

INSTABILIDADE E NÃO-LINEARIDADES NOS MERCADOS FINANCEIROS

Este trabalho tem como objetivos mostrar os limites dos modelos estocásticos tradicionalmente utilizados na análise dos mercados financeiros e contribuir para o desenvolvimento de novos temas de pesquisa, através da proposição de um modelo determinista não linear do mercado de câmbio.

O estudo dos modelos tradicionais, em termos da realidade que eles pretendem descrever, levanta duas questões principais. A primeira é: “como tratar a instabilidade dos mercados financeiros no contexto dos modelos deterministas lineares?”. A segunda diz respeito à necessidade de combinar uma análise “micro” com uma análise “macro” dessa instabilidade.

A primeira questão relaciona-se ao fato de que modelos estocásticos, como os do tipo ARCH (modelos em tempo discreto) e os processos L-estáveis (modelos em tempo contínuo) são as respostas tradicionais à instabilidade observada no contexto do enfoque determinista linear.

A questão da passagem “micro-macro” implica, por sua vez, a crítica às hipóteses de expectativas racionais e eficiência dos mercados. Esse tipo de crítica levou diversos autores a propor esquemas teóricos alternativos, baseados nos conceitos de “racionalidade limitada” e “mimetismo”.

A partir dessas duas questões, o presente trabalho chama a atenção para a necessidade do desenvolvimento de novos temas de pesquisa.

De um lado, a crítica ao enfoque estocástico mostra que este último é baseado na hipótese básica do determinismo clássico: o comportamento dos agentes se repetirá sob condições “quase semelhantes”, ou seja, uma mudança pouco significativa dessas condições iniciais levará a conseqüências igualmente pouco significativas.

De outro lado, os esquemas teóricos alternativos desenvolvidos até agora não foram muito bem sucedidos ao lidar com o problema de combinar a análise “micro” com a análise “macro” da instabilidade, o que decorre do fato de que a informação dos agentes no mercado é heterogênea.

Nossa discussão é assim centralizada na análise do determinismo não-linear e em particular, na teoria do caos.

A característica mais marcante dos sistemas “caóticos” é a “sensibilidade às condições iniciais”, uma vez que a sua dinâmica muda de maneira bastante significativa em resposta a pequenas mudanças dessas condições.

Além do mais, essa teoria é relacionada à análise de sistemas dinâmicos complexos, no sentido de que a não-linearidade dos sistemas considerados “caóticos” resulta da interação de diversos componentes, o que leva à propriedade de “emergência” que caracteriza os sistemas complexos e que pode ser resumida pela frase: “o todo é maior do que a soma de suas partes”.

Iniciamos nosso trabalho por uma discussão sobre o tratamento da instabilidade dos mercados financeiros pelos modelos estocásticos (modelos ARCH e processos L-estáveis).

Em segundo lugar, analisamos a crítica à hipótese de eficiência dos mercados em termos dos conceitos de “racionalidade limitada” e “mimetismo”.

Finalmente, procuramos mostrar como a teoria do caos pode fornecer uma interpretação alternativa aos modelos estocásticos no estudo da instabilidade dos mercados financeiros em um contexto internacional.

A conclusão procura enfatizar, de um lado, o relacionamento dos problemas de previsão nos mercados financeiros com a “sensibilidade às condições iniciais” dos sistemas “caóticos” e de outro lado, a identificação da heterogeneidade da informação e da interação dos agentes como as principais causas da instabilidade financeira internacional.

1. Econometria tradicional e modelos estocásticos

Diversos estudos empíricos chamaram a atenção sobre o fato de que as séries financeiras não verificam com frequência as hipóteses tradicionais da econometria.

Essas hipóteses são: a normalidade, a estacionaridade, a independência dos resíduos e a homoscedasticidade.

De maneira geral, os testes referentes ao momento empírico de terceira ordem ou coeficiente de assimetria (“skewness”) e ao momento empírico de quarta ordem ou coeficiente de “achatamento” (“kurtosis”) mostraram que as distribuições de preços de ativos financeiros são menos simétricas e possuem “caudas” mais espessas (elas são então denominadas “leptokúrticas”, o que significa que os valores extremos têm uma probabilidade de ocorrência não negligável) do que a distribuição normal. Esses resultados levaram muitos autores a propor e testar distribuições alternativas, como os processos L-estáveis (Mandelbrot, 1963, Fama, 1965) ou o processo Misto Difusão-Salto (Akgiray & Booth, 1988, Tucker & Pond, 1988). Este último constitui uma combinação do processo de Wiener – em sua forma geral ou como movimento browniano - e de um processo composto de uma distribuição de Poisson e de uma distribuição normal.

A presença do fenômeno de não-normalidade provoca desvios bastante significativos nos resultados dos tratamentos estatísticos que visam a adaptar as leis de distribuição das séries financeiras à lei normal, na medida em que esses tratamentos levam a truncar a série em questão, mantendo-se apenas os pontos que possuem as “boas propriedades” enquanto que os valores extremos, considerados como pontos aberrantes, são descartados.

Os resultados da maior parte dos estudos empíricos levaram igualmente a considerar as séries financeiras como sendo, de maneira geral, não-estacionárias, o que implica que essas séries podem ter uma raiz unitária de primeira ou de segunda ordem e conseqüentemente, que seu comportamento dinâmico pode ser representado pelo modelo de marcha aleatória. A não-estacionariedade pode ser definida, em termos menos formais, pelo fato de que as distribuições das séries em questão podem variar, seja em média, seja em variância.

Assim, todo desenvolvimento de modelos econométricos que não levar em conta a não-estacionariedade da série estudada corre o risco de chegar a resultados pouco confiáveis.

Por outro lado, os problemas ligados à escolha de um portfólio ótimo de títulos levam a considerar com atenção a existência eventual de heteroscedasticidade e de autocorrelação dos resíduos nas séries de ativos financeiros.

A presença de resíduos heteroscedásticos, isto é, de resíduos cuja variância condicional depende do tempo, conduz a estimadores não eficientes dos parâmetros e da

matriz de covariância, esta última sendo o indicador de risco nos modelos de escolha de portfólio.

De maneira semelhante, a autocorrelação dos resíduos pode, por si só, conduzir a problemas de estimação que têm repercussão sobre a matriz de covariância.

Uma vez que os trabalhos empíricos identificaram a existência desses dois últimos fenômenos nas séries financeiras, diversos estudos teóricos foram desenvolvidos com o objetivo de propor modelos estocásticos para levá-los em conta. Esses modelos foram denominados “modelos do tipo ARCH” (de “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”), a partir dos trabalhos de Engle (1982) e Bollerslev (1986).

Nas próximas sub-seções, discutiremos os modelos do tipo ARCH e os processos L-estáveis, propostos, respectivamente, para o tratamento dos fenômenos de heteroscedasticidade dos resíduos e de não-normalidade, observados empiricamente nas séries de preços de ativos financeiros.

