# Vantagem Informacional em um Duopólio de Cournot com Valores Parcialmente Privados

**Rodrigo Peñaloza**
*Departamento de Economia & CERME/CIEF, Universidade de Brasília (UnB), Brasil*

**Gabriel Rabello**
*Faculdade de Economia, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Brasil*

---

**Resumo**
Em um duopólio de Cournot em que o efeito-cruzado da demanda é incerto e as firmas são diferentemente informadas, um resultado de Chokler *et alii* (2006) mostra que a firma melhor informada possui vantagem informacional no caso de valores privados e possui desvantagem no caso de valores comuns. Intuitivamente, deveria haver um grau crítico de correlação no qual, ao passar de valores privados independentes para valores comuns, a firma informada passasse a ter desvantagem informacional. Neste artigo, considerando o caso intermediário de valores parcialmente privados, mostramos que essa ideia é válida apenas em parte. Se a variância do efeito-cruzado é elevada, existirão duas correlações críticas, de modo que o que faz a informação ser vantajosa não é apenas a condição de valores privados, mas também a imprecisão do efeito-cruzado. Além disso, sob variância elevada, a desvantagem informacional para valores comuns não é robusta.

*Palavras-chave:* Duopólio de Cournot, Valores Privados, Valores Comuns

*Classificação JEL:* D43, L15

---

**Abstract**
Chockler et alii (2006) proved that, in a Cournot duopoly in which the demand cross-effect is uncertain and firms are differently informed, the informed firm gets informational advantage under private values and disadvantage under common values. Intuitively, there should be a correlation treshold at which, for the informed firm, informational advantage turned into disadvantage when passing from the private values case to the common values case. Here we show that this intuition is not quite correct. We consider the intermediary case of partially private values and show that the volatility of the cross-effect plays a crucial role. If it is high, there will be two tresholds, in which case the informational disadvantage under common values will not be robust.

---

## 1. Introdução

É imediato pensar que uma firma com mais informação que suas concorrentes terá vantagem competitiva sobre as demais. Chokler, Hon-Snir, Kim e Shitovitz (2006), ao analisarem o papel da informação no lucro das firmas, em um duópolio linear de Cournot com produtos diferenciados e em que a incerteza sobre a informação está no efeito-cruzado da função de demanda, consideraram dois casos extremos: o caso de valores privados, em que os efeitos cruzados são dados por duas variáveis aleatórias independentes, e o caso de valores comuns, em que os efeitos cruzados são dados por uma mesma variável aleatória. Eles mostraram que a firma informada possui vantagem informacional no caso de valores privados, ou seja, que seu lucro esperado é maior do que o da firma rival. Já no caso de valores comuns, a firma informada possui desvantagem informacional, ou seja, seu lucro esperado é menor do que o da rival. A incerteza no efeito cruzado, em um cenário com produtos diferenciados, significa que a firma não conhece o efeito na sua demanda decorrente de uma mudança no preço do produto de sua concorrente, algo que ocorre, por exemplo, em mercados onde atuam tanto firmas locais como estrangeiras. Isso acontece porque a incerteza no efeito-cruzado se reflete nos preços e nas características dos produtos do competidor. Essa incerteza no efeito-cruzado implica que cada firma afeta a demanda da outra firma, mas o impacto é uma variável aleatória. A razão para a desvantagem informacional, no caso de valores comuns é que a falta de informação permite que a firma desinformada faça um compromisso com um nível mais elevado de produção e que, portanto, force a firma informada a produzir menos. Como as firmas enfrentam a mesma função de demanda, a firma não informada atinge lucros maiores comparativamente à firma informada. Ao contrário, no caso de valores privados independentes, a firma desinformada se compromete com um nível de produção menos agressivo e, por isso, não prejudica a firma informada.

Neste trabalho, mostramos precisamente quais os níveis de correlação que geram as conclusões de Chokler *et alii* (2006). Para isso consideramos o caso de valores parcialmente privados, isto é, os efeitos-cruzados são dados por duas variáveis aleatórias dependentes (que supomos, sem perda de generalidade, terem os mesmos momentos até ordem dois), mas que não são iguais ponto-a-ponto. Nossas condições para que a informação seja vantajosa são mais brandas do que a de Chokler *et alii* (2006). O grau de dependência é mensurado pela correlação. Intuitivamente, ao passar-se de valores privados independentes para valores comuns, deveria haver um grau de correlação crítico no qual se desse a passagem de vantagem para desvantagem informacional para a firma informada. Porém, o que encontramos é que essa passagem não é tão simples assim. A variância do parâmetro de incerteza tem papel importante nessa passagem. Se a variância é baixa, então a passagem ocorre como esperado. Mas se for alta,

