

# Modelo de Aglomeração Espacial com Custos ou Benefícios de Congestionamento

Angelo Francisco Sirtoli Delamare\*, Graduando na FCE/UFRGS, angelofsdelamare@hotmail.com

João Plínio Juchem Neto, Professor no PPGE/UFRGS, plinio.juchem@ufrgs.br

## Abstract

This work adds congestion costs or benefits in a New Economic Geography spatial agglomeration model where consumers have a logarithmic quasi-linear utility, and where the qualified labor is used as a fixed factor in the industry. Besides, it generalizes the model for an economy with  $R \geq 2$  regions. The results, obtained through numerical simulations of economies with two and twelve regions, show that, for an interval of small transport costs, intense enough congestion costs tend to spatially disperse the industrial activities, generating only partial agglomerations – which are more realistic –, contrasting with the original model, which can also generate total agglomerations of the core-periphery type. In the limiting case of very high congestion costs, the industry disperses equally among all regions for all transport costs. On the other hand, congestion benefits tend to spatially agglomerate the industrial activities, generating spatial structures in which the industry remains only in some regions, while the others are left only with agricultural activities. In the limiting case of very high congestion benefits, all the industry agglomerates in a single region. Besides, congestion benefits makes the system presents hysteresis, a phenomenon that does not appear in the original model. Finally, the results show that, for a particular set of parameters, the twelve regions model is able to generate a distribution of the industrial activities that satisfy the Zipf's law.

*JEL Classification:* R12, J61.

*Keywords:* New Economic Geography, Congestion Costs or Benefits, Economies of Scale, Skilled Labor Mobility, Zipf's Law.

*Thematic Area:* (10) Regional and Urban Economics.

## Resumo

Este trabalho introduz custos ou benefícios de congestionamento em um modelo de aglomeração espacial da Nova Geografia Econômica que considera consumidores com uma função de utilidade quase-linear logarítmica e a mão de obra qualificada como fator fixo da produção manufatureira. Além disso, generaliza o modelo para uma economia com  $R \geq 2$  regiões. Os resultados, obtidos através de simulações numéricas de economias com duas e doze regiões, mostram que, para um intervalo de valores pequenos dos custos de transporte, custos de congestionamento suficientemente intensos tendem a dispersar espacialmente a atividade industrial, gerando apenas aglomerações parciais – que são mais realistas –, contrastando com o modelo original, que também pode gerar aglomerações totais do tipo centro-periferia. No caso limite em que os custos de congestionamento são muito altos, a indústria se dispersa igualmente entre todas as regiões, independente dos custos de transporte. Por outro lado, os benefícios de congestionamento tendem a aglomerar espacialmente a atividade industrial, gerando estruturas espaciais em que a indústria permanece apenas em determinadas regiões, deixando outras apenas com a atividade agrícola. No limite em que os benefícios de congestionamento são muito intensos, a indústria se aglomera totalmente em apenas uma região. Além disso, benefícios de congestionamento fazem com que o sistema apresente histerese, fenômeno que não aparece no modelo original. Por fim, os resultados mostram que, para um determinado conjunto de parâmetros, o modelo com doze regiões é capaz de gerar distribuições das atividades industriais que satisfazem a lei de Zipf.

*Classificação JEL:* R12, J61.

*Palavras-Chave:* Nova Geografia Econômica, Custos ou Benefícios de Congestionamento, Economias de Escala, Mobilidade da Mão de Obra Qualificada, Lei de Zipf.

*Área Temática:* (10) Economia Regional e Urbana.

---

\*O autor agradece à PROPESQ/UFRGS e ao programa PIBIC/CNPq pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

# 1 Introdução

O modelo Centro-Periferia (CP), proposto por Krugman (1991), alicerçou o surgimento da Nova Geografia Econômica (NGE), a qual por meio da interação entre retornos crescentes de escala a nível das firmas, custos de transporte e mobilidade espacial do capital humano dentro de uma estrutura de equilíbrio geral procura explicar a distribuição espacial da produção econômica. O modelo Centro-Periferia básico possui duas regiões, dois setores de produção, agrícola e industrial, e dois fatores de produção, cada qual específico a um setor, ou seja, os fatores não apresentam mobilidade intersetorial. O setor agrícola, que tem retornos constantes de escala e ausência de custos de transporte inter-regionais, produz bens homogêneos, utilizando como fator de produção a mão de obra não qualificada, a qual também não tem mobilidade inter-regional. O setor industrial, que tem retornos crescentes de escala e presença de custos de transporte inter-regionais, produz bens diferenciados, utilizando como fator de produção a mão de obra qualificada, a qual tem mobilidade inter-regional. Cada firma produz uma única variedade e deve escolher sua região de localização.

De acordo com Ottaviano et al. (2002), a estrutura produtiva introduzida por Krugman (1991) projetou as quatro características metodológicas que permeiam grande parte da pesquisa no campo da NEG: (i) utilização do modelo de competição monopolística desenvolvido por Dixit and Stiglitz (1977), o qual contém preferências do tipo CES simétricas para os bens diferenciados e firmas que não afetam individualmente as condições gerais do mercado; (ii) o uso de custos de transporte do tipo iceberg, isto é, uma parcela da produção é derretida no caminho de modo que para desfrutar de uma unidade do bem, o consumidor estrangeiro paga um valor superior ao consumidor local; (iii) processo migratório míope por parte do fator móvel, ou seja, a decisão ocorre apenas pelas diferenças salariais reais ou de utilidade contemporâneas; e (iv) utilização de simulações numéricas para investigação da distribuição espacial da produção do setor com retornos crescentes.

Apesar de criar um novo campo de pesquisa, o modelo Centro-Periferia não é imune a inconveniências. A primeira é ausência de solução analítica para o nível salarial dos trabalhadores qualificados em cada região. Como a decisão locacional do fator móvel é dada pela diferença entre os níveis salariais reais, o modelo é resolvível somente por métodos numéricos. A segunda é relacionada ao fato que, com a diminuição dos custos de transporte, a distribuição espacial da indústria sai, de forma abrupta e instantânea, da dispersão entre as regiões para aglomeração plena em uma região, originando uma bifurcação tridente subcrítica (*subcritical pitchfork bifurcation*)<sup>1</sup>. Assim, o modelo não comporta aglomerações parciais, isto é, regiões com níveis industriais positivos, mas diferentes. A terceira é a ausência de custos de congestionamento dentro de cada região. Esse ponto provém dos economistas urbanos, os quais defendem que a distribuição espacial da produção depende do *trade-off* entre economias de escalas e deseconomias de escalas, representadas pelos custos urbanos da aglomeração (Brakman et al., 2012).

Incluindo a mão de obra não qualificada como fator de produção do setor industrial, de modo que os trabalhadores não qualificados passam a ter mobilidade intersetorial, enquanto os trabalhadores qualificados continuam tendo mobilidade inter-regional, Forslid and Ottaviano (2003) encontram uma solução analítica para o nível salarial dos trabalhadores qualificados. Todavia, a nova formulação teórica continua indicando ausência de aglomerações industriais parciais, as quais também são observadas na realidade. Ottaviano et al. (2002) utilizam um *framework* diverso do modelo CP básico, destacando-se adoção de uma função de utilidade quadrática em vez das preferências do tipo CES. A inclusão de um custo de congestionamento, através do consumo de moradia pelos agentes econômicos, provoca uma dinâmica espacial de dispersão, aglomeração e dispersão, conforme os custos de transporte reduzem. Desse modo, o sistema origina uma curva de sino, a qual inclui equilíbrios estáveis com níveis industriais positivos, mas diferentes entre as regiões. Uma série de trabalhos, seja pela inclusão de alguma forma de custos de congestionamento (Tabuchi, 1998; Alonso-Villar, 2008; Pflüger and Südekum, 2008; Pflüger and Tabuchi, 2010), seja pela inclusão de custos de transporte

---

<sup>1</sup>Para definição e uma discussão mais detalhada dos tipos de bifurcação, ver Strogatz (2007).

no setor agrícola (Picard and Zeng, 2005), seja pela ausência de mobilidade regional (Puga, 1999), ou seja pela inclusão de agentes heterogêneos em relação ao processo migratório (Tabuchi and Thisse, 2002), encontram a curva de sino como a forma da distribuição dos equilíbrios de longo-prazo estáveis.

Sustentado na diferença entre trabalhadores não qualificados com mobilidade intersetorial e trabalhadores qualificados com mobilidade inter-regional (Forslid and Ottaviano, 2003), Pflüger (2004) propõe um modelo passível de solução analítica através da substituição da função de utilidade Cobb-Douglas (Krugman, 1991) por uma função quase-linear na forma logarítmica. A nova forma da função de utilidade elimina o efeito renda da demanda pelos bens do setor de retornos crescentes. Como consequência, além de tornar a modelagem mais simples, surgem equilíbrios estáveis na forma de aglomeração parcial, mas diferente dos trabalhos citados anteriormente, a relação entre a concentração espacial e o nível de custos de transportes é na forma de uma bifurcação tridente supercrítica (*supercritical pitchfork bifurcation*), na qual a transição entre dispersão e aglomeração se dá de forma suave.

