanha, mercado de estudantes e dormitórios em Israel, mercados de escolha de escola de primeiro grau em Boston e Nova York, etc., e também a reformulação recente do mercado de médicos e hospitais nos Estados Unidos.

Mesmo sem me dar conta da importância, tanto de ordem prática como teórica desse resultado, encontrar uma prova mais curta para ele era um grande desafio, de forma que fui para casa com aquele papel e trabalhei com sucesso durante aquele fim de semana. Lembro-me que foi difícil esperar pela segunda feira para mostrar a minha demonstração ao Gale. Quase no final de minha apresentação ele começou a bater palmas e a exclamar muito empolgado: “Você provou! Você provou!”

Começou aí o meu percurso num campo de pesquisas quase inexplorado até então, mas que abria as portas para o surgimento de uma teoria matemática com muitas aplicações à Economia, e que viria a atrair, ao longo dos anos, a contribuição de inúmeros matemáticos e economistas.

Mais tarde, naquele mesmo dia, Gale entrou na minha sala com a introdução do nosso primeiro artigo em co-autoria nas mãos: “Some remarks on the stable matching problem”, 1985. Eu tinha demonstrado o lema, que foi mais tarde chamado de blocking lemma, usando o algoritmo Gale-Shapley. “Seria bom ter também uma demonstração deste lema usando somente as propriedades de estabilidade e otimalidade do matching estável ótimo para os estudantes, sem o emprego do algoritmo”, disse ele. Também fiz aquela demonstração, mas ela não foi tão simples e não a obtive tão rapidamente como a outra.

Gale e Sotomayor (1985) apresentam ambas demonstrações, que foram elegantemente reescritas e encurtadas por David Gale. Este artigo padroniza notações e conceitos; prova novos resultados e apresenta provas simples com diferentes argumentos para resultados existentes. Todos os resultados no artigo têm uma demonstração sem a utilização do algoritmo, com argumentos que oferecem “insights” úteis para a demonstração de resultados análogos em outros modelos. Foi obtida assim uma teoria concisa cujos resultados formam o arcabouço da teoria de matching discreto em mercados de matching de dois lados (um modelo é dito ser de matching discreto se as preferências dos agentes são dadas por listas de preferências ordenadas).

Este artigo também relata o fato de que o algoritmo inventado por Gale e Shapley em 1962 com as Universidades fazendo as ofertas é matematicamente equivalente ao algoritmo usado, de 1951 a 1998, em Evanston, Illinois, pelo *National Intern Resident Matching Program* (NIRMP), para fazer a alocação dos médicos residentes pelos hospitais nos Estados Unidos. Dessa forma o matching produzido pela central de Evanston é estável. A estabilidade deste matching é uma das mais importantes aplicações da teoria dos jogos à Economia. De fato, por cerca de 50 anos, de 1900 a

1950, aproximadamente, procedimentos descentralizados foram propostos com frequência pela *Association of American Medical Colleges*, numa tentativa de resolver o problema de alocação dos médicos residentes pelos hospitais nos Estados Unidos. Esses procedimentos foram invariavelmente mal sucedidos. A teoria dos jogos atribui a causa desse insucesso ao fato de que esses procedimentos produziam matchings instáveis, e portanto não atingiam um equilíbrio cooperativo.

Em 1951 chegou-se à conclusão que o mecanismo deveria ser centralizado e o algoritmo da central de Evanston foi proposto e aceito para substituir os procedimentos anteriores. Esse mecanismo centralizado durou, sem mudanças, por outros 50 anos, sugerindo que os médicos residentes e hospitais tivessem encontrado alguma espécie de equilíbrio. A teoria dos jogos prediz que se uma alocação ocorre então ela deve ser uma alocação de equilíbrio cooperativo. O que os resultados de Gale e Shapley provaram foi que o equilíbrio na prática é o mesmo apreendido pela teoria dos jogos, confirmando que uma vez mais as predições da teoria dos jogos estavam corretas. Esta é a razão teórica para a permanência, durante quase 50 anos, do algoritmo da central de Evanston.