⋆ Recebido em janeiro de 2011, aprovado em janeiro de 2012. Os autores agradecem os valiosos comentários e sugestões de um parecerista anônimo.
*E-mail address:* penaloza@unb.br

então existirão dois graus críticos de correlação, não apenas um. Nesse caso, para uma correlação baixa, a firma informada continua tendo vantagem informacional; para uma correlação mediana, ela passa a ter desvantagem informacional; para uma correlação alta, ela, surpreendentemente, volta a ter vantagem informacional; e, no limite, quando a correlação é igual à unidade, ela passa abruptamente a ter desvantagem informacional, conforme previsto pelo modelo de Chockler et alii (2006). Há, então, dois fatos inesperados: a recuperação da vantagem informacional para correlação elevada (desde que a variância seja elevada) e a descontinuidade do lucro esperado para correlação igual à unidade. Temos, assim, duas conclusões importantes quando a imprecisão do efeito-cruzado é alta:

(a) o que faz a informação ser vantajosa não é apenas a condição de valores privados mas também tem papel importante a correlação elevada entre as variáveis aleatórias; e

(b) a desvantagem informacional para valores comuns não é robusta.

Na Seção 2, apresentamos nosso modelo de vantagem informacional em um duopólio de Cournot com valores parcialmente privados. Não é nossa intenção fazer um *survey* dessa literatura. Para isso, veja Vives (2001). Primeiramente, encontramos o equilíbrio bayesiano do duopólio de Cournot com produtos diferenciados em que a única diferença entre as firmas é o nível de informação. Esse resultado não difere basicamente do equilíbrio encontrado em Chockler et alii (2006), ele apenas torna mais explícito o papel exercido pela correlação entre as variáveis. Quanto maior for a correlação, maiores serão as quantidades de equilíbrio. Em seguida, lançamos nossa atenção sobre a dependência entre os efeitos-cruzados e mostramos que o conjunto de correlações para as quais a firma informada possui vantagem informacional é desconexo (para volatilidade alta). Por fim, na Seção 3, identificamos as regiões em que determinada correlação entre os efeitos-cruzados gera vantagem ou desvantagem informacional e o impacto dessa vantagem no lucro da firma informada e analisamos numericamente os efeitos da volatilidade na vantagem informacional. A Seção 4 conclui o artigo.

## 2. Duopólio de Cournot com Valores Parcialmente Privados

Nesta seção apresentamos o modelo de duopólio com valores parcialmente privados. Em primeiro lugar, apresentamos as primitivas do modelo. Em seguida determinamos o equilíbrio bayesiano de Cournot e, por fim, apresentamos as condições sob as quais existe vantagem informacional para valores parcialmente privados.

### 2.1. *Primitivas*

Considere duas firmas com custos lineares e com produtos diferenciados, competindo em quantidades (duopólio de Cournot). As firmas são simétricas *ex ante* e têm custos marginais, $c$, iguais e constantes. A demanda por cada produto das firmas é derivada da mesma demanda linear (*ex ante*). A demanda pelos produtos de cada firma é incerta, já que o efeito-cruzado depende do estado da natureza. A demanda inversa pelo produto diferenciado $i$ é dada por $p_i(q_i, q_j) = A - Bq_i - \beta_i q_j$, $1 \leq i \neq j \leq 2$, em que $q_i$ é a quantidade produzida pela firma $i$ e $\beta_i$ é uma variável aleatória que depende do estado da natureza. A variável $\beta_i$ mede o efeito-cruzado $\frac{\partial p_i}{\partial q_j}$, uma mudança na demanda da firma $i$ causada por uma mudança de ação da firma $j$. Para $\beta_i > 0$ os produtos serão substitutos. Suponha que:

(i) $A > c \geq 0$ e $B > 0$

(ii) O "efeito-direto" domina o efeito cruzado, ou seja: $|\beta_i| \leq B$.

A condição (1) garante que as curvas de demanda e de custo marginal se cruzam em um ponto interior e que a demanda por cada produto é negativamente inclinada. Em outras palavras, ela diz que o ajuste na margem extensiva dos consumidores é maior do que o custo marginal da primeira unidade e, além disso, que os consumidores consideram o produto de cada firma um bem comum. A condição (2) implica que, para produtos substitutos, se a firma $i$ aumentar a sua produção em uma unidade e a firma $j$ diminuir sua produção em uma unidade, então o preço do produto da firma $i$ cairá. Para caso de produtos complementares, se ambas as firmas aumentarem sua produção em uma unidade, os preços cairão.

A incerteza a respeito do estado da natureza é descrita por uma variável aleatória num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, em que $\Omega$ é o conjunto de estados da natureza, $\mathcal{F}$ é o conjunto de eventos aleatórios (mensuráveis) e $\mu$ é a medida de probabilidade. Temos que $\beta_i : \Omega \to [0, B]$ para produtos substitutos e $\beta_i : \Omega \to [-B, 0]$ para produtos complementares, em que $i = 1, 2$. Por simplicidade, supomos que $B = 1$, pois o que nos interessa é somente o comportamento do equilíbrio em termos dos efeitos-cruzados.