De acordo com dados da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico e da União Europeia (OECD and EU, 2018), entre 2007 e 2017 houve um aumento de sete pontos percentuais na participação do capital humano na imigração total para os países da OECD. Atualmente, 37% dos imigrantes são considerados trabalhadores qualificados<sup>2</sup>, ao passo que apenas 32% dos nativos entram nesse grupo. Evidencia-se, portanto, uma tendência de busca de capital humano estrangeiro para o desenvolvimento das nações. Essa fica clara no trabalho de Czaika and Parsons (2017), que mostra e analisa a eficácia das políticas de atração de capital humano desenhadas por dez nações pertencetes à OECD.

As informações anteriores salientam a importância empírica dos modelos da NEG baseados na migração do fator capital humano. Dada a vantagem decorrente da simplicidade do arcabouço desenvolvido por Pflüger (2004) quando comparado a outros trabalhos, o primeiro objetivo do presente artigo é a inclusão de uma forma genérica de custos de congestionamento no modelo para compreensão das consequências dos custos urbanos sobre a distribuição espacial da produção. Portanto, diferente da abordagem proposta por Pflüger and Südekum (2008), a qual incluía o consumo habitacional como nova força de dispersão no sistema original, modela-se a nova força de dispersão como uma deseconomia de escala dependente do tamanho da aglomeração regional. Essa estratégia permite se aproximar do modelo da economia urbana proposto por Henderson (1974), no qual o tamanho das cidades surge do *trade-off* entre economias de escalas específicas a cada indústria e deseconomias de escala urbanas, que são funções exclusivas do tamanho da cidade de interesse.

A grande vantagem da modelagem dos custos de congestionamento utilizada aqui, a qual segue Van Marrewijk (2006) e Brakman et al. (2012), é a possibilidade de reverter a deseconomia de escala para um economia de escala externa através da mudança no valor do parâmetro que governa a intensidade da nova força. Portanto, o segundo objetivo do artigo é compreender a resposta da distribuição espacial da produção quando há benefícios de congestionamento, os quais, no artigo, são interpretados como o efeito da concentração regional expandir a capacidade da autoridade pública ofertar a infraestrutura necessária para a elevação da produtividade das firmas locais, de modo que o sistema apresenta uma nova força de aglomeração ao invés de uma nova força de dispersão.

O terceiro objetivo do artigo é que a inclusão da nova força seja realizada em um sistema com  $R \geq 2$  regiões. Além da interpretação da distribuição espacial da produção quando existem mais que duas regiões, pretende-se descobrir se alguma configuração dos parâmetros é capaz de reproduzir a lei de Zipf, a qual é uma regularidade estatística observada empiricamente (Monasterio, 2004; Moura and Ribeiro, 2006). Dada a ordenação descendente das cidades, a lei de Zipf prevê que a maior cidade é  $k$  vezes mais populosa que a  $k$ -ésima cidade do *ranking*.

Este artigo está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2 apresenta-se o modelo geral com a nova força para  $R \geq 2$  regiões; e na Seção 3 apresenta-se as simulações numéricas para o modelo

---

<sup>2</sup>A OECD and EU (2018) utilizam como referência a classificação da *International Standard Classification of Education (ISCED)*, assim, os trabalhadores qualificados são aqueles com no mínimo educação superior.

com 2 regiões e para o modelo com com 12 regiões. Por fim, fecha-se o artigo com as conclusões e as perspectivas de pesquisa futura na Seção 4.

## 2 O Modelo

A economia é composta por agentes homogêneos - trabalhadores, consumidores e firmas - e por  $R \geq 2$  regiões, as quais são simétricas, isto é, possuem preferências, tecnologia e custos idênticos. Cada localidade dispõem de dois setores, manufatureiro (X) e agrícola (A), e de dois fatores de produção, trabalho não qualificado (L), que apresenta mobilidade intersetorial, e trabalho qualificado (capital humano - K), que apresenta mobilidade inter-regional. Dado que a mão de obra não qualificada não pode se mover entre as regiões, considera-se que todas as regiões detêm a mesma quantidade de L para evitar qualquer vantagem intrínseca de dotação. Ademais, a economia é caracterizada pelo pleno emprego no curto e no longo prazo, e pelos fatores produtivos serem os únicos consumidores.

O setor agrícola oferta bens homogêneos em uma estrutura de competição perfeita com retornos constantes de escala. A produção da *commodity* utiliza apenas a mão de obra não qualificada, sendo comercializada sem a incidência de custos de transporte inter-regionais. Ademais, o bem agrícola é o numerário e assume-se que sua produção ocorre em todas as regiões. O setor manufatureiro oferta bens diferenciados em uma estrutura de competição monopolística com retornos crescentes de escala a nível das firmas. A produção de cada variedade utiliza a mão de obra não qualificada como fator variável e a mão de obra qualificada como fator fixo, sendo comercializada com a incidência de custos de transporte inter-regionais.

### 2.1 Custos de Transporte e *The Racetrack Economy*

Os custos de transporte referem-se aos impedimentos causados pela distância regional, tais como os custos de frete, barreiras comerciais, dificuldades de comunicação e diferenças culturais (Fujita and Thisse, 2002). Seguindo a metodologia padrão da NEG, considera-se custos de transporte do tipo iceberg (Samuelson, 1952), ou seja, uma parcela do bem derrete no caminho entre as localidades.

O parâmetro  $\tau$ , definido como o número de bens diferenciados que precisam ser enviados para garantir que uma unidade do produto chegue por unidade de distância, representa a tecnologia de transporte, a qual é considerada a mesma para todas as regiões. Já o parâmetro  $\tau_{ri}$  mostra o número de bens diferenciados que precisam ser enviados da região  $r$  para garantir que uma unidade chegue na região  $i$ . Se a distância entre as regiões é  $D_{ri}$ , então o custo de transporte é:

$$\tau_{ri} = \tau_{ir} = \begin{cases} \tau^{D_{ri}} & \text{se } r \neq i \\ 1 & \text{se } r = i \end{cases} \quad (1)$$

No caso de duas regiões, a unidade de distância é normalizada para a distância entre as localidades, assim,  $\tau_{12} = \tau = \tau_{21}$ . Como o custo de transportar uma unidade do bem manufaturado de 1 para 2 é idêntico ao de transportar de 2 para 1, o espaço é neutro, isto é, a distribuição espacial da produção independe das características geográficas regionais.

Para garantir a neutralidade espacial no sistema com  $R > 2$  territórios, Fujita et al. (1999) formularam o conceito de *racetrack economy*. As  $R$  regiões são sequencialmente espaçadas ao longo da circunferência de um círculo, de modo que a  $R$ -ésima localidade está ao lado da primeira. A distância entre duas regiões adjacentes, por exemplo, entre a terceira e quarta, é um. Conseqüentemente, o custo de transporte entre as regiões adjacentes é  $\tau$ . A distância entre duas regiões arbitrárias equivale ao comprimento da menor distância ao longo da circunferência. Por exemplo, a distância da primeira para  $(R - 1)$ -ésima ou para a terceira região é 2. Conhecida a distância, usa-se a equação (1) para descobrir o custo de transporte entre as regiões.

## 2.2 Preferências

Como as regiões são simétricas, consideramos uma região arbitrária  $r = 1, \dots, R$  para derivação do modelo. Essa possui  $L_r = L$  trabalhadores não qualificados e  $K_r$  trabalhadores qualificados, os quais têm suas preferências fornecidas pela seguinte função de utilidade quase-linear:

$$U_r^b = \alpha \ln(C_{X_r}) + C_{A_r}^b, \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

onde  $r$  é o índice que representa a região;  $b \in \{L, K_r\}$  é o índice para diferenciar entre os agentes representativos de cada grupo da região  $r$ ;  $C_{A_r}^b$  representa a demanda pela *commodity* do agente representativo de cada grupo;  $C_{X_r}$  a demanda agregada pelas manufaturas. A variável  $C_{X_r}$ , comum aos dois agentes representativos, agrega as quantidades consumidas de cada variedade do bem manufaturado através de uma função com elasticidade de substituição constante (CES):

$$C_{X_r} = \left[ \sum_{v_1=1}^{N_1} (x_{1r}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=N_1+1}^{N_2} (x_{2r}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \dots + \sum_{v_r=N_{(R-1)}+1}^{N_R} (x_{Rr}^{v_r})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \sigma > 1 \quad (3)$$

onde  $N_i - N_{i-1}$ , com  $N_0 = 0$ , representa a quantidade de variedades produzidas na região  $i$ ,  $i = 1, \dots, R$ ;  $x_{ir}^{v_i}$  representa a quantidade da variedade  $v_i$ ,  $v_i = N_{(i-1)} + 1, \dots, N_i$ , proveniente da região  $i$ , que é consumida pelo agente representativo de cada grupo da região  $r$ ; e  $\sigma$  representa a elasticidade de substituição entre as variedades. As variedades são substitutas perfeitas quando  $\sigma \rightarrow \infty$  e imperfeitas quando  $1 < \sigma < \infty$ . Quanto menor o  $\sigma$ , maior o grau de diferenciação entre as variedades.