## 5. Um Rótulo para Matchings

No início de minha visita a Berkeley, eu costumava encontrar outros pós-docs durante a hora do chá do Departamento de Matemática. Era evidente a curiosidade deles sobre o assunto de minhas pesquisas com o famoso economista-matemático.

- “Eu estudo o problema do casamento estável”, eu costumava dizer.
- “E o que é isto?”
- “É sobre casamento de homens e mulheres à prova de divórcio”, eu respondia.
- “E isso é geometria?”
- “Não.”
- “É análise matemática?”
- “Não.”
- “É topologia diferencial?”
- “Não.”
- “Voce tem certeza de que é matemática?”
- “Sim, eu provo teoremas!”

O fato é que me sentia desconfortável e confusa para lidar com aquelas perguntas. Eu me deliciava provando os teoremas propostos por Gale, mas não tinha a menor ideia sobre a relevância científica daquelas descobertas. Que ramo da matemática era aquele? Como explicar ao Departamento de Matemática da PUC/RJ que passara dois anos em Berkeley provando teoremas sobre casamentos estáveis? Foi então que tive um encontro com David Gale que foi muito decisivo para minha formação como cientista. Muito timidamente

tomei coragem e lhe falei sobre minhas preocupações. Mas ele me surpreendeu com seu tom paternal: “Eu também já tive que lidar com este tipo de problema. Você gosta do que faz?” Sim, eu gosto muito, respondi. “Então não se preocupe com o rótulo.”

Na verdade, o que David Gale estava tentando me fazer entender era que o trabalho de um cientista vai muito além de contribuir para as teorias já conhecidas e estabelecidas... O fato é que uma teoria científica nova, poderosa e elegante estava tomando corpo desde o artigo seminal de Gale e Shapley de 1962 e se desenvolvendo de modo a se tornar um dos ramos da teoria dos jogos que mais aplicações à economia viria a ter.

Mesmo embora eu não tivesse nenhuma noção da repercussão de nossos resultados, sentia-me orgulhosa de colaborar com David Gale.

Aquela conversa fez-me acreditar que eu estava fazendo a escolha correta...

## 6. O Estilo de Gale e Sua Generosidade

Cada encontro com David Gale sempre foi intelectualmente muito estimulante para mim. Eu me impressionava muito com sua habilidade em encurtar minhas longas demonstrações, combinando, elegantemente, precisão e rigor no seu estilo de exposição. Sua criatividade, não somente em suas demonstrações, mas também na formulação de novos e desafiadores problemas me encantava sempre.

David estava sempre a me ensinar alguma coisa. Uma vez, em uma de minhas visitas a ele em Berkeley, depois de ler minha longa solução de um problema que tinha formulado e me proposto, ele exclamou admirado:

“Você nunca dá polimento às suas demonstrações!”

Bem, estávamos escrevendo alguns dos primeiros artigos sobre a teoria de matchings. Não havia “insights” de outras demonstrações para serem usados, os argumentos eram todos novos, e assim eu tinha com frequência de trabalhar intensa e duramente. No final, quando era bem sucedida, estava ávida para mostrar o resultado de meu trabalho a David e me deliciar com sua reação. Ele sempre me parabenizava com alegria e entusiasmo. Isto aumentava a minha vontade de trabalhar, para não desapontá-lo.

“Minha preocupação é somente encontrar uma solução,” expliquei a ele.

“Sim”, disse ele, “mas eu desfruto fazer as duas coisas: encontrar a solução e escrever a demonstração.”

De fato, era ele quem costumava dar o toque final em minhas demonstrações, encontrando argumentos elegantes sem desperdício de palavras. Isto é uma arte. Este talento de Gale era bem conhecido e costume compará-lo ao do famoso contista argentino, Jorge Luis Borges. Martin Shubik, no encontro que organizei em 2007 em Stony Brook em homenagem a Gale, disse em seu discurso que admirava 4 qualidades em David Gale: A beleza de clareza de pensamento, a capacidade de fazer exposições brilhantes, a habilidade para detectar bons



problemas e formulá-los com elegância e a persistência e habilidade em resolver os problemas que formulava.