Consideramos o caso de correlação parcialmente privada, em que $\beta_1(\cdot)$ e $\beta_2(\cdot)$ não são variáveis independentes, de modo que $\mathbf{E}(\beta_1\beta_2) = \mathbf{E}(\beta_1)\mathbf{E}(\beta_2) + Cov(\beta_1, \beta_2)$, ao contrário do caso de valores privados independentes de Chokler *et alii* (2006), em que, $\mathbf{E}(\beta_1\beta_2) = \mathbf{E}(\beta_1)\mathbf{E}(\beta_2)$, e do caso de valor comum, em que $\beta_1(\cdot) = \beta_2(\cdot)$. Não necessariamente $\beta_1$ e $\beta_2$ têm a mesma distribuição, mas, por simplicidade, supomos que têm os mesmos momentos. Em particular, $\mathbf{E}(\beta_1) = \mathbf{E}(\beta_2) = \beta$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, ou seja, mesma média e mesma variância.

As firmas são assimetricamente informadas sobre estado da natureza. A firma 1 tem completo conhecimento sobre o verdadeiro estado da natureza e, por isso, pode escolher qualquer quantidade não negativa mensurável $q_1 : \Omega \to \mathbb{R}_+$. Desse modo, ela pode contingenciar seu volume de produção ao estado da natureza. Essa escolha de $q_1$ captura a habilidade da firma 1 de escolher sua quantidade em qualquer estado da natureza. Já a firma 2 não tem qualquer informação. Dada a ignorância sobre o verdadeiro estado da natureza, a firma 2 apenas pode se comprometer com uma quantidade fixa e não negativa $q_2 \geq 0$ em todos os estados da natureza.

## 2.2. *Equilíbrio bayesiano de Cournot*

Nesta seção, determinamos o equilíbrio bayesiano de Cournot, baseado nos lucros esperados. Como as firmas têm custo marginal constante, $c$, seus lucros esperados são dados, respectivamente, por:

$$\pi_1^e = \mathbf{E}[(A - c - q_1(\cdot) - \beta_1(\cdot)q_2)q_1(\cdot)]$$
$$\pi_2^e = \mathbf{E}[(A - c - q_2 - \beta_2(\cdot)q_1(\cdot))q_2]$$

em que $\mathbf{E}$ denota o operador esperança sob a medida $\mu$. Seja $\rho = \frac{Cov(\beta_1,\beta_2)}{\sigma_1\sigma_2}$ a correlação dos efeitos-cruzados. Lembre que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, de modo que $Cov(\beta_1, \beta_2) = \rho\sigma^2$. A proposição 1 a seguir caracteriza o equilíbrio de Cournot.

**Proposição 1.** *O equilíbrio bayesiano para o duopólio linear de Cournot com produtos diferenciados é dado por*:

$$q_1^*(\omega) = \frac{(A - c)(2 - \beta)[(A - c) - \beta_1(\omega)]}{2(4 - \beta^2 - \rho\sigma^2)}$$
$$q_2^* = \frac{(A - c)(2 - \beta)}{4 - \beta^2 - \rho\sigma^2}$$

**Demonstração.** Suponha que exista um equilíbrio interior $(q_1^*(\cdot), q_2^*)$. Em um estado da natureza $\omega$, o lucro da firma 1 é $\pi_1(\omega) = [A - c - q_1(\omega) - \beta_1(\omega)q_2]q_1(\omega)$. Além disso, $q_1^*(\cdot)$ maximiza o lucro da firma 1 quando a firma 2 escolhe $q_2^*$. Desde que, $q_1^*(\omega) > 0$, para quase todo $\omega$, ou seja, $\mu$-$qc$ [1], ele deve satisfazer a condição de primeira ordem de maximização de lucro, a saber, $\frac{\partial\pi_1(\omega)}{\partial q_1(\omega)} = 0$, donde $A-c-2q_1^*(\omega)-\beta_1(\omega)q_2^* = 0$. Portanto, temos $q_1^*(\omega) = \frac{A-c-\beta_1(\omega)q_2^*}{2}$, $\mu$-$qc$, e $\pi_1(\omega) = q_1^*(\omega)^2$.O lucro esperado da firma 2 é $\pi_2^e = \mathbf{E}[A - c - q_2 - \beta_2(\cdot)q_1(\cdot)]q_2$. No equilíbrio bayesiano, a condição de primeira ordem de maximização de lucro da firma 2 requer que $\dfrac{\partial\pi_2^e}{\partial q_2} = 0$, isto é, $\mathbf{E}(A - c - 2q_2^* - \beta_2(\cdot)q_1^*(\cdot)) = 0$. Portanto, $q_2^* = \frac{A-c-\mathbf{E}(\beta_2(\cdot)q_1^*(\cdot))}{2}$ e $\pi_2^e = q_2^{*2}$. Substituindo $q_1^*(\cdot)$ na equação acima e resolvendo para $q_2^*$, encontramos $\frac{(A-c)(2-\beta)}{4-\mathbf{E}(\beta_1(\cdot)\beta_2(\cdot))}$. Como $\beta_1$ e $\beta_2$ não são variáveis independentes, temos $\mathbf{E}(\beta_1(\cdot)\beta_2(\cdot)) = \mathbf{E}\beta_1(\cdot)\mathbf{E}\beta_2(\cdot) + Cov(\beta_1, \beta_2)$. Como $\mathbf{E}\beta_1(\cdot) = \mathbf{E}\beta_2(\cdot) = \beta$, temos $\mathbf{E}(\beta_1(\cdot)\beta_2(\cdot)) = \beta^2 + Cov(\beta_1, \beta_2) = \beta^2 + \sigma_{12}$, em que $\sigma_{12} = Cov(\beta_1, \beta_2)$ denota a covariância. Portanto, as quantidades de equilíbrio são $q_1^*(\omega) = \frac{A-c-\beta_1(\omega)q_2^*}{2}$ e $q_2^* = \frac{(A-c)(2-\beta)}{4-\beta^2-\sigma_{12}}$. Por hipótese, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, de modo que, se denotarmos por $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ a correlação dos efeitos-cruzados, então:

$$q_2^* = \frac{(A - c)(2 - \beta)}{4 - \beta^2 - \rho\sigma^2}$$

[1] Isso quer dizer que a positivididade do volume de produção ocorre com probabilidade 1.

Substituindo esse valor em $q_1^*(\omega)$, encontramos finalmente:

$$q_1^*(\omega) = \frac{(A-c)(2-\beta)[(A-c)-\beta_1(\omega)]}{2(4-\beta^2-\rho\sigma^2)}$$

o que termina a demonstração. ■

## 2.3. *Vantagem informacional com valores parcialmente privados*

Nesta parte, vamos determinar o grau de correlação dos efeitos-cruzados que permitem a vantagem informacional da firma 1. Definimos o nosso caso como o de valores parcialmente privados. Por simplicidade, suponha que $\beta = 1$, ou seja, que a esperança das variáveis aleatórias $\beta_1$ e $\beta_2$ seja igual à unidade. A proposição 2 a seguir mostra que, no caso de valores parcialmente privados, existe vantagem informacional para a firma informada sempre que a covariância entre os efeitos-cruzados não é moderada, ou seja, sempre que a covariância é muito baixa ou muito alta. Isso lança uma luz sobre o modelo de Chokler *et alii* (2006) no sentido de alertar-nos quanto ao papel da imprecisão do efeito-cruzado na vantagem informacional.

**Proposição 2.** Considere o oligopólio de Cournot com valores parcialmente privados e seja $\sigma_{12}$ a covariância entre os efeitos-cruzados. Então, no equilíbrio bayesiano de Cournot, existe vantagem informacional para a firma 1 se $\sigma_{12} \in [-\sigma^2, 2-\sqrt{4-\sigma^2}] \cup [2+\sqrt{4-\sigma^2}, \sigma^2]$.

**Demonstração.** Decorre da proposição 1 que o lucro esperado da firma 1 é $\pi_1^e = \mathbf{E}[q_1^2(\cdot)]$. Seja $\sigma_{12} = cov(\beta_1, \beta_2)$ a covariância entre as variáveis aleatórias $\beta_1$ e $\beta_2$. Vamos calcular, em primeiro lugar, $q_1^2$. Ora, $q_1^2(\cdot) = \frac{(A-c)^2-2(A-c)\beta_1(\cdot)q_2^*+\beta_1^2(\cdot)q_2^{*2}}{4}$. Assim, de $\pi_1^e = \mathbf{E}[q_1^2(\cdot)]$ temos $\pi_1^e = \frac{(A-c)^2-2(A-c)q_2^*+\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]q_2^{*2}}{4}$. Comparando os lucros esperados, fazemos $\pi_1^e \geq \pi_2^e$. Como $\pi_2^e = q_2^{*2}$, temos $\frac{(A-c)^2-2(A-c)q_2^*+\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]q_2^{*2}}{4} \geq q_2^{*2}$, donde $(A-c)^2 - 2(A-c)q_2^* + \mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]q_2^{*2} \geq 4q_2^{*2}$. Logo, $q_2^{*2}(4-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]) + 2(A-c)q_2^* - (A-c)^2 \leq 0$. Substituindo $q_2^* = \frac{A-c}{3-\sigma_{12}}$ na equação, temos $(\frac{A-c}{3-\sigma_{12}})^2(4-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]) + 2(A-c)(\frac{A-c}{3-\sigma_{12}}) - (A-c)^2 \leq 0$, donde $\frac{4-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]}{(3-\sigma_{12})^2} + \frac{2}{3-\sigma_{12}} \leq 1$. Logo, $\frac{4-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]+2(3-\sigma_{12})}{(3-\sigma_{12})^2} \leq 1$, donde $4-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]+2(3-\sigma_{12}) \leq (3-\sigma_{12})^2$, de modo que $4-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]+6-2\sigma_{12} \leq 9-6\sigma_{12}+(\sigma_{12})^2$, ou seja, $1-\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]+4\sigma_{12}-(\sigma_{12})^2 \leq 0$. Como $\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)] = \sigma^2+1$, temos $(\sigma_{12})^2 - 4\sigma_{12} + (\sigma^2+1) - 1 \geq 0$, donde $(\sigma_{12})^2 - 4\sigma_{12} + \sigma^2 \geq 0$. Se $\sigma_{12}^{(*)}$ denota uma raiz do polinômio $(\sigma_{12})^2 - 4\sigma_{12} + \sigma^2$, então $\sigma_{12}^{(*)} = 2 \pm \sqrt{4-\sigma^2}$.Além disso, como $\sigma_{12} = \rho\sigma^2$ e $-1 \leq \rho \leq 1$, então o conjunto de valores da covariância dos efeitos-cruzados para os quais a informação é vantajosa para a firma 1 é:

$$\sigma_{12} \in [-\sigma^2, 2-\sqrt{4-\sigma^2}] \cup [2+\sqrt{4-\sigma^2}, \sigma^2]$$

que é o complementar de $[2-\sqrt{4-\sigma^2}, 2+\sqrt{4-\sigma^2}]$ junto com a condição $-\sigma^2 \leq \sigma_{12} \leq \sigma^2$, o que termina a demonstração. ■

A desconexão (em duas componentes conexas) do conjunto de valores de covariância para os quais a firma 1 possui vantagem informacional sob valores parcialmente privados dão um alerta às conclusões de Chockler et alii (2006) no que diz respeito à robustez dos resultados relativamente a perturbações das condições de valores comuns e de valores privados independentes. Em termos das correlações:

$$\rho \in [-1, \frac{2-\sqrt{4-\sigma^2}}{\sigma^2}] \cup [\frac{2+\sqrt{4-\sigma^2}}{\sigma^2}, 1]$$

No caso em que supomos $\rho \geq 0$, existirá vantagem informacional se $\rho \in [0, \frac{2-\sqrt{4-\sigma^2}}{\sigma^2}] \cup [\frac{2+\sqrt{4-\sigma^2}}{\sigma^2}, 1]$.

## 3. O Papel da Volatilidade na Vantagem Informacional

De maneira semelhante ao que foi feito acima, comparamos os lucros esperados como uma função de $\rho$, para cada grau de imprecisão ou volatilidade $\sigma^2$. Para isso, defina $\psi(\rho|\sigma^2) = \pi_1^e - \pi_2$, de modo a encontrarmos a região em que a informação é vantajosa para a firma 1. Ora, $\pi_1^e - \pi_2 = \frac{(A-c)^2 - 2(A-c)q_2^* + \mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)]q_2^{*2}}{4} - q_2^{*2}$. Como $q_1^* = \frac{A-c-\beta_1(\cdot)q_2^*}{2}$, $\mathbf{E}[\beta_1^2(\cdot)] = \sigma^2 + 1$ e $q_2^* = \frac{A-c}{3-\sigma_{12}}$, temos $\pi_1^e - \pi_2 = \frac{(A-c)^2[-4\sigma_{12} + (\sigma_{12})^2 + \sigma^2]}{4(3-\sigma_{12})^2}$. Por simplicidade, vamos tomar $A - c = 1$. Além disso, como $\sigma_{12} = \rho\sigma^2$, temos $\pi_1^e - \pi_2 = \sigma^2 \frac{1-4\rho+\rho^2\sigma^2}{4(3-\rho\sigma^2)^2}$. Portanto:

$$\psi(\rho|\sigma^2) = \sigma^2 \frac{1-4\rho+\rho^2\sigma^2}{4\left(3-\rho\sigma^2\right)^2}$$

Vamos mostrar que, quando a imprecisão dos efeitos-cruzados é suficientemente pequena, mais precisamente, quando a variância está no intervalo $0 \leq \sigma^2 \leq 3$, então, nesse intervalo, podemos identificar os casos abordados por Chokler *et alii* (2006), ou seja, o caso de valor comum, em que a correlação é 1 e no qual existe uma desvantagem informacional, e o caso de valores privados independentes, em que a correlação é igual a zero e existe uma vantagem informacional. No entanto, quando a variância dos efeitos-cruzados assume valores maiores, precisamente no intervalo, $3 < \sigma^2 \leq 4$, existe uma descontinuidade em relação ao caso de valor comum. Mais precisamente, quando a variância é suficientemente grande, qualquer desvio dos parâmetros $\beta_1$ e $\beta_2$ em relação ao caso extremo de valor comum acarreta vantagem informacional para a firma informada, o que mostra que, para grandes volatilidades desses parâmetros, a desvantagem informacional correspondente ao caso de valor comum não é robusta.