A restrição orçamentária do agente representativo de cada grupo é:

$$P_r C_{X_r} + C_{A_r}^b = Y_r^b$$

$$P_r = \left[ \sum_{v_1=1}^{N_1} (\tau_{1r} p_{1r}^{v_1})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{v_2=N_1+1}^{N_2} (\tau_{2r} p_{2r}^{v_2})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \dots + \sum_{v_R=N_{(R-1)}+1}^{N_R} (\tau_{Rr} p_{Rr}^{v_R})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (4)$$

onde  $Y_r^b$  é a renda (remuneração) do agente representativo de cada grupo na região  $r$ ;  $P_r$  é o índice de preços dos bens diferenciados na região  $r$ ;  $p_{ir}^{v_i}$  é o preço pago na região  $r$  pela variedade  $v_i$  da região  $i$ ; e  $\tau_{ir}$  é o custo de transportar uma unidade de qualquer variedade entre as regiões  $i$  e  $r$ , o qual é pago pelo consumidor. Dessa forma,  $\tau_{ir}$  implica que um residente de  $r$  desembolsa um valor superior ao pago pelo residente de  $i$  por uma unidade produzida em  $i$ .

As curvas de demanda são obtidas resolvendo o problema de maximização do consumidor (2)-(4):

$$C_{X_r} = \alpha P_r^{-1}, \quad C_{A_r}^b = Y_r^b - \alpha \quad (5)$$

$$x_{rr}^{v_r} = \alpha (p_{rr}^{v_r})^{-\sigma} P_r^{\sigma-1} \quad \text{para } v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r \quad (6)$$

$$x_{ir}^{v_i} = \alpha (\tau_{ir} p_{ir}^{v_i})^{-\sigma} P_r^{\sigma-1} \quad \text{para } v_i = N_{(i-1)} + 1, \dots, N_i \quad (7)$$

onde (5) representa a demanda pela *commodity*,  $C_{A_r}^b$ , e a demanda agregada por manufaturas,  $C_{X_r}$ , do agente representativo de cada grupo, sendo que  $\alpha$  representa o dispêndio em manufaturas; (6) representa a demanda individual por cada variedade local e (7) representa a demanda individual por cada variedade estrangeira,  $i \neq r$  e  $i = 1, \dots, R$ . Como os agentes representativos de cada grupo diferem apenas pela sua renda e como a demanda individual por cada variedade independe da renda, a quantidade demanda de cada variedade é idêntica para todos os consumidores da região  $r$ . Portanto, quando referirmos ao setor manufatureiro, doravante podemos considerar apenas um agente representativo por região.

Substituindo (5) em (2) obtém-se a utilidade indireta na região  $r$ :

$$V_r^b = -\alpha \ln(P_r) + Y_r^b + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)]. \quad (8)$$

## 2.3 Produção

A função de produção do bem agrícola na região  $r$  é:  $X_{A_r} = f(L_r^a) = L_r^a$ , onde:  $X_{A_r}$  é a quantidade produzida da *commodity* e  $L_r^a$  é o número de trabalhadores não qualificados da região  $r$  empregados no setor agrícola. Assim, conclui-se que cada trabalhador não qualificado do setor agrícola produz uma unidade da *commodity*. Já a função de custo do bem agrícola na região  $r$  é:  $C_r^a = g(X_{A_r}) = w_r L_r^a$ , onde  $w_r$  é o salário do trabalhador não qualificado. Como a estrutura de competição perfeita implica que o preço iguala o custo marginal e como o preço do bem agrícola é unitário, por ser o numerário, então o salário do trabalhador não qualificado é  $w_r = 1$ .

No setor de retornos crescentes, a condição de equilíbrio de mercado para uma variedade  $v_r$  da região  $r$  é:

$$X_r^{v_r} = \sum_{i=1}^R (L + K_i) \tau_{ri} x_{ri}^{v_r}, \quad v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r \quad (9)$$

onde  $X_r^{v_r}$  é a quantidade produzida da variedade  $v_r$ ;  $x_{ri}^{v_r}$  é a quantidade demandada da variedade  $v_r$  pelo agente representativo da região  $i$ ;  $L_i = L$  é a quantidade de trabalhadores não qualificados e  $K_i$  é a quantidade de trabalhadores qualificados na região  $i$ . O  $\tau_{ri}$  representa o custo de transportar uma unidade de qualquer variedade entre as regiões  $r$  e  $i$ .

O setor manufatureiro possui uma estrutura de competição monopolística, na qual cada variedade é ofertada por apenas uma firma, em função da produção dispor de economias de escala internas. Essas são modeladas através de um componente variável de custos,  $l_r^{v_r} = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} c X_r^{v_r}$  unidades do trabalho não qualificado, e um componente fixo,  $k_r^{v_r} = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$  unidades do capital humano. O parâmetro  $\eta$  captura custos ou benefícios de congestionamento, conforme explicado abaixo. Como a remuneração do trabalho não qualificado é  $w_r = 1$  e a do capital humano é  $H_r$ , cada firma da região  $r$  apresenta a seguinte função de custo de produção:

$$C_r^{v_r} = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} (c X_r^{v_r} + H_r), \quad -1 < \eta < 1 \quad \text{e} \quad v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r \quad (10)$$

onde  $c$  é o custo marginal e  $N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$  representa a nova força introduzida no modelo por este trabalho, que captura os custos ou benefícios de congestionamento, e que depende do número de firmas manufatureiras na localidade, isto é, do tamanho da aglomeração regional. Se  $0 < \eta < 1$ , os custos de congestionamento, deseconomia de escala externa, surgem como uma nova força de dispersão no sistema. Se  $-1 < \eta < 0$ , os benefícios de congestionamento, economia de escala externa, surgem como uma nova força de aglomeração. Se  $\eta = 0$ , recuperamos o modelo original de Pflüger (2004), sem efeitos de congestionamento. Ao considerar essa formulação para as economias e deseconomias externas de escala, seguimos Brakman et al. (2012), página 291, e Van Marrewijk (2006).

Das equações (9) e (10) provém a equação de lucro da firma produtora da variedade  $v_r$ :

$$\pi_r^{v_r} = \sum_{i=1}^R \left[ (p_{ri}^{v_r} - c N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}) (L + K_i) \tau_{ri} x_{ri}^{v_r} \right] - H_r N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}, \quad v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r \quad (11)$$

Por hipótese, as firmas não afetam individualmente as condições gerais do mercado. Desta maneira, ao determinarem seus preços de venda as firmas desconsideram seu impacto sobre o índice de preço,  $P_r$ . Ao substituir as equações (6) e (7) de cada região em (11), a maximização do lucro fornece que o preço recebido por unidade independe se a demanda é local ou estrangeira:

$$p_{ri}^{v_r} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} = p_{ri}, \quad i = 1, \dots, R \quad \text{e} \quad v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r. \quad (12)$$

Como  $p_{ri}^{v_r}$  depende apenas de parâmetros comuns a todas as firmas da região, infere-se que o preço de venda de cada variedade da região  $r$  é igual. Logo, pode-se usar a notação  $p_{ri}$  para todas

variedades produzidas em  $r$ . Ademais, com  $p_{ri}^{v_r} = p_{ri}, \forall v_r$ , as equações (6) e (7) de cada região implicam que o consumidor representativo de cada região demanda a mesma quantidade de cada variedade produzida em  $r$ . Assim, pode-se usar  $x_r^{v_r} = x_r, \forall v_r$  e, conseqüentemente,  $X_r^{v_r} = X_r, \forall v_r$ .

Usando as equações (9) e (12) em (11), acrescentadas pelo fato que a remuneração do  $K_r$  se ajusta para garantir o lucro zero, obtém-se a seguinte relação entre a produção da variedade  $v_r$  da região  $r$ ,  $X_r$ , e seus custos fixos,  $H_r$ :

$$X_r = \left( \frac{\sigma - 1}{c} \right) H_r, \quad \forall v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r. \quad (13)$$

## 2.4 Equilíbrio de Curto Prazo

No curto prazo, o trabalho qualificado não apresenta mobilidade regional. Para obter uma solução analítica para a remuneração do capital humano em cada região podemos utilizar as seguintes relações:

$$\lambda_r = \frac{K_r}{K_{tot}} \quad \text{e} \quad \rho_r = \frac{L}{K_{tot}} = \rho$$

onde  $K_{tot} = \sum_{r=1}^R K_r$  é a quantidade total de capital humano na economia. Como cada firma da região  $r$  utiliza  $k_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$  unidades do trabalho qualificado e como no curto prazo existem  $N_r$  firmas na região, o número total de capital humano na localidade equivale às necessidades reais agregadas das firmas:

$$K_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} N_r = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} \quad \iff \quad N_r = K_r^{1-\eta} = (\lambda_r K_{tot})^{1-\eta}. \quad (14)$$

Substituindo (14) em (12) encontra-se uma nova formulação para preço de qualquer variedade da região  $r$ :

$$p_{ri} = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} (\lambda_r K_{tot})^\eta \quad i = 1, \dots, R \quad \text{e} \quad \forall v_r = N_{(r-1)} + 1, \dots, N_r. \quad (15)$$

Utilizando a equação (15) para o preço das variedades de cada região consumidas em  $r - p_{1r}, p_{2r}, \dots, p_{Rr}$  - em (4) surge a seguinte formulação para o índice de preços dos bens diferenciados na região  $r$ :

$$P_r = \frac{\sigma c}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[ \sum_{i=1}^R \lambda_i^{1-\sigma\eta} \varphi_{ir} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (16)$$

onde  $0 \leq \varphi_{ir} = \tau_{ir}^{1-\sigma} \leq 1$  é definido como o parâmetro de liberdade comercial entre as regiões  $i$  e  $r$ . Conforme o custo de transporte diminui, a liberdade comercial entre as regiões aumenta. Utilizando as equações (6), (7), (12), (15), (16) de cada região em (11), a simetria regional e a condição de lucro zero originam:

$$H_r = \frac{\alpha}{\sigma \lambda_r^{\sigma\eta}} \sum_{a=1}^R \left[ \frac{(\lambda_a + \rho_a) \varphi_{ra}}{\sum_{j=1}^R \lambda_j^{1-\sigma\eta} \varphi_{ja}} \right] \quad (17)$$

onde  $H_r$  é a remuneração do capital humano no equilíbrio de curto prazo em  $r$ .