A todas essas qualidades a gente pode acrescentar seu talento em oferecer demonstrações mais simples como alternativa à demonstrações complicadas e a sua generosidade. Um exemplo é sua demonstração de que o núcleo do Mercado de casas de Shapley e Scarf (1974) é não vazio. Na época em que este artigo estava sendo escrito, Scarf foi a Berkeley para dar uma palestra, que foi assistida por Gale, sobre o tal Mercado de casas. Existe um conjunto de agentes. Cada um possui uma casa e tem preferências transitivas e completas sobre o conjunto de todas as casas na economia. Uma alocação é uma permutação das casas entre os agentes. Nesta palestra Scarf apresentou uma demonstração de que existe sempre uma permutação das casas no núcleo<sup>1</sup> desse jogo, usando um teorema seu recente que não tinha tido ainda nenhuma aplicação e que empregava argumentos sofisticados da teoria de jogos balanceados.

No final da palestra David Gale se aproximou de Scarf e lhe disse timidamente: “Eu acho que eu tenho um outro argumento de que o núcleo é não vazio.” E então lhe falou da noção do “top trading cycles” e o seu uso para oferecer um simples algoritmo que sempre encontrava uma permutação no núcleo. Nesse algoritmo, cada agente aponta para sua casa preferida. Como o número de agentes na economia é finito, pelo menos um ciclo se forma. Os ciclos formados deixam o mercado e trocam suas casas entre si de acordo com o ciclo. Na segunda etapa, cada agente no mercado aponta para sua casa preferida. Os ciclos formados deixam o mercado e permutam as suas casas entre si de acordo com o ciclo correspondente, e assim sucessivamente, até que não reste mais nenhum agente no mercado. Pode ser visto facilmente, usando a definição de núcleo, que a permutação obtida está no núcleo do jogo.

Scarf não entendeu bem a demonstração mas prometeu a David que iria pensar sobre ela. Pensou sobre ela no vôo de volta a New Haven, de onde tinha vindo, e chegando lá enviou uma carta a David com a seguinte frase: “Infelizmente sua demonstração está correta”.

Scarf e Shapley ofereceram a Gale co-autoria no artigo mas, generosamente, Gale não aceitou. O artigo contém ambas as demonstrações. Este relato foi contado por Scarf no seu discurso em Stony Brook, no Gale’s Feast em 2007 e publicado posteriormente em 2009, no volume especial em homenagem a David Gale, Special Section in Honor of David Gale, edit. J. Sobel e B. von Stengel, *Games and Economic Behavior*, v. 66, issue 2.

O algoritmo de Gale tem sido aplicado em problemas de alocação de estudantes a escolas nos Estados Unidos e de rins a pacientes.

Em outra ocasião, muitos anos antes, quando David Gale foi instrutor na Universidade de Princeton, Albert Tucker, que tinha sido seu orientador, teve de viajar. Ele pediu a David para tomar conta de um jovem estudante de

<sup>1</sup> Uma alocação está no núcleo se nenhuma coalizão de agentes pode se desviar lucrativamente da dada alocação, interagindo somente entre si.

doutorado de 21 anos chamado John Nash. Um dia, Nash entrou na sala de Gale com seu famoso teorema que apresentava condições suficientes para a existência de equilíbrio estratégico. Sua demonstração usava o teorema do ponto fixo de Brower. Imediatamente David reconheceu a relevância daquele resultado. Estes fatos me foram relatados por ele em um de nossos encontros quando o visitei em 1997. Ele começou assim: “Eu fui orientador de Nash durante um curto período de tempo”... Em 1998, em Stony Brook, Nash contou-me o final deste episódio. “David Gale me apresentou o teorema do ponto fixo de Kakutani.” Na verdade, Gale trouxe para Nash uma nova e mais simples demonstração, que transformou o resultado de Nash em uma aplicação direta e imediata do teorema do ponto fixo de Kakutani. As duas demonstrações foram publicadas em duas revistas diferentes (*Proceedings of the National Academy of Sciences* e *Annals of Mathematics*) e Nash fez um comentário, agradecendo, sobre a demonstração de Gale numa nota ao rodapé. Em 2007, no discurso de Nash durante o Gale’s Feast, Nash contou, publicamente e pela primeira vez, o episódio inteiro.