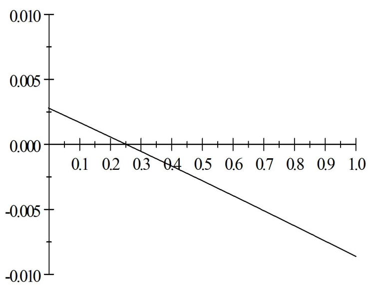
Vejamos o primeiro caso, em que a variância está no intervalo, $0 \leq \sigma^2 \leq 3$. Tomemos, por exemplo, $\sigma^2 = 0.1$. Então, $\psi(\rho|3) = 0.1\frac{1-4\rho+0.1\rho^2}{4(3-0.1\rho)^2}$. A correlação crítica $\rho^*_{[\sigma^2=0.1]}$ para a qual $\psi(\rho|0.1) = 0$ é, então, $\rho^*_{[\sigma^2=0.1]} \cong 0.002778$. Isso quer dizer que, quando $\sigma^2 = 0.1$, então a firma 1 obtém vantagem informacional com valores parcialmente privados, desde que a correlação entre os valores seja, no máximo, $\rho^*_{[\sigma^2=0.1]} \cong 0.002778$. Quando a correlação ultrapassa esse valor, a firma 1 passa a ter desvantagem informacional. Como só estamos considerando o caso de bens substitutos, então $\rho \geq 0$.

Resumimos os resultados encontrados na tabela abaixo:

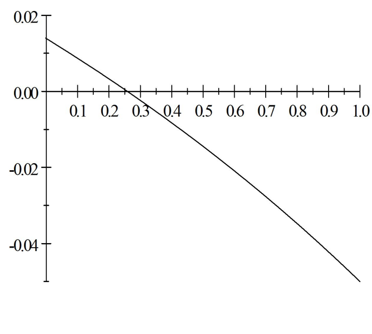
| | $\sigma^2 = 0.1$ | $\sigma^2 = 0.5$ | $\sigma^2 = 1$ | $\sigma^2 = 2$ | $\sigma^2 = 2.9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi(\rho\|\sigma^2)$ | $0.1\frac{1-4\rho+0.1\rho^2}{4(3-0.1\rho)^2}$ | $0.5\frac{1-4\rho+0.5\rho^2}{4(3-0.5\rho)^2}$ | $\frac{1-4\rho+\rho^2}{4(3-\rho)^2}$ | $2\frac{1-4\rho+2\rho^2}{4(3-2\rho)^2}$ | $2.9\frac{(1-4\rho+2.9\rho^2)}{4(3-2.9\rho)^2}$ |
| $\rho^*_{[\sigma^2=\cdot]}$ | 0.2516 | 0.2583 | 0.2679 | 0.2929 | 0.32800 |
| $\psi(0\|\sigma^2)$ | 0.0028 | 0.0139 | 0.0278 | 0.0556 | 0.0806 |

Note que, quanto maior a variância, dentro do intervalo (0,3), maior a correlação crítica, ou seja, maior a resiliência da vantagem informacional da firma informada em relação à dependência do efeito-cruzado. A seguir, plotamos os gráficos do diferencial de lucro, $\psi(\rho|\sigma^2) = \pi_1^e - \pi_2$, em função da correlação $\rho$ para os valores de $\sigma^2$ ilustrados acima:

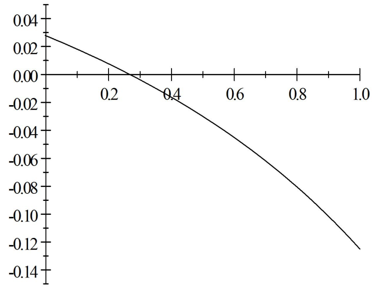
$$\sigma^2 = 0.1; \rho^*_{[\sigma^2=0.1]} = 0.2516; \psi(0|0.1) \cong 0.0028$$



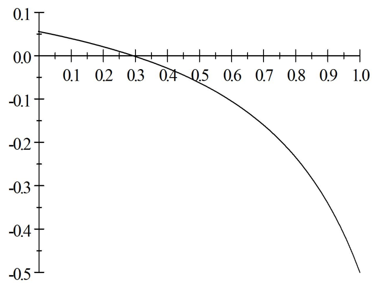

$$\sigma^2 = 0.5; \rho^*_{[\sigma^2=0.5]} = 0.2583; \psi(0|0.5) \cong 0.0139$$



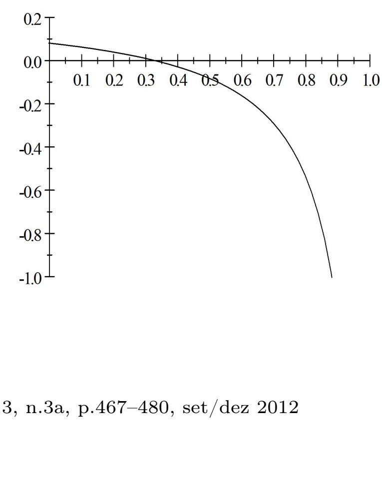
$$\sigma^2 = 1; \rho^*_{[\sigma^2=1]} = 0.2679; \psi(0|1) \cong 0.0278$$