No modelo com duas regiões e sem congestionamento (Pflüger, 2004), uma hipótese adicional é que o setor agrícola deve estar sempre ativo em cada uma das regiões, isto é, não é possível ao setor manufatureiro empregar toda a mão de obra não qualificada disponível na região. A seguir apresenta-se uma generalização da condição que os parâmetros do modelo devem satisfazer em uma economia com  $R$  regiões e com custos ou benefícios de congestionamento.

**Proposição 1** - Em uma economia onde todas as regiões possuam a mesma quantidade de mão de obra não qualificada, o setor agrícola continua ativo em todas as regiões se a seguinte condição é válida:

$$\alpha < \frac{\rho\sigma}{(R\rho + 1)(\sigma - 1)}.$$

**Prova:** Cada firma do setor manufatureiro da região  $r$  necessita de  $l_r = N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}} cX_r$  trabalhadores não qualificados, assim, a necessidade regional do setor é:  $L_r^m = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} cX_r$ , onde  $L_r^m$  é o número de trabalhadores não qualificados da região  $r$  empregados na atividade manufatureira. Utilizando (13), a equação pode ser expressa como:  $L_r^m = N_r^{\frac{1}{1-\eta}} H_r(\sigma - 1)$ . Para garantir que independente das circunstâncias o setor agrícola continuará ativo na região  $r$  basta que :

$$N_r^{\frac{1}{1-\eta}} H_r(\sigma - 1) = \lambda_r K_{tot} H_r(\sigma - 1) < L.$$

Na igualdade acima, utilizou-se a Equação (14). Como  $\rho_i \equiv \rho, \forall i = 1, \dots, R$  e no pior caso  $\lambda_r = 1$  (toda a indústria concentrada em  $r$ ), a equação (17) resulta em:

$$H_r = \frac{\alpha(R\rho + 1)}{\sigma}$$

Desse modo,

$$K_{tot} \frac{\alpha(R\rho + 1)}{\sigma} (\sigma - 1) < L \quad \iff \quad \alpha < \frac{\rho\sigma}{(R\rho + 1)(\sigma - 1)} \quad \square$$

## 2.5 Equilíbrio de Longo Prazo

No longo prazo, o capital humano possui mobilidade regional, de modo que busca se mover para a região que possibilita a maior utilidade indireta. Substituindo (16) e (17) em (8) encontramos a utilidade indireta do capital humano em cada região<sup>3</sup>:

$$V_r = -\alpha \ln \left( \frac{\sigma c}{\sigma - 1} K_{tot}^{\frac{1-\sigma\eta}{1-\sigma}} \left[ \sum_{i=1}^R \lambda_i^{1-\sigma\eta} \varphi_{ir} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) + \frac{\alpha}{\sigma \lambda_r^{\sigma\eta}} \sum_{a=1}^R \left[ \frac{(\lambda_a + \rho_a) \varphi_{ra}}{\sum_{j=1}^R \lambda_j^{1-\sigma\eta} \varphi_{ja}} \right] + [\alpha(\ln(\alpha) - 1)], \quad r = 1, \dots, R \quad (18)$$

A dinâmica da mobilidade espacial do capital humano é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d\lambda_r}{dt} = \gamma \left[ V_r(\lambda) - \sum_{z=1}^R \lambda_z V_z(\lambda) \right] \lambda_r, \quad r = 1, \dots, R \quad (19)$$

onde  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R]^T$  e  $\gamma > 0$  é o fator de ajuste exponencial, o qual, dependendo de seu valor, aumenta ou diminui a velocidade do processo migratório. De acordo com (19), a taxa de mudança na quantidade de capital humano na região  $r$  é proporcional à diferença entre a utilidade indireta na região  $r$  e a média aritmética ponderada das utilidades indiretas em todas as regiões. Caso  $V_r(\lambda)$  seja superior a média ponderada, a região  $r$  atrairá a mão de obra qualificada; caso  $V_r(\lambda)$  seja inferior a média ponderada, a região  $r$  afungentará a mão de obra qualificada; e caso  $V_r(\lambda)$  seja idêntica a média ponderada, a região  $r$  continuará com a mesma quantidade de mão de obra qualificada.

<sup>3</sup>Como apenas a mão de obra qualificada apresenta mobilidade regional, para simplificar a notação, podemos eliminar o índice  $b$  da função de utilidade indireta.



Neste modelo existem quatro efeitos econômicos que determinam a distribuição espacial do capital humano e, conseqüentemente, da produção manufatureira. O parâmetro da tecnologia de transporte ( $\tau$ ) ajuda a designar o equilíbrio entre os efeitos, pois dependendo de seu valor um ou outro efeito pode se sobressair. O primeiro é o efeito índice de preço, o qual é identificado na equação (16). Essa mostra que o aumento da participação regional na produção do bem diferenciado, diminui o número de variedades importadas e, conseqüentemente, diminui o índice de preço regional. Como a redução dos custos de vida aumenta a remuneração real do capital humano na região, o efeito índice de preço é uma força aglomerativa, a qual impacta o primeiro termo da utilidade indireta (18).

O segundo é o efeito extensão da competição, o qual é identificado nas equações (6) e (7). Essas mostram que a redução do índice de preço, decorrente da maior competição local, isto é, da maior oferta de variedade locais, implica uma redução na quantidade que cada agente local demanda de cada variedade. Como a demanda de cada residente, em função dos custos de transporte, supera a demanda de cada não residente, a redução nas demandas individuais do primeiro grupo acarreta, *ceteris paribus*, uma queda no lucro das firmas locais e, conseqüentemente, na remuneração oferecida ao capital humano. Portanto, o efeito extensão da competição é uma força dispersiva, a qual impacta o denominador do somatório do segundo termo da utilidade indireta (18).

O terceiro é o efeito tamanho do mercado, o qual é identificado pelo fator  $(L + K_r)$  da equação (9). Como cada firma produz apenas uma variedade e utiliza  $N_r^{\frac{\eta}{1-\eta}}$  unidades de capital humano, o aumento no leque de variedades locais também significa um maior número de residentes. *Ceteris paribus*, há um aumento na demanda agregada pelas variedades locais, o que induz uma elevação dos lucros e, conseqüentemente, um incremento na remuneração oferecida ao capital humano na região. Portanto, o efeito tamanho do mercado é uma força aglomerativa, a qual impacta o numerador do somatório do segundo termo da utilidade indireta (18).

Quando o efeito extensão da competição domina o efeito tamanho do mercado, o aumento da participação regional na produção manufatureira reduz o lucro das firmas e a remuneração do capital humano na região. Quando o efeito extensão da competição é dominado pelo efeito tamanho do mercado, o aumento da participação regional na produção manufatureira aumenta o lucro das firmas e a remuneração do capital humano na região.

O quarto e novo efeito aqui considerado, que depende do número de firmas na região, é sintetizado na equação (10). Essa mostra que o custo de produção depende do tamanho da aglomeração regional. Caso  $0 < \eta < 1$  há uma deseconomia de escala, na forma de custos de congestionamento. A maior concentração regional da produção,  $N_r > 1$ , aumenta a necessidade real dos fatores variável, mão de obra não qualificada, e fixo, mão de obra qualificada, para a produção de cada unidade do produto. Dessa maneira, ao expandir os custos urbanos (limitações de recursos naturais, poluição, tempo perdido no trânsito, limitação de espaços físicos, etc), o aumento na concentração regional da produção leva à queda da produtividade de todas as firmas locais. Nessa circunstância ocorre um aumento nos custos de produção e uma queda no lucro. Como consequência, diminui a remuneração do capital humano na região e o quarto efeito representa uma força dispersiva.

Caso  $-1 < \eta < 0$  há uma economia de escala, na forma de infraestrutura urbana (benefícios de congestionamento). A maior concentração regional da produção,  $N_r > 1$ , diminui a necessidade real dos fatores variável, mão de obra não qualificada, e fixo, mão de obra qualificada, para a produção de cada unidade do produto. Dessa maneira, ao expandir a capacidade da autoridade pública ofertar a infraestrutura necessária para atividade manufatureira, o aumento na concentração regional da produção leva à elevação da produtividade de todas as firmas locais. Nessa circunstância ocorre uma queda nos custos de produção e um aumento no lucro. Como consequência, aumenta a remuneração do capital humano na região e o quarto efeito representa uma força aglomerativa.

A nova força impacta a utilidade indireta (18) de duas maneiras: (i) diretamente através do denominador da fração que multiplica o somatório do segundo termo; e (ii) indiretamente através dos expoentes  $\eta$ 's, ou seja, enfraquece ou fortalece os efeitos extensão da competição e índice de preço.