1.1. Modelos do tipo ARCH

Em seu trabalho pioneiro, Engle (1982) propôs um modelo ARCH de ordem p ou ARCH(p), definido da maneira descrita a seguir.

Considera-se o processo autoregressivo Y_t , representado pela equação

$$(1.1) Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^j a_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

em que o resíduo ε_t segue uma distribuição normal de média nula e variância σ_t^2 , definida como segue.

$$(1.2) \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

De maneira mais precisa, $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$, em que η_t é i.i.d. e segue uma lei normal de média zero e variância igual a um.

Na segunda equação, se os coeficientes ω e α_i forem positivos, ω representará o nível mínimo de volatilidade e a relação entre σ_t e ε_{t-i} mostrará que a hipótese de constância da variância (homoscedasticidade) não é verificada. Além do mais, essa relação implica que, se houve uma variação importante em um passado recente, a volatilidade (representada pela variância) deverá aumentar, o que torna mais provável a repetição desse tipo de variação. Essa propriedade de concentração da volatilidade dos preços dos ativos financeiros foi expressa por Mandelbrot (1963) através da frase: “... grandes variações tendem a ser seguidas por grandes variações – qualquer que seja o sinal – e pequenas variações tendem a ser seguidas por pequenas variações...”

Bollerslev (1986) generalizou o modelo ARCH(p), em termos da extensão das defasagens temporais consideradas, ao introduzir, como veremos a seguir, os valores passados da variância na equação (1.2).

$$(1.3) \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

O modelo acima representado é denominado modelo GARCH (de “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”) de ordem p e q ou GARCH(p,q) e exige que os coeficientes ω , α_i e β_i sejam positivos.

Por outro lado, a existência de raiz unitária, indicando a existência de não-estacionaridade, nos processos descritos pelo modelo GARCH(p,q), conduziu ao desenvolvimento do modelo IGARCH.

Outra extensão do modelo ARCH é o modelo EARCH ou ARCH exponencial, proposto por Nelson (1991), em decorrência da observação de que os rendimentos das ações são correlacionados negativamente com as variações da volatilidade desses rendimentos. Isso significa que a volatilidade tende a aumentar em reação à divulgação de más notícias e a diminuir no caso contrário.

Finalmente, devemos mencionar aqui, pela sua relação particular com o desenvolvimento de modelos financeiros (CAPM, no caso de uma economia fechada e IAPM, no de uma economia aberta), o modelo ARCH-M (de “ARCH-in-MEAN”), no qual a média condicional é uma função explícita da variância condicional.

Uma questão agora se impõe: são os modelos ARCH capazes de tratar a leptokurtosis, igualmente observada, como vimos, nas séries de preços de ativos financeiros?

Nesse particular, os trabalhos de Milhøj (1985) e Bollerslev(1986) mostram que a distribuição incondicional dos resíduos ε_t , obtida a partir do modelo GARCH(p,q) com resíduos condicionais normais, apresenta uma kurtosis excessiva, em outros termos, essa distribuição incondicional é leptokúrtica.

Por outro lado, estudos tratando mais especificamente de taxas de câmbio revelam que mesmo a distribuição condicional – com resíduos normalizados - de modelos ARCH estimados pode ser também leptokúrtica. Esse é o caso, por exemplo, do estudo de Bollerslev (1987).

Finalmente, Baillie & Bollerslev (1989), analisando igualmente o mercado de câmbio, concluem que a evolução de curto prazo dos logaritmos das taxas de câmbio correntes é representada adequadamente através de um modelo de marcha aleatória afetada por uma kurtosis excessiva e uma heteroscedasticidade variável no tempo.

Essa conclusão leva a pensar na maneira de tratar o fenômeno da leptokurtosis. Como vimos anteriormente, os autores se dividiram ao propor distribuições alternativas à distribuição normal: enquanto alguns estudos favoreceram os processos L-estáveis, outros se voltaram para o processo MDS (processo Misto Difusão-Salto).

Tendo em vista que os modelos de avaliação de ativos financeiros foram desenvolvidos no contexto de processos em tempo contínuo (como o movimento browniano), existem problemas na aplicação tanto dos modelos ARCH, que são modelos em tempo discreto, quanto do modelo do processo MDS, que apresenta igualmente componentes discretos (o componente representativo de um processo de Poisson). Assim, na sub-seção seguinte, nós nos limitaremos à discussão dos modelos de processos L-estáveis.

1.2. Movimento browniano e processos L-estáveis

Em 1900, em uma tese sobre a “Teoria da Especulação”, o matemático Louis Bachelier desenvolveu pela primeira vez o modelo do movimento browniano, que é um

caso particular dos processos L-estáveis, também denominados “Lévy-estáveis”, “ α -estáveis” ou “Pareto-estáveis”.

Deve-se enfatizar o caráter pioneiro do trabalho de Bachelier. Seu modelo, na realidade, foi “redescoberto” em 1905 por Einstein no campo da Física e em 1920 por Norbert Wiener no campo da Matemática (um outro nome para o modelo do movimento browniano é aliás “processo de Wiener”). Esse modelo deve no entanto ser criticado em sua aplicação aos mercados financeiros, uma vez que ele supõe a normalidade de sua distribuição de probabilidade.

Uma característica importante da distribuição normal (ou distribuição de Laplace-Gauss) é a velocidade com que ela decresce nos pontos situados longe do centro. Isso significa que as grandes variações são raras no contexto da lei normal.

A observação do comportamento dos mercados financeiros mostra, no entanto, que as grandes flutuações têm uma grande probabilidade de ocorrência (este é o fenômeno de leptokurtosis).

De um ponto de vista empírico, a maior parte dos estudos realizados rejeitou a hipótese de normalidade das séries financeiras - o que se deve sobretudo à leptokurtosis – particularmente no caso em que os intervalos de tempo são pequenos (Boutillier, 1992).

De um ponto de vista teórico, a crítica mais importante à utilização da distribuição normal do modelo do movimento browniano desenvolvido por Bachelier foi feita por Mandelbrot (1963), que propõe um modelo alternativo baseado na hipótese de que as mudanças nos preços dos ativos financeiros são L-estáveis e independentes.

A propriedade de L-estabilidade é baseada em uma característica da distribuição gaussiana: a soma de variáveis aleatórias gaussianas independentes é também gaussiana.

A extensão dessa propriedade a outras distribuições foi feita por Cauchy e Paul Lévy (Mandelbrot, 1997a). A distribuição de Cauchy, por exemplo, é um processo L-estável em que a variância é infinita.