$$\sigma^2 = 2; \rho^*_{[\sigma^2=2]} = 0.2929; \psi(0|2) \cong 0.0556$$




$$\sigma^2 = 2.9; \rho^*_{[\sigma^2=2.9]} = 0.3280; \psi(0|2.9) \cong 0.0806$$

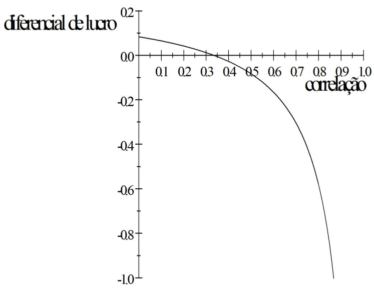


Percebemos pelos gráficos acima que, para os casos em que $0 \leq \sigma^2 < 3$, quanto maior a volatilidade dos efeitos-cruzados (quanto maior $\sigma^2$), maior será a correlação crítica para a qual a informação é vantajosa para a firma 1 e, também, maior será seu diferencial de lucro (ou seja, maior será $\psi(0|\sigma^2)$). Além disso, quanto maior a volatilidade dos efeitos-cruzados, maior será a tolerância dos valores parcialmente privados no que concerne à vantagem informacional para a firma informada.

Voltamos agora para o caso em que a imprecisão dos efeitos-cruzados é suficientemente grande, a saber, $3 \leq \sigma^2 \leq 4$.

Suponha agora que $\sigma^2 = 3$. Então, $\psi(\rho|3) = \frac{1-4\rho+3\rho^2}{12(1-\rho)^2}$. A correlação crítica $\rho^*_{[\sigma^2=3]}$ para a qual $\psi(\rho|3) = 0$ é, então, $\rho^*_{[\sigma^2=3]} = \frac{1}{3} \cong 0.3333$. Esse é justamente o caso limite, segundo o qual existe um intervalo de correlações baixas que dão vantagem informacional à firma 1 e um intervalo complementar de correlações altas que dão desvantagem.

Dessa forma, o gráfico de $\psi(\rho|3)$ na região $[0, 1]$ possui uma assíntota em $\rho = 1$:

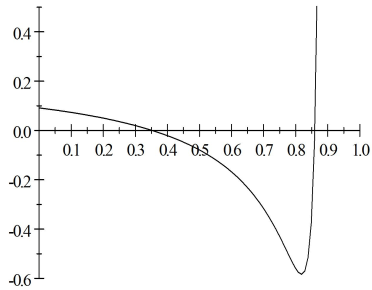



Podemos, assim, montar uma tabela semelhante á que fizemos para variância baixa:

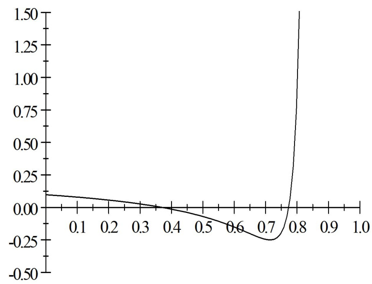
| | $\sigma^2 = 3$ | $\sigma^2 = 3.3$ | $\sigma^2 = 3.5$ | $\sigma^2 = 3.8$ | $\sigma^2 = 4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi(\rho\|\sigma^2)$ | $\frac{1-4\rho+3\rho^2}{12(1-\rho)^2}$ | $3.3\frac{1-4\rho+3.3\rho^2}{4(3-3.3\rho)^2}$ | $3.5\frac{1-4\rho+3.5\rho^2}{4(3-3.5\rho)^2}$ | $3.8\frac{1-4\rho+3.8\rho^2}{4(3-3.8\rho)^2}$ | $4\frac{(1-4\rho+4\rho^2)}{4(3-4\rho)^2}$ |
| $\rho^*_{[\sigma^2=\cdot]}$ | 0.3333 | 0.3526 | 0.3694 | 0.4087 | 0.5000 |
| | | 0.8596 | 0.7735 | 0.6440 | |
| $\psi(0\|\sigma^2)$ | 0.0833 | 0.0916 | 0.0972 | 0.1055 | 0.1111 |

Para $\sigma^2 = 3$, o diferencial de lucro possui um único zero, que ocorre para $\rho = 0.333$. Nesse ponto, o diferencial de lucro é transversal ao eixo de correlações. Mas para uma variância entre 3 e 4, o diferencial de lucro possui dois zeros. Para $\sigma^2 = 4$, o diferencial de lucro volta a ter um único zero, que ocorre para $\rho = 0.5$, mas, nesse ponto, o diferencial de lucro atinge um valor mínimo exatamente sobre o eixo de correlações. Plotamos os gráficos para cada valor de $\sigma^2$ considerado acima:

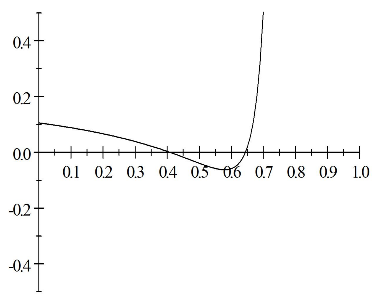
$$\sigma^2 = 3.3; \rho^*_{[\sigma^2=3.3]} = 0.3526; \psi(0|3.3) = 0.0916$$