## 7. A Evolução da Teoria de Matching

No decorrer dos anos que se seguiram à minha primeira visita a Berkeley em 1983, David e eu tivemos muitos encontros, escrevemos vários artigos sobre matchings em parceria e nos tornamos amigos. Em junho de 1990, estava em Paris, visitando o instituto conhecido no Brasil como IHES – *Institute des Hautes Etudes Scientifiques* – por seis meses. David Gale também estava em Paris, visitando o Laboratório de Econometria da Escola Politécnica. Aproveitamos esse encontro para terminarmos um de nossos trabalhos em co-autoria. Myrna Wooders, atualmente na Universidade de Vanderbilt e editora do *Journal of Public Economic Theory*, estava na Alemanha e queria nos encontrar. Combinamos então um jantar, que também contaria com a presença de Gabrielle Demange, do Laboratório de Econometria. Encontramo-nos no apartamento de David e de lá fomos, caminhando naquele entardecer que prenunciava a chegada do verão, em direção ao restaurante onde teríamos um jantar memorável. A idéia de construir minha carreira trabalhando em matching já tinha germinado em minha mente, de forma que decidi revelar a Gale a minha decisão de dedicar meu trabalho a matching.

— “Matching é muito pequeno para você dedicar toda sua vida a ele” disse.

— “Se é assim... teremos de torná-lo grande ...”, respondi.

David riu gostosamente. Mas eu estava sendo sincera... e o tempo mostrou isso.

Os trabalhos que desenvolvi com David Gale me estimularam a prosseguir buscando novos desafios na área de matching. Eu lhe enviava, com frequência, ou lhe levava em minhas visitas, meus manuscritos. David não somente os comentava, mas se envolvia com eles. Pediu-me para escrever a introdução de dois de meus artigos. Publiquei um deles em um livro em sua homenagem:

“The Multiple Partners Game”, 1992, *Dynamics and Equilibrium: Essays in Honor to David Gale*, M. Majumdar (edit.), Macmillian – p. 322–336. Esse livro reunia artigos de vários ex-colaboradores, estudantes e amigos admiradores como Aloisio Araujo e Paulo Klinger Monteiro. O outro, “Three remarks on the stability of the many-to-many matching”, (1999), *Mathematical Social Sciences*, v. 38, p. 55–70, foi dedicado aos seus 75 anos.

O encontro científico “Gale’s Feast: One day of activities in honor of the 85<sup>th</sup> birthday of David Gale” que organizei como um satélite do International Conference on Game Theory and Economic Applications, em Stony Brook, em julho de 2007, foi um ato de gratidão. Vários de seus colegas, estudantes, colaboradores e admiradores, como Nash, Auman, Kuhn, Martin Shubik, Scarf, Sergiu Hart, Shapley, dentre outros, como também alguns de seus familiares, estiveram lá participando da comemoração. Também editei, como editora convidada da *International Journal of Game Theory*, um volume especial em sua homenagem com 17 artigos, que infelizmente só foi publicado alguns dias depois de seu falecimento em março de 2008: “A collection of papers dedicated to David Gale on the occasion of his 85th birthday”, 2008, *International Journal of Game Theory*, 36, 317–319.

Ao longo dos anos, a popularidade da teoria dos jogos de matching se espalhou entre matemáticos e economistas, principalmente devido à publicação da primeira edição em 1990 do livro “Two-sided matchings. A study in game theoretic modeling and analysis”, de minha autoria com Alvin Roth, atualmente professor titular da Harvard University.