### 3 Simulações Numéricas do Modelo

Nas simulações numéricas, realizadas em ambiente MATLAB®<sup>4</sup>, seja para o modelo com 2 regiões ou seja para o modelo com 12 regiões, são empregados os seguintes parâmetros<sup>4</sup>:  $K_{tot} = 100$ ;  $c = 1$ ;  $\sigma = 6$ ; e  $\rho_r = \rho = 1, \forall r$ . Para assegurar que o setor agrícola está ativo em todas as regiões, emprega-se:  $\alpha = 0.3$  para a economia com 2 regiões e  $\alpha = 0.05$  para a economia com 12 regiões. Ademais, utiliza-se  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = (1 - \lambda)$  no modelo com 2 regiões.

#### 3.1 Modelo com $R = 2$ regiões

A Seção 2.5 elucidou que o capital humano migra para a região que oferta a maior utilidade indireta. Nesse caso particular, portanto, pode-se investigar a distribuição do capital humano e, conseqüentemente, da produção manufatureira por meio da diferença entre as utilidades indiretas nas regiões 1 e 2:  $\Delta V(\lambda) = V_1(\lambda) - V_2(\lambda)$ . Dado os custos de transporte<sup>5</sup>,  $\tau$ , e os benefícios ou custos do congestionamento,  $\eta$ , a Figura 1 mostra como a diferença de utilidade indireta varia conforme a participação da região 1 na produção manufatureira,  $\lambda$ , varia. Dessa forma, para os dois valores representativos de custos de transporte que considera, a Figura 1 evidencia os equilíbrios de longo prazo. A primeira e a segunda linha apresentam o caso exibido por Pflüger (2004),  $\eta = 0.00$ . A terceira e a quarta linha apresentam o caso representativo de custos de congestionamento,  $\eta = 0.01$ . A quinta e a sexta linha apresentam o caso representativo de benefícios de congestionamento,  $\eta = -0.01$ .

Examinando o caso original,  $\eta = 0.00$ , observa-se que a aglomeração total da produção é o estado de longo prazo para  $\tau = 1.25$ . Quando  $\lambda < 1/2$ , temos  $\Delta V < 0$  e, conseqüentemente, o capital humano migrará para a região 2. No gráfico correspondente indicamos essa movimentação através da seta para a esquerda, a qual aponta para o equilíbrio  $\lambda_a$ . Quando  $\lambda > 1/2$ , temos  $\Delta V > 0$  e, conseqüentemente, o capital humano migrará para a região 1. No gráfico correspondente indicamos essa movimentação através da seta para a direita, a qual aponta para o equilíbrio  $\lambda_c$ . Quando  $\lambda_b = 1/2$ , temos um equilíbrio instável, pois a migração de um único trabalhador qualificado inicia um processo de aglomeração. Portanto, no caso original, a distribuição espacial da produção manufatureira é caracterizada por dois equilíbrios estáveis do tipo centro-periferia,  $\lambda_a$  e  $\lambda_c$ , para  $\tau = 1.25$ .

Para  $\tau = 1.50$ , os equilíbrios do tipo centro-periferia deixam de ser estáveis. Se o capital humano está concentrado na região 2,  $\lambda_a$ , temos  $\Delta V > 0$  e, conseqüentemente, uma parcela migrará para a região 1, aumentando o valor de  $\lambda$  na direção do ponto  $\lambda_b = 1/2$ . Se o capital humano está concentrado na região 1,  $\lambda_c$ , temos  $\Delta V < 0$  e, conseqüentemente, uma parcela migrará para a região 2, diminuindo o valor de  $\lambda$  na direção do ponto  $\lambda_b = 1/2$ . Portanto, no caso original, a economia é caracterizada pela dispersão,  $\lambda_b$ , da produção manufatureira para  $\tau = 1.50$ .

Examinando a Figura 1 para o caso com custos de congestionamento,  $\eta = 0.01$ , observa-se que, no longo prazo, igual ao caso original, a produção estará dispersa entre as regiões para  $\tau = 1.50$ , porém, diferente do caso original, a produção não estará totalmente concentrada para  $\tau = 1.25$ . Se o capital humano está inicialmente concentrado na região 2,  $\lambda_a$ , temos  $\Delta V > 0$ , e, conseqüentemente, uma parcela do capital humano migrará para a região 1. Se  $\lambda_b < \lambda < \lambda_c$ , temos  $\Delta V < 0$ , e, conseqüentemente, uma parcela do capital humano migrará para a região 2. Desse modo, o intervalo  $\lambda_a < \lambda < \lambda_c$  é a bacia de atração do equilíbrio estável  $\lambda_b$ . De maneira análoga, o intervalo  $\lambda_c < \lambda < \lambda_e$  é a bacia de atração do equilíbrio estável  $\lambda_d$ . Como no caso original,  $\lambda_c = 1/2$  é um equilíbrio instável, pois a mudança de um único trabalhador qualificado inicia um processo migratório em direção à  $\lambda_b$  ou  $\lambda_d$ . Portanto, no caso representativo de custos de congestionamento, a economia é caracterizada pela aglomeração parcial,  $\lambda_b$  e  $\lambda_d$ , da produção manufatureira para  $\tau = 1.25$ .

<sup>4</sup>Como a subtração das utilidades indiretas elimina os parâmetros  $K_{tot}$  e  $c$  e como todas as simulações da Seção 3 utilizam esse artifício, os resultados independem dos valores de  $K_{tot}$  e de  $c$ .

<sup>5</sup>Devido a normalização da distância, a tecnologia de transporte e os custos de transporte são idênticos para o sistema com 2 regiões.

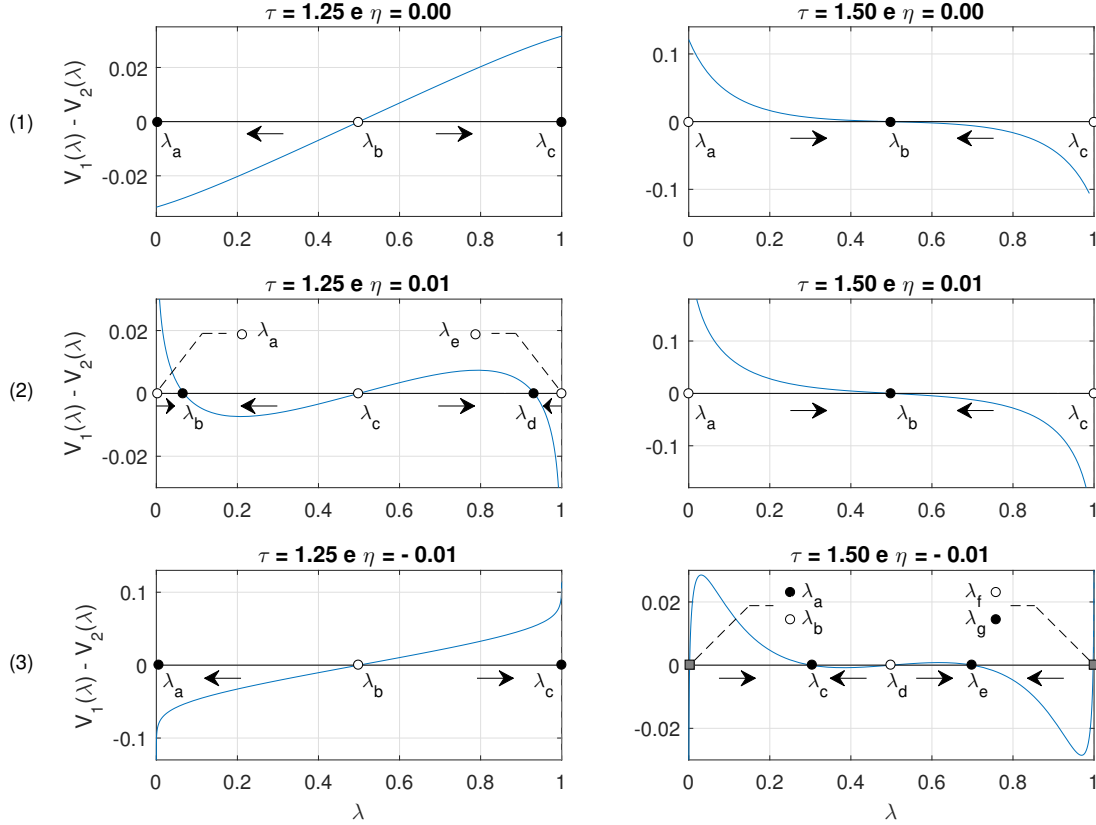


Figura 1: Diferença de utilidade indireta para  $\tau = 1.25$  e  $\tau = 1.50$ , onde: (1) é o caso com  $\eta = 0.00$ ; (2) é o caso com  $\eta = 0.01$ ; e (3) o caso com  $\eta = -0.01$ .