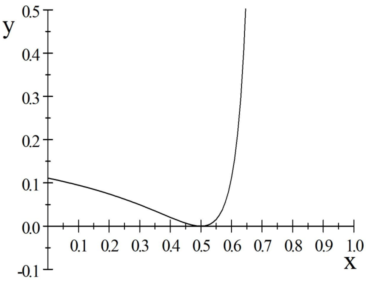

$$\sigma^2 = 3.5; \rho^*_{[\sigma^2=3.5]} = 0.3694; \psi(0|3.5) = 0.0972$$




$$\sigma^2 = 3.8; \rho^*_{[\sigma^2=3.8]} = 0.4086; \psi(0|3.8) = 0.1055$$



$$\sigma^2 = 4; \rho^*_{[\sigma^2=4]} = 0.5; \psi(0|\sigma^2) = 0.1111$$




Percebe-se dos gráficos que, para o intervalo $3 \leq \sigma^2 \leq 4$, à medida que a imprecisão dos efeitos-cruzados aumenta, a assíntota avança. Quando a correlação entre os valores parcialmente privados é suficientemente baixa, a firma 1 possui vantagem informacional. Quando essa correlação é mediana, ela passa a ter desvantagem informacional. Porém, quando é suficientemente elevada, próxima ao caso de valor comum, a firma passa a ter, novamente, vantagem informacional.

Defina a função:

$$\xi(\rho, \sigma^2) = \begin{cases} +1, \text{ se } \psi(\rho|\sigma^2) \geq 0 \\ -1, \text{ se } \psi(\rho|\sigma^2) < 0 \end{cases}$$

que indica vantagem informacional da firma informada em termos da correlação e da variância. Se a variância é suficientemente baixa, então o gráfico de $\xi$ em termos da correlação $\rho$ tem a forma da Figura 1. Se a variância é suficientemente alta, então o gráfico de $\xi$ em termos da correlação $\rho$ tem a forma da Figura 2.

Fig. 1.

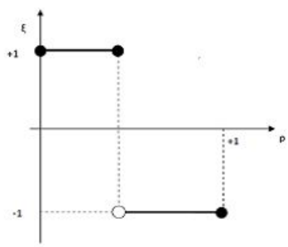
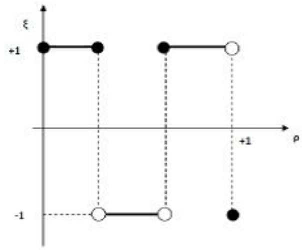


Fig. 2.




Com isso desvendamos o que ocorre dentro da caixa-preta deixada pelo modelo de Chokler *et alii* (2006). A Figura 2 evidencia as duas correlações críticas e a não-robustez da desvantagem informacional para valores comuns quando a imprecisão do efeito-cruzado é elevada.

## 4. Conclusão

No modelo de Chockler et alii (2006), à medida que a correlação entre os efeitos-cruzados cresce, passando do caso de valores privados independentes para valores comuns, a firma informada passa a ter desvantagem informacional na forma de lucros esperados menores. Assim, para a firma informada, é melhor a situação de valores privados independentes.

Fizemos uma extensão de seu modelo para o caso de valores parcialmente privados. Vimos que a imprecisão dos parâmetros de efeitos-cruzados assume um papel importante, pois, quando alta, evidencia-se que a situação de valor comum não é robusta, ou seja, qualquer desvio do valor comum para valores parcialmente privados gera vantagem informacional. Particularmente, o que fizemos neste artigo foi verificar a natureza dessa passagem e descobrimos que ela não é trivial. Para modelar essa passagem, consideramos o caso de valores parcialmente privados, que é um meio-termo entre os dois casos extremos estudados por Chockler et alii (2006). As variáveis aleatórias não são independentes, mas também não coincidem nos pontos amostrais. Mostramos que, se a volatilidade do efeito-cruzado é baixa, o resultado de Chockler et alii (2006) se verifica. Mas se a variância é alta, a desvantagem informacional da firma informada no caso de valores comuns não é robusta. Em outras palavras, uma perturbação pequena do caso de valores comuns para valores parcialmente privados gera vantagem informacional para a firma informada. Quando a perturbação se torna maior, ela volta a ter desvantagem e, quando a perturbação é ainda maior, aí sim ela passa a ter vantagem informacional outra vez. Isso ocorre devido ao fato de termos duas correlações críticas distintas que definem essas mudanças. Fizemos hipóteses simplificadoras, mas elas não invalidam as nossas conclusões, uma vez que o nosso objetivo foi justamente construir uma situação que enriquecesse, do ponto de vista econômico, uma caixa-preta presente no modelo de Chockler et alii (2006).

## Referências bibliográficas

Chockler, A., Shlomit, H.-S., Moshe, K., & Shitovitz, B. (2006). Information disadvantage in linear Cournot duopolies with differentiated products. *International Journal of Industrial Organization*, 24:785–793.

Vives, X. (2001). *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. The MIT Press.