De maneira geral, para uma variável aleatória X , os processos L-estáveis são definidos pelo comportamento seguinte.

$$\Pr \{X > x\} \sim C^{-\alpha}$$

em que C é uma constante e α é um parâmetro que pode variar no intervalo $(0,2]$. Nesse contexto, quando α é igual a 2, estamos em presença de uma distribuição normal, que é uma lei estável particular. Para $0 < \alpha < 2$, o momento de ordem a , que representamos por $E [|X|^a]$ existe se e somente se $a < \alpha$ e é infinito no caso contrário, em outros termos, a variância é infinita. A densidade de probabilidade dessas distribuições admite “caudas” progressivamente mais espessas à medida que os valores de α se tornam cada vez mais pequenos.

Os processos L-estáveis não-gaussianos podem explicar a leptokurtosis observada nas séries financeiras. Eles o fazem no contexto dos fenômenos de “descontinuidade” e “concentração”, identificados por Mandelbrot, que os tratou separadamente em um primeiro momento. Assim, o modelo proposto em seu artigo de 1963 estuda a descontinuidade e o apresentado em Mandelbrot (1965) analisa a concentração. Posteriormente, os dois fenômenos foram unificados em um terceiro modelo, cuja primeira versão foi apresentada em Mandelbrot (1972) e a segunda em Mandelbrot (1997b).

Os fenômenos de descontinuidade e concentração, observados nas séries financeiras (Mandelbrot, 1997a), eliminam a possibilidade de analisá-las através de modelos deterministas lineares, uma vez que os teoremas básicos do cálculo das probabilidades não se aplicam a essa situação (a não verificação dos teoremas impede a aplicação do procedimento tradicional para lidar com a irregularidade e que consiste em primeiro identificar uma tendência e em seguida, a ela superpor as flutuações).

O principal problema com relação aos processos L-estáveis não-gaussianos reside na sua utilização empírica, em decorrência da característica de variância infinita.

De um lado, essa característica torna impossível a realização de cálculos econométricos através de métodos que utilizam momentos finitos (como é o caso do método de “mínimos quadrados”).

De outro lado, alguns estudos empíricos mostraram uma relação inversa entre periodicidade e kurtosis, implicando que a agregação temporal leva a aceitar mais facilmente a hipótese de normalidade, o que é igualmente incompatível com a característica de variância infinita (Boutillier, 1992).

1.3. Conclusão

A discussão acima empreendida leva a duas conclusões principais: de um lado, os modelos ARCH – modelos não-estacionários - não foram até agora capazes de explicar toda a leptokurtosis - característica indicativa de não-normalidade - das distribuições de séries temporais representativas de preços de ativos financeiros e de outro lado, o modelo do movimento browniano, por ser um processo gaussiano, foi objeto de uma importante crítica, levando à proposta, por Mandelbrot (1963), de um modelo mais geral, o dos processos L-estáveis, para o tratamento dessa não-normalidade. O estudo dos processos L-estáveis – processos estacionários - permitiu a Mandelbrot identificar dois tipos de fenômenos nessas séries: a descontinuidade e a concentração.

Vimos igualmente que os processos L-estáveis não-gaussianos encontram importantes obstáculos em sua utilização empírica pelo fato de possuírem uma variância infinita.

Assim, dentre os modelos estocásticos desenvolvidos até agora para o tratamento econométrico das séries financeiras, não se encontra um modelo capaz de lidar simultaneamente com todas as características estatísticas acima mencionadas (não-normalidade, não-estacionaridade, autocorrelação dos resíduos e heteroscedasticidade), particularmente com a não-normalidade e a heteroscedasticidade.

A presença dos fenômenos de descontinuidade e concentração nessas séries chama a atenção para o fato de que elas não podem ser analisadas a partir de modelos deterministas lineares, dado que os teoremas básicos do cálculo das probabilidades não são aplicáveis a essa situação.

Somos então levados a mostrar os limites desses modelos lineares em termos da teoria econômica e financeira. Isto significa que as hipóteses tradicionais sobre o comportamento dos agentes (expectativas racionais e eficiência do mercado) devem ser revistas. Essas hipóteses são baseadas na idéia de que todos os agentes no mercado possuem o mesmo tipo de informação, ou seja, de que eles têm expectativas homogêneas, o que não é confirmado pela realidade dos mercados financeiros.

A heterogeneidade das expectativas dos agentes observada no mercado é um problema relacionado à passagem micro-macro, em outras palavras, à consideração do

sistema como um todo pela análise da interação de seus componentes. Em oposição a esse ponto de vista, as hipóteses de expectativas racionais e eficiência do mercado são baseadas na idéia de que “o comportamento do todo é igual à soma do comportamento de suas partes”.

Na seção seguinte, discutiremos o argumento contra a idéia de homogeneidade das expectativas dos agentes através da discussão da hipótese de eficiência do mercado.

2. Eficiência do mercado

O conceito de eficiência do mercado em finanças é baseado nos seguintes critérios: consideramos que o valor atual líquido de um ativo sem risco é igual aos rendimentos que ele gera menos o valor atual de todos os pagamentos esperados (principal e juros). De maneira semelhante, o valor atual líquido de um ativo de risco é igual ao valor desse ativo (valor atual dos dividendos futuros) menos o seu preço. Um mercado é então eficiente se o valor total de suas transações é igual a zero.

De fato, quando os custos de transação são iguais a zero e todos os agentes têm acesso à mesma informação, a competição impedirá que o valor atual líquido seja positivo.

Assim, Fama (1965) define um mercado eficiente como sendo aquele formado por um grande número de agentes maximizadores de lucro em competição uns com os outros a fim de prever o valor futuro de mercado de um ativo particular e onde a informação corrente relevante é quase livremente disponível para todos os participantes. Toda a informação relevante em um tal mercado está contida nos preços.

Essas condições ideais não são fáceis de se encontrar na prática. Assim, define-se correntemente três formas de eficiência do mercado, de acordo com a quantidade de informação incluída nos preços: “eficiência fraca”, “eficiência semi-forte” e “eficiência forte”.

Um mercado “fracamente eficiente” é aquele em que os preços correntes incluem a informação total contida nos preços passados. Essa forma de eficiência é denominada “fraca” porque a quantidade de informação que ela requer é muito pequena.

Em um mercado fracamente eficiente, não se pode obter lucros acima da média utilizando a informação corrente porque essa informação já está incluída nos preços.

Podemos dizer então que a melhor previsão do preço futuro é o preço de hoje e podemos representar essa afirmação em termos matemáticos através do modelo de “marcha aleatória”, especificado a seguir.

$$p_{t+1} = p_t + \varepsilon_{t+1} \quad E(\varepsilon_{t+1}) = 0$$

em que p_{t+1} é o preço futuro, p_t o preço corrente e ε_{t+1} um erro de previsão aleatório com um valor esperado igual a zero.

A representação acima fornece uma maneira fácil de testar essa forma de eficiência.

Dizemos que um mercado se caracteriza por uma “eficiência semi-forte” se toda a informação pública disponível está contida nos preços correntes.