Examinando a Figura 1 para o caso com benefícios de congestionamento,  $\eta = -0.01$ , observa-se que, no logo prazo, igual ao caso original, a produção estará totalmente concentrada para  $\tau = 1.25$ , porém, diferente do caso original, a produção não estará dispersa entre as regiões para  $\tau = 1.50$ . Se  $\lambda < \lambda_b$ , temos  $\Delta V < 0$  e, conseqüentemente, o restante do capital humano migrará para a região 2,  $\lambda_a$ . Se  $\lambda_b < \lambda < \lambda_c$ , temos  $\Delta V > 0$ , e, conseqüentemente, uma parcela do capital humano migrará para a região 1, aumentando o valor de  $\lambda$  na direção do ponto  $\lambda_c$ . Se  $\lambda_c < \lambda < \lambda_d$ , temos  $\Delta V < 0$ , e, conseqüentemente, uma parcela do capital humano migrará para a região 2, diminuindo o valor de  $\lambda$  na direção do ponto  $\lambda_c$ . Desse modo, o intervalo  $\lambda_a < \lambda < \lambda_b$  é a bacia de atração do equilíbrio estável  $\lambda_a$ , enquanto o intervalo  $\lambda_b < \lambda < \lambda_d$  é a bacia de atração do equilíbrio estável  $\lambda_c$ . De maneira análoga, o intervalo  $\lambda_d < \lambda < \lambda_f$  é a bacia de atração do equilíbrio estável  $\lambda_e$ , enquanto o intervalo  $\lambda_f < \lambda < \lambda_g$  é a bacia de atração do equilíbrio estável  $\lambda_g$ . Os equilíbrios  $\lambda_b$ ,  $\lambda_d$  e  $\lambda_f$  são instáveis, pois a migração de um único trabalhador qualificado coloca o sistema em uma das bacias de atração citadas anteriormente. Portanto, no caso representativo de benefícios de congestionamento, a economia é caracterizada pela aglomeração total,  $\lambda_a$  e  $\lambda_g$  – a qual é difícil de visualizar, dada a proximidade com  $\lambda_b$  e  $\lambda_f$ , respectivamente –, ou parcial,  $\lambda_c$  e  $\lambda_e$ , da produção manufatureira para  $\tau = 1.50$ .

### 3.1.1 Diagramas de Bifurcação

Dado que  $\tau$  pode variar continuamente, a Figura 2 mostra, no intervalo  $1 \leq \tau \leq 2$ , a relação entre a distribuição espacial do capital humano e o nível de custos de transporte para os três casos de interesse. O primeiro diagrama de bifurcação apresenta o caso exibido por Pflüger (2004),  $\eta = 0.00$ .

O segundo apresenta o caso representativo de custos de congestionamento,  $\eta = 0.01$ . O terceiro apresenta o caso representativo de benefícios de congestionamento,  $\eta = -0.01$ . O eixo horizontal de cada diagrama representa os custos de transporte, enquanto o eixo vertical representa a distribuição do capital humano. As linhas tracejadas e as linhas pretas expressam equilíbrios instáveis e estáveis, respectivamente. Os  $\tau_s$  e  $\tau_r$  são os pontos de sustentação e de ruptura, respectivamente. Os primeiros são os pontos em que dependendo da situação – redução ou aumento dos custos de transporte – os equilíbrios do tipo centro-periferia (aglomeração total) deixam de ser ou passam a ser estáveis. Os segundos são os pontos em que dependendo da situação os equilíbrios do tipo simétrico (dispersão) deixam de ser ou passam a ser estáveis.

Investigando o caso com  $\eta = 0.00$ , Figura 2.1, observa-se que, para  $\tau \in [\tau_r, 2]$ , apenas o equilíbrio simétrico é estável. A equação (7) mostra que quanto maior forem os custos de transporte, menor será a demanda por variedades estrangeiras, de modo que para níveis muito altos de custos de transporte cada região consome basicamente sua produção manufatureira doméstica. Como os trabalhadores não qualificados não apresentam mobilidade inter-regional, uma potencial aglomeração do capital humano implicaria em uma forte competição pela demanda dos residentes do centro, enquanto haveria um subaproveitamento da demanda dos não residentes. Devido a estrutura da função de utilidade indireta, a redução na remuneração ofertada ao capital humano teria um impacto maior que a redução no índice de preço, assim, haveria um incentivo para parte do capital humano emigrar. Em outras palavras, o efeito extensão da competição suplanta os efeitos tamanho de mercado e índice de preço. Portanto, para desfrutar ao máximo da demanda dos trabalhadores não qualificados, a distribuição espacial do capital humano e, conseqüentemente, das firmas é caracterizada pela dispersão para  $\tau \in [\tau_r, 2]$ .

Para  $\tau \in (\tau_s, \tau_r)$ , a Figura 2.1 apresenta dois equilíbrios estáveis do tipo assimétrico. A redução dos custos de transporte implica uma redução na diferença entre a demanda doméstica e estrangeira, o que por sua vez limita o efeito extensão da competição. Como resultado, esse começa a perder vigor na disputa com o efeito tamanho do mercado, o que somado ao efeito índice de preço possibilita que as regiões difiram na sua participação na oferta de bens diferenciados. Para  $\tau \in [1, \tau_s]$ , a Figura 2.1 apresenta dois equilíbrios estáveis do tipo centro-periferia. Conforme os custos de transporte diminuem, mais fraco é efeito extensão da competição e, conseqüentemente, a disputa é cada vez mais favorável ao efeito tamanho de mercado. Desse modo, independente da disputa entre os dois efeitos induzir uma pequena queda ou um pequeno aumento na remuneração do capital humano, a diminuição do índice de preços leva aos equilíbrios do tipo centro-periferia. Para níveis ainda mais baixos de custos de transporte, o efeito índice de preço perde importância, mas o efeito tamanho de mercado suplanta consideravelmente o efeito extensão da competição. Logo, os equilíbrios do tipo centro-periferia continuam estáveis.

Enquanto o caso original possui uma bifurcação tridente subcrítica, Figura 2.1, a inclusão de custos de congestionamento origina uma bifurcação do tipo curva de sino, Figura 2.2. Desse modo, o sistema é caracterizado pela dispersão, aglomeração e dispersão, conforme os custos de transporte diminuem<sup>6</sup>. Para  $\tau \in [\tau_{r2}, 2]$ , seguindo o caso anterior, o capital humano e as firmas são caracterizados pela dispersão espacial para desfrutarem ao máximo da demanda dos trabalhadores não qualificados. Por sua vez, para  $\tau \in [1, \tau_{r1}]$ , o capital humano e as firmas são caracterizados pela dispersão espacial devido aos custos urbanos da aglomeração. A equação (10) mostra que a redução da produtividade, decorrente dos custos de congestionamento, leva a um aumento no custo de produção das variedades locais. Assim, para baixos custos de transporte, as firmas obtêm maior lucro evitando os custos da concentração do que aproveitando o efeito tamanho do mercado.

Ademais, o  $\tau_{r2}$  está à esquerda de seu análogo do caso original. Isso ocorre porque, como explicado na Seção 2.5, os custos de congestionamento, além de seu impacto direto, possuem o impacto indireto de fortalecer o efeito de extensão da competição e enfraquecer o efeito índice de

<sup>6</sup>As simulações mostraram que para  $0.009 \leq \eta \leq 0.022$  existem apenas equilíbrios dos tipos simétrico e assimétrico. Já para  $\eta < 0.009$ , além das aglomerações parciais, existem equilíbrio estáveis do tipo centro-periferia entre  $\tau_{r1}$  e  $\tau_{r2}$ .

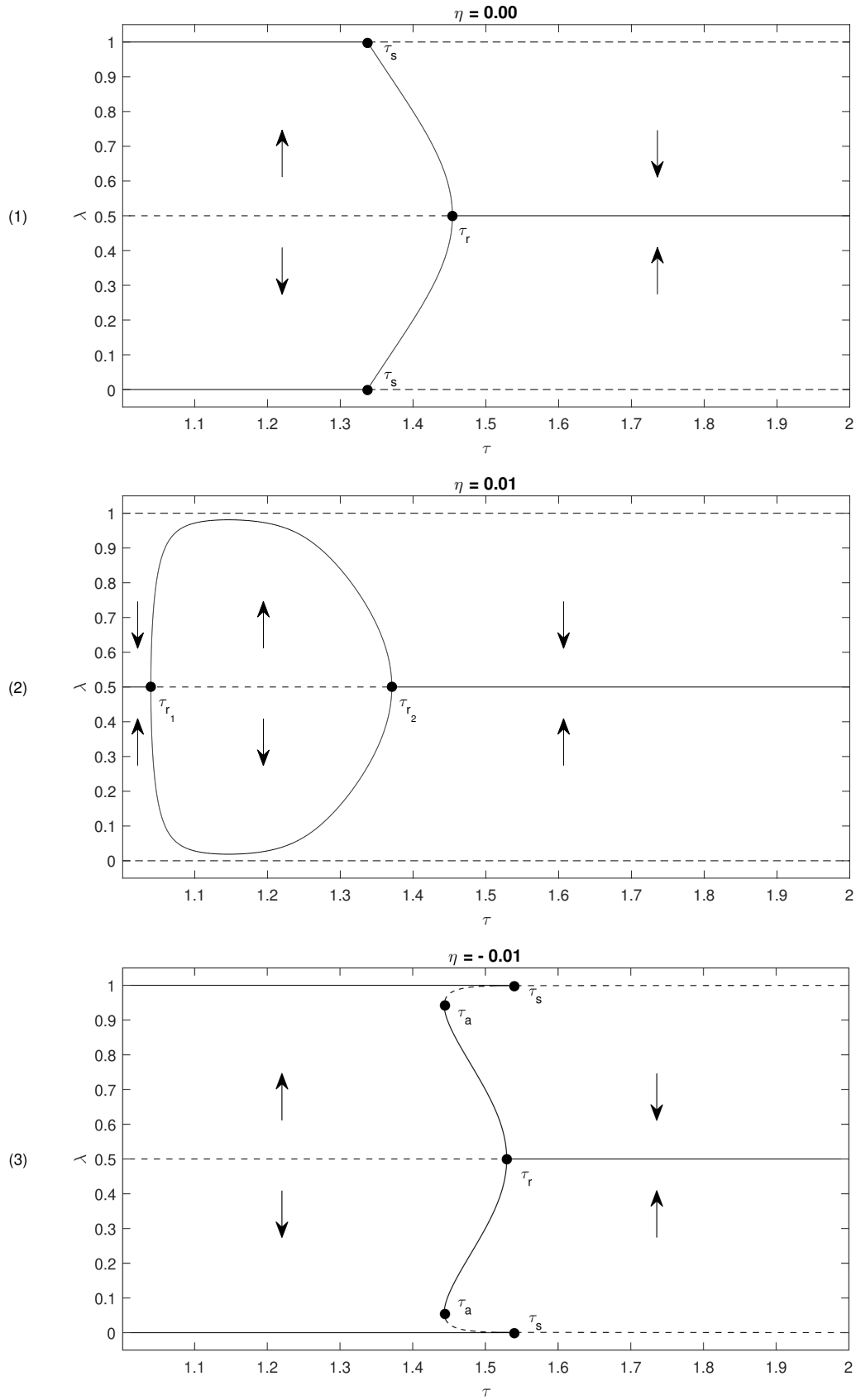


Figura 2: Diagramas de Bifurcação para (1)  $\eta = 0.00$ , (2)  $\eta = 0.01$  e (3)  $\eta = -0.01$ .