Este livro, publicado na série de monografias da Econometric Society, compila os resultados principais sobre a teoria de matching até 1989 e tem sido referência básica em todos os artigos de matching. Recebeu o prêmio Lanchester de 1990, outorgado pela Operation Research Society of America, por estabelecer uma ponte entre teoria dos jogos e pesquisa operacional. Em maio do ano passado foi organizado um congresso na Duke University, em North Carolina, para comemorar os 20 anos de publicação desse livro: *Roth and Sotomayor: 20 years after*. Contou com a participação de aproximadamente 100 especialistas em matching que apresentaram artigos originais.

Tendo sido estabelecida como um dos ramos da teoria dos jogos, a teoria dos jogos de matching tem sido ensinada em muitas Universidades estrangeiras e atraído o interesse de um grande número de pesquisadores. O problema do matching estável formulado por Gale e Shapley tem sido generalizado para mercados de matching com preferências mais complexas ou representadas por funções utilidade contínuas numa variável monetária e em que os agentes de ambos os lados podem formar mais de uma parceria. Uma inovação recente, de que sou pioneira, é a introdução de tempo nas parcerias, representando as horas que os parceiros decidem trabalhar juntos. Esses modelos têm sido amplamente analisados, tanto em seus aspectos de jogo cooperativo como de não cooperativo. Esses jogos têm sido adequados para modelar uma grande variedade de mercados de trabalho, mercados de compradores e vendedores,

mercados de leilões, mercados de escolha de escola, mercados de transplantes de órgãos, etc. Através desses modelos esses mercados têm sido melhor entendidos, o que tem consideravelmente contribuído para sua organização.

Atualmente existem três grandes campos de pesquisa em matching: desenho de mercados, escolha de escola e teoria dos matchings estáveis. Basicamente, tenho trabalhado nos três campos mas tenho me concentrado mais na teoria. Desenho de mercados analisa e organiza mercados de matching à luz da teoria dos jogos. Um mercado importante que tem sido estudado é o mercado de transplante de rins nos Estados Unidos. Como já mencionei anteriormente, vários artigos foram também publicados sobre o mercado da alocação de residentes médicos nos hospitais nos Estados Unidos, mercados de alocação de estudantes à Universidades na Espanha, Turquia, mercados de alocação de estudantes a dormitórios em Israel, etc. O ramo Escolha de Escolas trata de problemas relacionados aos mecanismos de escolha de escolas de primeiro grau. Alguns artigos têm sido feitos sobre os procedimentos de escolha de escola de primeiro grau em Boston e em Nova York, com proposta de novos mecanismos de alocação, que foram aceitos e já estão sendo implementados. Teoria dos Matchings estáveis trata dos problemas que naturalmente emergem de uma situação de decisão cooperativa ou não cooperativa envolvendo um mercado de matching. Tais problemas propiciam o surgimento de novos conceitos e resultados, relevantes para o mercado em questão, contribuindo assim para o desenvolvimento da teoria dos jogos.

Minha pesquisa mais recente neste campo propõe um modelo para representar um jogo cooperativo qualquer, onde se torna possível oferecer uma definição geral de estabilidade que capta a idéia de equilíbrio cooperativo, estendendo, de uma vez por todas, o conceito de estabilidade de Gale e Shapley de um jogo de matching a qualquer jogo cooperativo. Intuitivamente, uma alocação é estável se nenhuma coalizão de jogadores pode se desviar lucrativamente da dada alocação, agindo de acordo com as regras do jogo.

O resultado dessa investigação será o teor de minha palestra semi-plenária no 4º Congresso Mundial de Teoria dos Jogos, da *Game Theory Society*, que realizou-se em 2012 em Istambul.

Aos estudantes que estiverem interessados, estarei oferecendo no próximo semestre, pela primeira vez, um curso de introdução à teoria dos matchings estáveis na FEA-USP-SP.

Obrigada!