Isso implica que nenhum agente pode melhorar suas previsões sobre a evolução dos preços de uma maneira estável através da análise da informação macroeconômica. Esse tipo de mercado geralmente reage à informação de maneira rápida e apropriada.

Um mercado “fortemente eficiente” é aquele em que toda a informação relevante (pública e privada) está contida nos preços.

Em um mercado como esse, os preços se adaptam imediatamente à informação privada, de maneira que analistas, administradores de fundos e “experts” possam evitar que um agente individual obtenha lucros acima da média. Essa forma de eficiência é rara.

Os testes empíricos de eficiência do mercado, particularmente no caso das taxas de câmbio, não foram conclusivos: os preços podem apresentar um comportamento não-estacionário - que está de acordo com o princípio da “marcha aleatória” – mas podem também seguir uma evolução que não verifica esse modelo (Baillie & McMahon, 1997).

A fim de criticar as hipóteses de eficiência do mercado e de expectativas racionais, que são as bases do enfoque tradicional no estudo dos mercados financeiros, modelos alternativos foram desenvolvidos.

A idéia básica da crítica às hipóteses de eficiência do mercado e expectativas racionais é o fato de que o nível de incerteza observado na evolução dos preços não permite que os valores de equilíbrio possam ser conhecidos com precisão.

De um lado, esse problema informacional levou a distinguir dois tipos de comportamento nas expectativas dos agentes: o comportamento “forward” e o comportamento “backward”.

De outro lado, os conceitos de “racionalidade limitada” e “mimetismo” permitiram aos economistas criticar os modelos tradicionais, que falharam na explicação da volatilidade das taxas de câmbio, surgida com o fim do sistema de Bretton Woods e a introdução do sistema de taxas de câmbio flutuantes (P. De Grauwe, 1991).

Faremos uma breve exposição desses enfoques alternativos nas sub-seções seguintes.

2.1. Racionalidade limitada

O conceito de “racionalidade limitada” é baseado no comportamento descrito de maneira típica pelo fato de que o agente decide não utilizar toda a informação disponível quando suas previsões se situam em um intervalo onde o risco envolvido leva à falta de confiança.

Assim, para fazer face à incerteza, o agente utilizará a última informação observada sobre os preços dos ativos como uma aproximação do preço ótimo, em lugar de ajustar suas previsões, se o custo de não mudar sua posição for pouco significativo.

Esse enfoque fornece uma explicação teórica para o comportamento do tipo “backward”, que pode ser empiricamente observado e que invalida os modelos construídos com base apenas na hipótese de expectativas do tipo “forward”.

Se combinarmos o comportamento racional com o comportamento do tipo “racionalidade limitada”, em outras palavras, se combinarmos as expectativas do tipo “forward” com as do tipo “backward”, poderemos tentar explicar a instabilidade nos movimentos dos preços de ativos financeiros.

Isso significa que, por trás da instabilidade empiricamente observada, encontramos a heterogeneidade da informação, que coloca o problema da combinação das análises micro e macro (um problema que não existe sob a única hipótese de expectativas racionais).

Nesse contexto, encontramos a idéia keynesiana da existência de dois tipos de agentes no mercado: os “fundamentalistas” e os “chartistas”.

Um “fundamentalista” é um agente que tem expectativas do tipo “forward”, ao supor que os preços tendem a assumir o valor “fundamental” (baseado nos “fundamentais econômicos”), no longo prazo.

Um “chartista”, por outro lado, é o agente que, fazendo uso da análise técnica, forma suas expectativas pela extrapolação dos preços passados no futuro esperando, por exemplo, um aumento no preço futuro a partir de um aumento na média dos preços passados.

A interação entre esses dois tipos de agentes pode levar a mudanças de grupo: um fundamentalista pode tornar-se chartista e vice-versa.

O preço de equilíbrio é assim uma função do preço fundamental e das expectativas vindas de cada grupo de agentes ponderadas pela respectiva influência desses grupos.

Um modelo desse tipo foi desenvolvido por Frankel & Froot (1986) para analisar a apreciação do dólar de 1980 a 1985.

O modelo de Frankel & Froot (1986) é construído sob a suposição de que o valor da taxa de câmbio é uma função das decisões dos administradores de fundos baseadas na média ponderada das previsões dos fundamentalistas e chartistas.

A solução desse modelo, na sua forma mais simples, leva a uma trajetória estável e uma trajetória instável (explosiva).

2.2. Mimetismo

Os economistas também criticaram os modelos tradicionais através do estudo do comportamento caracterizado pelo “mimetismo”, ou seja, a situação em que todos os agentes tomam simultaneamente a mesma decisão em função do que seria a opinião do mercado.

Esse modelo de comportamento é uma idéia keynesiana baseada no conceito de “incerteza radical”.

Ele começa por considerar as duas grandes categorias de agentes no mercado: fundamentalistas e chartistas.

Um agente individual, em face de uma situação de incerteza radical, é levado a imitar o comportamento dos outros, uma vez que ele pensa que estes últimos são mais bem informados do que ele, de maneira que ele termina por seguir a opinião do mercado.

Em outras palavras, quando o ambiente é extremamente incerto, um agente individual que, de uma maneira racional, gostaria de obter a informação gratuitamente ao invés de pagar por ela, é levado a imitar os outros.

O comportamento individual torna-se global quando a imitação é generalizada, de maneira que cada agente acredita que o outro é mais bem informado do que ele.

Em uma situação como essa, se ninguém conhece a informação verdadeira, o preço que se forma reflete apenas a psicologia do mercado e afasta-se progressivamente do valor fundamental.

Esse argumento keynesiano foi estendido por André Orléan (1989a) ao caso geral em que a diversidade de opiniões não se limita à dicotomia “fundamentalistas versus chartistas”.

O enfoque de Orléan fornece uma explicação para a formação de “bolhas” especulativas como uma alternativa ao enfoque das “bolhas racionais”.

Este último, desenvolvido em particular por Blanchard & Watson (1984), explica a formação de “bolhas” pelo fato de que os agentes não se baseiam nos “fundamentais

econômicos” para efetuar suas previsões. Suas expectativas afastam-se então cada vez mais do valor fundamental e são “automantidas”. Essa teoria, no entanto, não explica a “explosão” de uma “bolha” de uma maneira coerente porque se baseia na presença de “rumores” no mercado e assim, em elementos externos ao próprio modelo de expectativas racionais.

Outros estudos realizados nesse domínio deram lugar ao desenvolvimento de modelos como o de “cadeias de mimetismo”, proposto por Kirman (1991).

Nesse modelo, o mimetismo é explicado em um contexto onde se supõe que, em um mercado formado por fundamentalistas e chartistas, a proporção de agentes que têm opiniões do tipo fundamentalista evolui de acordo com uma cadeia de Markov. As expectativas são então formadas a partir da consideração da opinião da maioria.