preço. Esse também é o motivo para que na situação com  $\eta = 0.01$ , o qual, dada a estrutura do modelo, é considerado um valor alto de custos de congestionamento, não haja equilíbrios estáveis do tipo centro-periferia.

A Figura 2.3 mostra o diagrama de bifurcação do caso com benefícios de congestionamento. A grande diferença entre as Figuras 2.1 e 2.3 é que na segunda existem dois pontos de sustentação: um à esquerda,  $\tau_a$ , e outro à direita,  $\tau_s$ , do ponto de ruptura,  $\tau_r$ . Isso implica que no caso representativo de benefícios de congestionamento,  $\eta = -0.01$ , a economia tem um comportamento diferente entre a situação com custos de transporte baixos, mas apresentando uma tendência de alta, e a situação com custos de transporte altos, mas apresentando uma tendência de baixa. Desse modo, o sistema apresenta histerese, ou seja, a mudança na estrutura espacial da economia ocorre em pontos diferentes, dependendo da situação. Na primeira, a estrutura centro-periferia não será rompida quando  $\tau > \tau_r$ , mas apenas quando  $\tau > \tau_s$ . Para tais custos de transporte, qualquer perturbação - migração de um único trabalhador qualificado - leva à economia abruptamente para uma estrutura do tipo simétrica.

É importante ressaltar que quando estamos nos aproximando de  $\tau_s$  pela esquerda, os equilíbrios instáveis do tipo assimétrico estão se aproximando cada vez mais dos equilíbrios estáveis do tipo centro-periferia. Dessa forma, se ocorrer uma perturbação um pouco maior - migração de um número considerável de trabalhadores qualificados - pode acontecer da economia convergir para uma aglomeração parcial para custos de transporte entre  $\tau_a$  e  $\tau_r$ . Isso acontece porque a bacia de atração do equilíbrio estável do tipo centro-periferia é muito pequena, de modo que uma perturbação significativa pode transferir o sistema para bacia de atração do equilíbrio estável do tipo assimétrico, conforme pode ser averiguado pelo exemplo com  $\eta = -0.01$  e  $\tau = 1.50$  na Figura 1.

Na segunda situação, a estrutura simétrica será rompida quando  $\tau < \tau_r$ , ponto no qual a economia faz uma transição suave para a estrutura assimétrica. Essa é mantida até  $\tau_a$ , ponto a partir do qual uma nova redução de  $\tau$  faz com que qualquer perturbação leve à economia abruptamente para estrutura centro-periferia. Portanto, principalmente na primeira situação, mas também na segunda, a variação dos custos de transporte leva a transições abruptas entre os tipos de estrutura espacial. Isso decorre do ponto de sustentação ser diferente em cada situações:  $\tau_s$  na primeira e  $\tau_a$  na segunda.

A comparação das Figuras 2.1 e 2.3 evidencia que os pontos de ruptura e sustentação, seja  $\tau_a$  ou seja  $\tau_s$ , para o caso com benefícios de congestionamento estão à direita de seus análogos para o caso original. Portanto, quando a concentração incrementa a capacidade da autoridade pública fornecer a infraestrutura necessária para o aumento da produtividade das firmas locais, os equilíbrios do tipo centro-periferia são estáveis para um intervalo maior de custos de transporte, o que, por sua vez, faz os valores de  $\tau$  para os quais os equilíbrios estáveis são do tipo assimétrico serem superiores aos seus análogos do caso original. Como explanado na Seção 2.5, isso acontece porque os benefícios de congestionamento, além de seu impacto direto como força aglomerativa, possuem o impacto indireto de fortalecer o efeito índice de preço e enfraquecer o efeito extensão da competição.

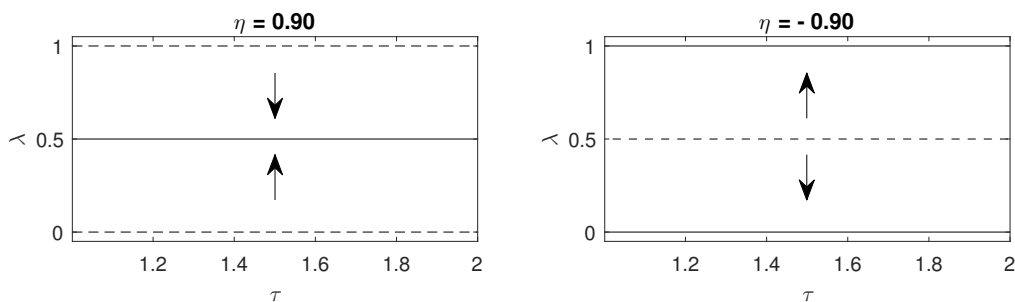


Figura 3: Diagramas de Bifurcação para (1)  $\eta = 0.90$ , (2)  $\eta = -0.90$ .

Conforme ilustrado para  $\eta = 0.90$  e  $\eta = -0.90$  na Figura 3, no caso limite em que os custos de congestionamento são muito grandes ( $\eta \rightarrow 1$ ), os equilíbrios estáveis passam a ser somente os do

tipo simétrico, isto é, neste caso a atividade manufatureira se dispersa igualmente entre as regiões. Já para benefícios de congestionamento muito grandes ( $\eta \rightarrow -1$ ), os equilíbrios estáveis passam a ser somente os do tipo centro-periferia, isto é, neste caso a atividade manufatureira se aglomera totalmente em uma das regiões.

### 3.1.2 Dinâmica Espacial do Capital Humano

Utilizando  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = (1 - \lambda)$ , a dinâmica da mobilidade espacial do capital humano é simplificada para uma equação diferencial:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \gamma\lambda(1 - \lambda)\Delta V(\lambda) \quad (20)$$

onde:  $\Delta V(\lambda) = V_1(\lambda) - V_2(\lambda)$  é a diferença entre as utilidades indiretas nas regiões 1 e 2 e  $\gamma$  é o fator de ajuste exponencial.

A Figura 4, dada condição inicial  $\lambda = 0.6$ , mostra o estado estacionário da economia para os dois valores representativos de  $\tau$  nos três casos representativos do parâmetro  $\eta$ . A primeira e a segunda linha representam  $\tau = 1.25$  e  $\tau = 1.50$ , respectivamente. A primeira coluna apresenta o caso original (Pflüger, 2004), enquanto a segunda e a terceira coluna apresentam os casos com custos e benefícios de congestionamento, respectivamente.

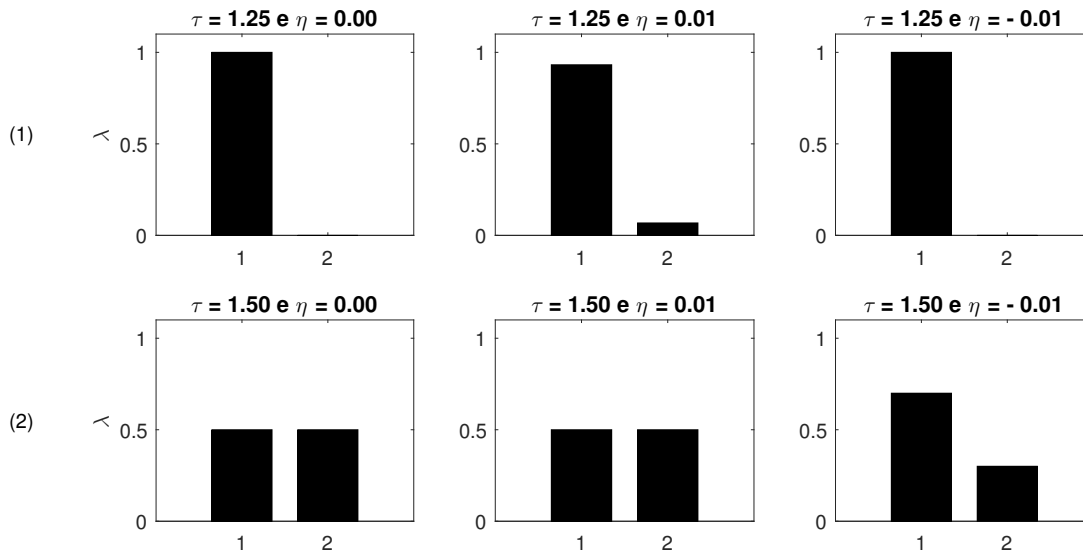


Figura 4: Estado estacionário da economia para a condição inicial  $\lambda = 0.6$ .