2.3. Conclusão

Uma característica comum aos enfoques da racionalidade limitada e do mimetismo é a idéia de que, em uma situação de incerteza, os agentes não podem se comportar de acordo com o modelo de expectativas racionais.

Assim, no caso da racionalidade limitada, os agentes abandonam suas próprias previsões, em termos de fundamentais econômicos, em favor dos valores passados, porque o intervalo de variação dessas previsões é tão grande que uma mudança de posição não levará a ganhos significativos. O comportamento desses agentes é baseado na hipótese de que os valores situados nos limites do intervalo de previsão são muito menos prováveis do que os situados dentro dele. Eles se comportam então de maneira racional, se se considerar que eles têm em mente a distribuição normal. Esse comportamento, no entanto, não é puramente racional, uma vez que os agentes não procuram maximizar os seus ganhos mas antes reduzir suas perdas. Esse enfoque trata a heterogeneidade da informação de maneira indireta, pela combinação dos comportamentos de tipo “forward” e “backward”.

No caso do enfoque do mimetismo, a não conformidade ao modelo de expectativas racionais vem da consideração de uma situação de “incerteza radical”, em que o agente individual inclui em suas previsões uma avaliação do comportamento de outros agentes. Essa distinção é importante, em termos da descrição dos mercados financeiros, porque ela coloca explicitamente o problema da análise micro-macro e o da heterogeneidade da informação. Mas, ao se basear na hipótese de “incerteza radical”, esse enfoque se baseia em uma situação caracterizada por eventos não-estacionários. Assim, em termos de ferramenta matemático, esse enfoque não é muito diferente daquele relacionado aos modelos ARCH.

Uma vez que, de um lado, os modelos estocásticos – os modelos ARCH e os processos L-estáveis – não rejeitam necessariamente a hipótese de eficiência do mercado e de outro lado, a crítica a essa hipótese leva a modelos “incompletos” – não lidando com a heterogeneidade da informação de maneira direta ou se baseando na não-estacionariedade, em outros termos, na não-linearidade em um sentido estocástico – devemos desenvolver novas formas de analisar a instabilidade dos mercados financeiros.

Assim, nós nos propomos a mostrar, na próxima seção, como a teoria do caos pode fornecer uma interpretação alternativa dessa instabilidade, de uma perspectiva internacional, através do desenvolvimento de um modelo determinista não-linear do mercado de câmbio.

3. Teoria do caos e mercados financeiros

Uma vez que a análise realizada nas seções anteriores levou à identificação de um paradoxo (a não-linearidade descrita por modelos estocásticos não rejeita necessariamente a hipótese de eficiência do mercado mas esta última não foi confirmada por testes empíricos e os modelos econômicos alternativos são incompletos), devemos voltar para novos temas de pesquisa.

De um lado, a crítica aos modelos tradicionais implica a crítica ao determinismo clássico, segundo o qual o comportamento dos agentes se repete sob condições “quase semelhantes”, ou seja, uma mudança pouco significativa dessas condições leva a consequências igualmente pouco significativas. Por outro lado, os modelos alternativos propostos até agora não foram bem sucedidos no tratamento do problema da passagem micro-macro que decorre da heterogeneidade da informação dos agentes no mercado.

Essa dupla evidência levanta a questão da possibilidade de aplicar à instabilidade do mercado financeiro uma análise baseada na teoria do caos.

De um lado, o comportamento “caótico” de um sistema é caracterizado pela presença do fenômeno de “sensibilidade às condições iniciais”, o que significa que a evolução do sistema no tempo muda de maneira significativa em resposta a pequenas mudanças dessas condições.

De outro lado, o estudo da teoria do caos leva ao estudo da complexidade, o que decorre do fato de que a não-linearidade dos fenômenos “caóticos” resulta da interação dos componentes dos sistemas complexos, colocando em evidência a propriedade de “emergência” que caracteriza esses sistemas e que pode ser resumida pela frase: “o todo é maior do que a soma de suas partes”. A complexidade de sistemas é representada, no caso dos mercados financeiros, pela heterogeneidade da informação e pela interação dos agentes.

Nesta seção, mostraremos como a teoria do caos pode fornecer uma análise alternativa do problema do tratamento da heterogeneidade da informação nos mercados financeiros. Em outras palavras, colocamos a questão da possibilidade de existência de um “comportamento estocástico obtido a partir de um sistema determinista” (definição do caos proposta em uma conferência internacional organizada pela Royal Society de Londres em 1986, citada por Ian Stewart, 1998), através do desenvolvimento de um modelo determinista não-linear do mercado de câmbio.

Não apresentaremos os fundamentos da teoria do caos neste trabalho mas o leitor interessado encontrará uma extensa literatura sobre o assunto. Sugestões de leitura são, por exemplo, os livros de Gleick (1989) e Ian Stewart (1998), assim como o artigo de Baumol & Benhabib (1989), em um nível introdutório. De um ponto de vista mais técnico, pode-se consultar com proveito Bergé & Dubois (1992), Bergé et al (1992), Guégan (1992) e Guégan (1994).

3.1. O modelo

Apresentamos nesta sub-seção um modelo determinista não-linear aplicado ao mercado de câmbio.

Definimos o equilíbrio de longo prazo no mercado de bens como segue.

$$(3.1) S_t^* = P_t / P_{et}$$

em que S_t^* é a taxa de câmbio de equilíbrio no longo prazo, P_t o nível de preços doméstico e P_{et} o nível de preços externo. Essa condição de equilíbrio é aquela que assegura a existência da PPC (Paridade do Poder de Compra).

O equilíbrio no mercado de ativos financeiros é representado por

$$(3.2) E(S_{t+1}) / S_t = (1 + r_t) / (1 + r_{et})$$

em que S_t é a taxa de câmbio do mercado, $E(S_{t+1}) / S_t$ a depreciação antecipada da taxa de câmbio, r_t a taxa de juros doméstica e r_{et} a taxa de juros externa. Essa equação é assim a expressão da condição de paridade não coberta da taxa de juros.

Se supusermos que a informação dos agentes é heterogênea pela consideração da existência de “fundamentalistas” - que fazem previsões do tipo “forward” - e de “chartistas” - que se baseiam na análise técnica e fazem previsões do tipo “backward” - então poderemos descrever as expectativas dos agentes através da seguinte equação.

$$(3.3) E(S_{t+1}) / S_t = [E_{FT}(S_{t+1}) / S_t]^m \cdot [E_{CT}(S_{t+1}) / S_t]^{1-m}$$

em que $E_{FT}(S_{t+1}) / S_t$ é a depreciação da taxa de câmbio esperada pelos fundamentalistas, $E_{CT}(S_{t+1}) / S_t$ a depreciação da taxa de câmbio esperada pelos chartistas e m o peso ou influência dos fundamentalistas no mercado, que pode assumir valores no intervalo $[0,1]$.

Representamos as expectativas fundamentalistas como segue.

$$(3.4) E_{FT}(S_{t+1}) / S_t = (S_t^* / S_t)^h$$

em que $h > 0$ é a velocidade com a qual os fundamentalistas esperam que a taxa de câmbio do mercado retorne ao valor de equilíbrio de longo prazo.

Se supusermos que os chartistas fazem previsões de acordo com a média das variações dos valores passados da taxa de câmbio, poderemos então representar as expectativas por

$$(3.5) E_{CT}(S_{t+1}) / S_t = \prod_{j=1}^N [S_{t-j} / S_{t-j-1}]^i$$

em que i é o grau de extrapolação dos valores passados da taxa de câmbio sob a restrição $\sum i = 1$.

Para resolver o modelo, substituímos primeiramente as equações (3.1), (3.4) e (3.5) em (3.3), o que nos dá a seguinte expressão.

$$(3.6) E(S_{t+1}) / S_t = [(P_t / P_{et}) / S_t]^{mh} \cdot \prod_{j=1}^N [S_{t-j} / S_{t-j-1}]^{i-im}$$

Igualamos em seguida as equações (3.2) e (3.6) e obtemos

$$(3.7) (1 + r_t) / (1 + r_{et}) = [(P_t / P_{et}) / S_t]^{mh} \cdot \prod_{j=1}^N [S_{t-j} / S_{t-j-1}]^{i-im}$$

Se fizermos $P_t / P_{et} = A_t$ e $(1 + r_t) / (1 + r_{et})$, teremos a equação reduzida

$$(3.8) S_t = [A_t / (B_t^{1/mh})] \cdot \prod_{j=1}^N [S_{t-j} / S_{t-j-1}]^{i(1-m)(1/mh)}$$

O parâmetro m é endogeneizado e sua evolução é determinada por uma função cuja construção obedece a um argumento baseado no conceito de racionalidade limitada.

Nesse contexto, quando a taxa de câmbio do mercado se aproxima do valor de equilíbrio, o agente não será estimulado a rever suas previsões porque o custo da manutenção da posição é pequeno. Esse comportamento é tipicamente chartista. Inversamente, quando a taxa de câmbio do mercado se afasta do valor de equilíbrio, o agente será levado a mudar suas previsões e assim, a agir como um fundamentalista.

De Grauwe et al (1995) postulam uma função, que podemos denominar l_t , representando o peso ou influência dos chartistas da maneira que se segue.

$$(3.9) l_t = 1 / [1 + \beta (S_{t-1} - S_{t-1}^*)^2]$$

em que β é estritamente positivo e representa não apenas a sensibilidade aos desvios da taxa de câmbio de mercado em relação à taxa de câmbio de equilíbrio mas também a velocidade com que o peso dos chartistas declina.

Essa especificação funcional implica que, quando a taxa de mercado for igual à taxa de equilíbrio S_{t-1}^* , o peso das opiniões chartistas será igual ao seu valor máximo (um) e quando a taxa de mercado se afastar da taxa de equilíbrio, o peso dos chartistas declinará. No que se refere ao parâmetro β , podemos dizer que, quando ele tender ao infinito, as estimativas dos fundamentalistas serão mais precisas e assim, desvios pouco significativos da taxa de mercado em relação à taxa de equilíbrio levará a uma maior influência dos fundamentalistas. O inverso é verdadeiro quando β tender a zero.

Esse comportamento pode ser comparado com aquele que poderia ser postulado se raciocinásemos em termos de mimetismo. Nesse caso, teríamos o comportamento oposto: o peso dos chartistas declinaria quando a taxa de câmbio se aproximasse da taxa de equilíbrio e vice-versa.

Não lidaremos com o mimetismo no contexto do presente trabalho.

A endogeneização de m de acordo com a função proposta por De Grauwe et al (1995) implica adicionar a seguinte equação ao modelo aqui desenvolvido.

$$(3.10) m_t = [\beta (S_{t-1} - S_{t-1}^*)^2] / [1 + \beta (S_{t-1} - S_{t-1}^*)^2]$$

Essa equação foi obtida fazendo $m_t = 1 - l_t$, l_t sendo definida em (3.9). Fixamos o valor de β em 10000, como o fazem De Grauwe et al (1995).

Obtemos uma especificação mais geral da função l_t escrevendo-a como segue.

$$(3.11) l_t = n / [1 + \beta (S_{t-1} - S_{t-1}^*)^2] \quad 0 < n < 1$$

A última forma funcional permite analisar os pesos dos chartistas e fundamentalistas em termos da interação dos agentes. Ela informa não apenas que o peso dos chartistas aumenta quando os desvios da taxa de mercado em relação à taxa de equilíbrio declinam (l_t pode aumentar até n) mas também que o peso dos chartistas no tempo t depende da

proporção máxima de chartistas no mercado. Isto implica que os agentes reagem de acordo com essa proporção.

Podemos então rescrever m_t como

$$(3.12) m_t = [1 + \beta (S_{t-1} - S_{t-1}^*)^2 - n] / [1 + \beta (S_{t-1} - S_{t-1}^*)^2]$$

Em outras palavras, o peso dos fundamentalistas aumenta com os aumentos dos desvios entre a taxa de mercado e a taxa de equilíbrio e diminui com os aumentos de n .

Por outro lado, a endogeneização de m permite rescrever a equação reduzida (3.8) como

$$(3.13) S_t = [A_t / B_t^{1/m_t h}] \prod_{j=1}^N [S_{t-j} / S_{t-j-1}]^{i(1-m_t)} (1/m_t h) \quad \sum i = 1$$

O modelo é assim descrito pelas equações (3.12) e (3.13). Uma vez que a não linearidade desse sistema de equações não permite uma solução analítica, devemos resolvê-lo por simulação, ou seja, por iterações sucessivas a partir de valores iniciais escolhidos arbitrariamente.

3.2. Os resultados

Apresentamos abaixo a análise dos resultados de simulações realizadas a partir das equações (3.12) e (3.13), nas quais fizemos $N = 2$ e fixamos os valores de β , h e i em 10000, 0,65 e 0,5, respectivamente. O algoritmo de resolução foi desenvolvido através de um programa em MAPLE.

Tomamos n como parâmetro de controle, em outras palavras, tentamos verificar a sensibilidade de S_t a aumentos sucessivos desse parâmetro, que representa a influência máxima dos chartistas no mercado.

Os valores iniciais escolhidos para a taxa de câmbio do mercado foram 7,1095, 7,124 e 7,1025 (esses valores são os valores iniciais de dados reais representando as taxas de câmbio diárias Franco/Dólar de 13/09/1982 a 14/12/1992). Fizemos $S_{t-1}^* = 7,1095$ e realizamos 1000 iterações, par n variando de 0,45 a 0,95, a diferença entre os valores sucessivos sendo de 0,05.

Os resultados são resumidos na tabela 3.1.

Em termos da teoria do caos, eles são analisados como segue.

Para um valor do parâmetro n igual a 0,45, o sistema tende para um ponto fixo.

Quando n varia de 0,50 a 0,55, o ponto fixo torna-se um ciclo limite (os valores da taxa de câmbio desenvolvem um movimento periódico).

Para n igual a 0,60, o ciclo limite torna-se um toro T^2 , o que caracteriza um regime quase-periódico.

A partir de um valor de n igual a 0,65, o toro T^2 sofre uma deformação. Além do mais, a função de retorno indica a possibilidade de existência de duas características de um “atrator estranho”: os movimentos de dilatação e contração.

Agora, é possível encontrar estruturas não periódicas, mesmo se não estamos ainda certos de que encontramos um “atrator estranho”, ou seja, de que estamos em um regime “caótico”. Lembramos que as provas da existência de um regime “caótico” são dadas pelo

cálculo da dimensão de correlação e dos expoentes de Lyapunov. Não efetuamos esses cálculos no presente trabalho.

Sob uma outra perspectiva, nós comparamos os resultados acima analisados com os dos estudos empíricos sobre a dinâmica das taxas de câmbio em termos dos fenômenos de descontinuidade e concentração e em termos dos modelos ARCH, realizados por diversos autores, de acordo com nossa discussão da primeira seção do presente trabalho. Essa comparação é analisada a seguir.

Quando o valor de n é igual a 0,45, não existe nem movimento de descontinuidade nem de concentração e a taxa de câmbio assume um valor estável após algumas iterações. Temos uma variância zero.

Para n variando de 0,50 a 0,60, a taxa de câmbio segue um movimento periódico. Os valores são ainda estáveis e não mostram ainda as características encontradas na maior parte dos estudos empíricos, uma vez que, para um movimento periódico, a variância é constante.

Se n é igual a 0,65, não estamos ainda em presença de fenômenos observados empiricamente (descontinuidade e concentração), mesmo se já encontramos sinais da existência de não linearidades e de uma variância “variável”.

Quando n varia de 0,70 a 0,80, os movimentos das taxas de câmbio simuladas se tornam semelhantes aos das séries empíricas. Eles indicam a existência de descontinuidade e concentração e assemelham-se às representações dos processos de memória longa, como os L-estáveis: vemos um grande número de pequenas variações e um pequeno número de grandes variações.

Para valores de n de 0,85 a 0,90, temos descontinuidade e concentração mas em um contexto semelhante ao dos modelos ARCH. Nesse caso, os movimentos das taxas de câmbio – representados nas figuras 3.4a e 3.5a – mostram que as pequenas variações são seguidas de pequenas variações e as grandes variações são seguidas de grandes variações, como o havia salientado Mandelbrot (1963).

Podemos explicar esses resultados pelo fato de que os agentes são heterogêneos em termos de seu acesso à informação. O mercado é assim dominado algumas vezes por agentes que têm um comportamento estacionário (os fundamentalistas) e algumas vezes por agentes tendo o comportamento oposto (chartistas). No primeiro caso (representado pelos valores de n iguais a 0,70, 0,75 e 0,80, respectivamente), temos um comportamento de “longa memória”, semelhante ao representado pelos processos L-estáveis enquanto que no segundo caso (valores de n iguais a 0,85 e 0,90, respectivamente), temos um comportamento de “memória curta”, semelhante ao que caracteriza os processos ARCH.

A heterogeneidade da informação é explicitamente levada em consideração no modelo aqui apresentado e a análise realizada permite afirmar que essa heterogeneidade é a principal causa dos movimentos instáveis obtidos a partir desse modelo.

Tabela 3.1**Dinâmica da taxa de câmbio**

Peso máximo dos chartistas	Teoria do caos	Estudos empíricos
0,45	Ponto fixo	Estabilidade - Variância zero
0,50	Ciclo limite	Estabilidade - Variância const.
0,55	Ciclo limite	Estabilidade - Variância const.
0,60	Toro T^2	Estabilidade - Variância const.
0,65	Atrator estr.(*)	Instabilidade - Variância var.
0,70	Atrator estr.(*)	Desc./ Conc. - L-estabilidade
0,75	Atrator estr.(*)	Desc./Conc. - L-estabilidade
0,80	Atrator estr.(*)	Desc./Conc. - L-estabilidade
0,85	Atrator estr.(*)	Desc./Conc. - ARCH
0,90	Atrator estr..(*)	Desc./Conc. - ARCH
0,95	Atrator estr.(*)	Desc./Conc. - ARCH

(*) Estamos lidando com um “candidato” a atrator estranho. A fim de nos certificarmos de que estamos em presença desse tipo de atrator, precisamos calcular a dimensão de correlação e os expoentes de Lyapunov.

Conclusão geral

Este trabalho tentou mostrar os limites dos modelos estocásticos empregados no estudo da instabilidade dos mercados financeiros e contribuir para o desenvolvimento de novos temas de pesquisa.

Colocamos assim duas questões: uma sobre o tratamento da instabilidade a partir do determinismo linear com a utilização de modelos estocásticos e outra sobre a análise micro-macro.

Tentando responder essas duas questões, discutimos, de um lado, a crítica aos modelos dos processos ARCH e aos dos processos L-estáveis e de outro lado, a crítica à hipótese de eficiência do mercado.

A fim de lidar com a instabilidade através de um enfoque determinista não linear, desenvolvemos um modelo do mercado de câmbio e mostramos que, de um lado, a hipótese de heterogeneidade da informação leva a resultados que podem explicar a ambigüidade dos obtidos por meio de modelos estocásticos (nos estudos empíricos, na representação dos movimentos dos preços de ativos financeiros às vezes predominam os processos ARCH, às vezes os processos de “memória longa”), de outro lado que, se as séries financeiras puderem seguir um regime caótico, as previsões nos mercados financeiros são limitadas no tempo, pela existência do fenômeno de “sensibilidade às condições iniciais”.

Evidentemente, o cálculo dos expoentes de Lyapunov e das dimensões de correlação deve completar os resultados aqui obtidos. Nós o efetuamos em um outro trabalho a ser publicado. Sob uma outra perspectiva, as questões da heterogeneidade da informação e da análise micro-macro devem procurar integrar o conceito de mimetismo.

Concluimos dizendo que a não linearidade expressa em termos de heterogeneidade da informação tem importantes implicações para a política monetária. A presença desse fenômeno pode, de fato, explicar porque os instrumentos tradicionais, como a manipulação das taxas de juros e as intervenções esterilizadoras realizadas pelos Bancos Centrais, têm um efeito limitado na redução da instabilidade dos mercados financeiros e porque necessitamos desenvolver novas formas de regulação como a coordenação de políticas e o controle de capitais.

Bibliografia

1. **Bachelier**, Louis. **Théorie de la spéculation**, *Anales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, Gauthier-Villars, Paris, 1900.
2. **Baillie**, Richard & **Mc Mahon**, Patrick. **Le Marché des Changes: Théorie et Vérification Empiriques**, Traduction sous la direction de H. Bourguinat, E. Girardin et Velayoudom Marimoutou, Editions Eska, Paris, 1997.
3. **Barnsley**, Michael. **Fractals Everywhere**, Academic Press Professional, Cambridge (MA), 2nd edition, 1993.
4. **Baumol**, William J. & **Benhabib**, Jess. "Chaos : Significance, Mechanism, and Economic Applications", *Journal of Economic Perspectives*, Volume 3, Number1, Winter, pp. 77-105, 1989.
5. **Bergé**, P. & **Dubois**, M. "Chaos Déterministe Expérimental et Attracteurs Etranges" in **Chaos et Déterminisme**, sous la direction de A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla, Editions du Seuil, Paris, 1992.
6. **Bergé**, P. et al. **L'Ordre dans le Chaos**, Hermann, Paris, 1992.
7. **Blanchard**, O. & **Watson**, M. "Bulles, Anticipations Rationnelles et Marchés Financiers", *Anales de l'INSEE*, **54**, 79-100, 1984.
8. **Bollerslev**, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, **31**, 307-28, 1986.
9. **Bollerslev**, T. "A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Securities Prices and Rates of Return", *Review of Economics and Statistics*, **69**, 542-7, 1987.
10. **Boutillier**, Michel. "Critique des Processus de Diffusion en Finance : Le Cas des Taux de Change", Communication à la journée d'études organisée par la Société de Statistique de France sur le thème *Marchés financiers et Gestion de Portefeuilles : Une Mise en Perspective des Nouveaux Outils*, Paris, Version provisoire : Février 1992.
11. **De Grauwe**, P. **International Money : Postwar Trends and Theories**, Clarendon Press – Oxford, 1991.
12. **De Grauwe**, P. et al. **Exchange Rate Theory : Chaotic Models of Foreign Exchange Markets**, Blackwell, Oxford UK & Cambridge USA, 1995.
13. **Diebold**, F. S. "Empirical Modelling of Exchange Rate Dynamics", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Science*, n° 303, Springer Verlag, New York, Heidelberg & Tokyo, 1988.
14. **Domowitz**, I & **Hakkio**, C. S. "Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market", *Journal of International Economics*, **19**, 47-66, 1985.
15. **Elie**, laure et al. "Les Modèles ARCH sur les Cours de Change", *La Revue Banque*, n° 525, mars 1992, Supplément Banques & Marchés.
16. **Engle**, R. F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation", *Econometrica*, **50**, 987-1008, 1982.
17. **Fama**, E. F; "The Behavior of Stock-Market Prices", *Journal of Business*, **38**, 31-105, Chicago, 1965.
18. **Fama**, Eugene F. "Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, n° 25, pp. 383-417, 1970.
19. **Frankel**, Jeffrey A & **Froot**, Kenneth A. "Understanding the US dollar in the eighties: the Expectations of Chartists and Fundamentalists", *Economic Record*, **62**, Supplementary Issue, 24-38, 1986.

20. **Gleick, James. *Théorie du Chaos: Vers une Nouvelle Science***, albin Michel, paris, 1989.
21. **Gnedenko, B. V. & Kolmogorov, A. N. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables***, English translation by K. L. Chung, Addison Wesley, Reading, MA, 1954.
22. **Gouriéroux, C. *Modèles ARCH et Applications Financières***, Economica, Paris, 1992.
23. **Guégan, Dominique. "Notion de Chaos: Approche Dynamique et Problèmes d'Identification"**, *Rapports de Recherche INRIA*, n° 1623, Rocquencourt, Février 1992.
24. **Guégan, Dominique. *Séries Chronologiques Non Linéaires à Temps Discret***, Economica, Paris, 1994.
25. **Hsieh, D. A. "Modelling Heteroscedasticity in Daily Foreign Exchange Rates"**, *Journal of Business*, **62**, 339-368, 1989.
26. **Kirman, Alan. "Epidemics of Opinion and Speculative Bubbles in Financial Markets"**, in **Money and Financial Markets**, edited by Mark P. Taylor, 1991.
27. **Lastrapes, W. D. "Exchange Rate volatility and U. S. Monetary Policy. An ARCH Application"**, *Journal of Money, Credit and Banking*, **21**, 66-77, 1989.
28. **Mandelbrot, B. "The Variation of certain speculative Prices"**, *Journal of Business*, vol. 26, n° 4, pp. 394-419, 1963.
29. **Mandelbrot, B. "Une Classe de Processus Stochastiques Homothétiques à Soi: Application à la Loi Climatologique de H. E. Hurst"**, *Comptes Rendus*, 260, 3274-7, Paris, 1965.
30. **Mandelbrot, B. "The Variation of Certain Speculative Prices"**, *Journal of Business*, **40**, 393-413, 1967.
31. **Mandelbrot, B. "Possible refinement of the Lognormal Hypothesis concerning the Distribution of Energy dissipation in Intermittent Turbulence"**, statistical Models and Turbulence, M. Rosenblatt & C. Van Atta (Eds.), *Lecture Notes in Physics*, 12, 333-361, Springer, New York, 1972.
32. **Mandelbrot, B. "Du Hasard Bénin au Hasard Sauvage"**, *Pour la Science* (Dossier hors-série sur "Le hasard"), Avril 1996.
33. **Mandelbrot, B. *Fractales, Hasard et Finance***, coll. Champs, Flammarion, Paris, 1997a.
34. **Mandelbrot, B. "Fractals and scaling"** in **Finance: Discontinuity, Concentration, Risk**, Springer-Verlag, New York, 1997b.
35. **Orléan, A. "Comportements Mimétiques et Diversité des Opinions sur les Marchés Financiers"** in **Théorie Economique et Crise des Marchés Financiers**, H. Bourguinat et P. Artus (Eds.), Economica, Paris, 1989a.
36. **Orléan, A. "Pour une Approche Cognitive des Conventions Economiques"**, *Revue Economique* (numéro spécial sur l'économie des conventions), volume 40, Numéro 2, Mars 1989b.
37. **Plihon, Dominique. *Les Taux de Change***, coll. Repères, La Découverte, Paris, 1999.
38. **Schuster, H. G. *Deterministic Chaos: An Introduction***, VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1989.
39. **Stewart, I. *Dieu Joue-t-il aux Dés?***, coll. Champs, Flammarion, Paris, 1998.

40. Tamisier, S. & Lemery, C. “Dynamique des Taux de Change: Estimation par un Modèle ARCH”. Document de Travail de la Caisse des Dépôts et Consignations, n° 1990-25T, 1990.

41. Working, H. “Prices of Cash Wheat and Futures of Chicago Since 1883”, *Wheat Studies of the Stanford Food Institute*, **2**, 75-124, 193