Com  $\eta = 0.00$  e  $\lambda = 0.6$  como condição inicial, no longo prazo, conforme previsto na Figura 1, a produção manufatureira é caracterizada pela aglomeração total na região 1 para  $\tau = 1.25$  e pela dispersão para  $\tau = 1.50$ . Com  $\eta = 0.01$  e  $\lambda = 0.6$  como condição inicial, no longo prazo, conforme previsto na Figura 1, a produção manufatureira é caracterizada pela aglomeração parcial, com grande predomínio da região 1, para  $\tau = 1.25$  e pela dispersão para  $\tau = 1.50$ . Com  $\eta = -0.01$  e  $\lambda = 0.6$  como condição inicial, no longo prazo, conforme previsto na Figura 1, a produção manufatureira é caracterizada pela aglomeração total na região 1 para  $\tau = 1.25$  e pela aglomeração parcial, com predomínio da região 1, para  $\tau = 1.50$ .

### 3.2 Modelo com $R = 12$ Regiões

Para uma economia com  $R > 2$  regiões é difícil produzir diagramas de bifurcação como os apresentados na Figura 2. Nessa conjuntura, a maneira mais fácil de formar alguma intuição sobre o impacto dos custos ou benefícios de congestionamento é, de maneira parecida com a Seção 3.1.2, simulando a dinâmica da mobilidade espacial do capital humano. Como explanado na Seção 2.5, na situação com  $R > 2$  regiões é necessário empregar o sistema de equações diferenciais fornecido por (19).

A Figura 5 mostra o estado inicial e final (estacionário) de uma economia com 12 regiões para três valores de tecnologia de transporte:  $\tau = 1.07$ ,  $\tau = 1.14$  e  $\tau = 1.21$ . A linha 1 apresenta a distribuição inicial, aleatoriamente sorteada, do capital humano comum as nove simulações realizadas. As linhas 2, 3 e 4 apresentam as distribuições finais para o caso original,  $\eta = 0.000$ , para o caso com custos de congestionamento,  $\eta = 0.001$ , e para o caso com benefícios de congestionamento,  $\eta = -0.001$ , respectivamente<sup>7</sup>. Nas simulações realizadas, a distribuição estacionária dos tamanhos regionais se mostrou independente das distribuições iniciais aleatórias utilizadas.

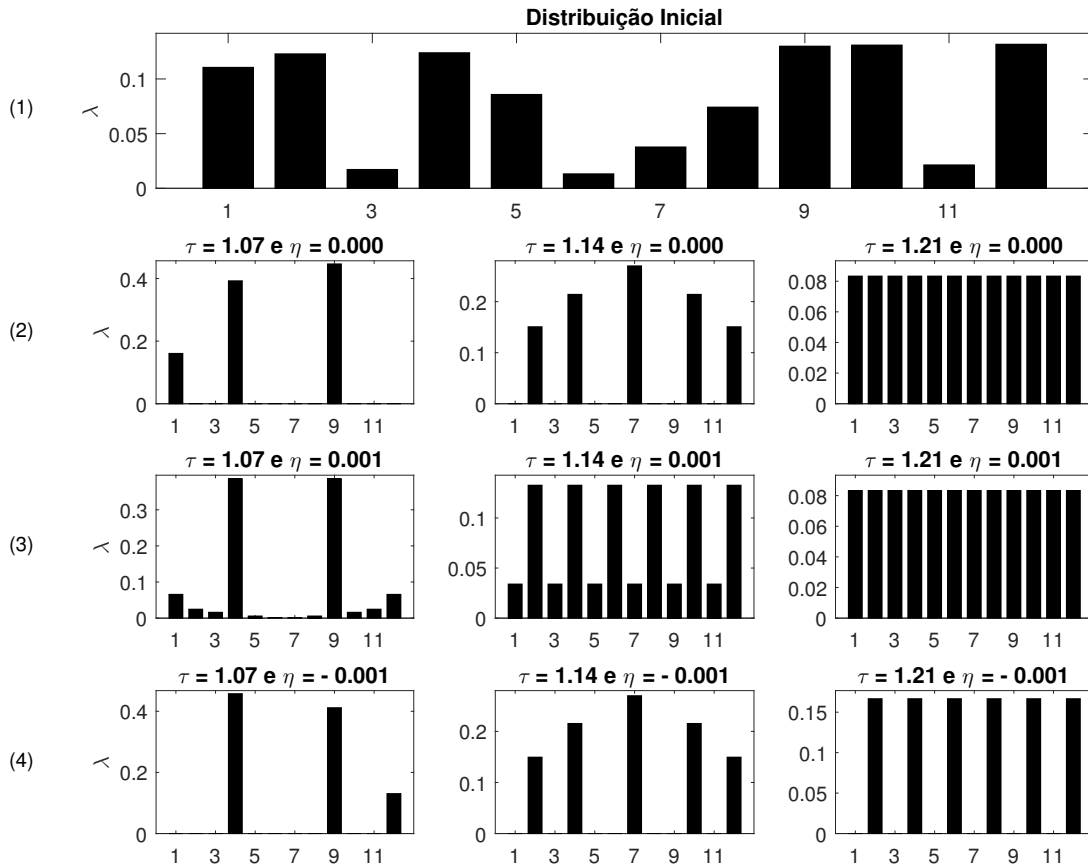


Figura 5: Estado estacionário para  $\tau = 1.07$ ,  $\tau = 1.14$  e  $\tau = 1.21$ , onde: (1) é a distribuição inicial da produção manufatureira; (2) é a distribuição final no caso com  $\eta = 0.000$ ; (3) é a distribuição final no caso com  $\eta = 0.001$ ; e (4) é a distribuição final no caso com  $\eta = -0.001$ .

<sup>7</sup>Com 12 regiões, as simulações mostraram que para o caso original o ponto de ruptura é  $\tau = 1.20$ . Assim, com  $\eta = 0.01$ , como representante do caso com custos de congestionamento, a estrutura espacial simétrica é o equilíbrio para todos os valores de  $\tau$ . Portanto, para cada um dos três casos apresentar mais que um tipo de estrutura espacial produtiva é necessário reduzir a grandeza do parâmetro  $\eta$ .



Comparando o caso original com o caso com custos de congestionamento, nota-se que a estrutura espacial da produção manufatureira é idêntica para  $\tau = 1.21$ , mas diferente para  $\tau = 1.07$  e  $\tau = 1.14$ . Para esses, no caso com  $\eta = 0.001$ , os maiores centros diminuem consideravelmente de tamanho e, conseqüentemente, algumas regiões tornam-se pequenos polos produtivos. Portanto, em uma economia com  $R > 2$  regiões, os custos de congestionamento também induzem uma maior dispersão da atividade manufatureira.

Comparando o caso original com o caso com benefícios de congestionamento, nota-se que a estrutura espacial da produção manufatureira é idêntica para  $\tau = 1.07$  e  $\tau = 1.14$ , mas diferente para  $\tau = 1.21$ . Para esse, no caso com  $\eta = -0.001$ , a produção não está dispersa igualmente entre as regiões, mas concentrada em seis centros de igual tamanho. Portanto, em uma economia com  $R > 2$  regiões, os benefícios de congestionamento também induzem uma maior concentração da atividade manufatureira. Por fim, assim como no caso do modelo com duas regiões, se  $\eta$  é próximo de 1 então ocorre a dispersão completa da atividade manufatureira igualmente entre todas as regiões; já se  $\eta$  é próximo de  $-1$ , a indústria se aglomera totalmente em uma única região

### 3.2.1 Lei de Zipf

Segundo Brakman et al. (1999), a lei de Zipf é um caso especial da *rank-size distribution*. Dada a ordenação decrescente das cidades pelo tamanho de suas populações, a *rank-size distribution* prevê uma relação linear inversa entre o logaritmo do tamanho de uma cidade e o logaritmo da sua posição na ordenação:

$$\ln(M_k) = \ln(\beta) - q \ln(C_k) \quad (21)$$

onde  $\beta$  é uma constante;  $C_k$  é a posição da  $k$ -ésima maior cidade na ordenação decrescente ( $C_1 = 1$  para a maior cidade,  $C_2 = 2$  para a segunda maior cidade, etc.); e  $M_k$  é o tamanho da cidade  $C_k$ . Para o modelo aqui apresentado, dada a distribuição idêntica da mão de obra não qualificada entre as regiões,  $M_k$  é fração de capital humano na  $k$ -ésima região com maior quantidade de capital humano. Assim,  $C_1$  é a região que detém a maior participação na produção manufatureira,  $C_2$  é a região que detém a segunda maior participação, e assim por diante.

A lei de Zipf é válida quando  $q = 1$ . Assim, dada a ordenação decrescente, ela prevê que a primeira região,  $C_1$ , é  $k$  vezes mais populosa que a  $k$ -ésima região,  $C_k$ . Se  $q > 1$ , a concentração da atividade manufatureira é maior que a prevista pela lei de Zipf. Se  $0 < q < 1$ , a concentração é menor que a prevista pela lei de Zipf. Se  $q = 0$ , todas as regiões apresentam o mesmo tamanho.

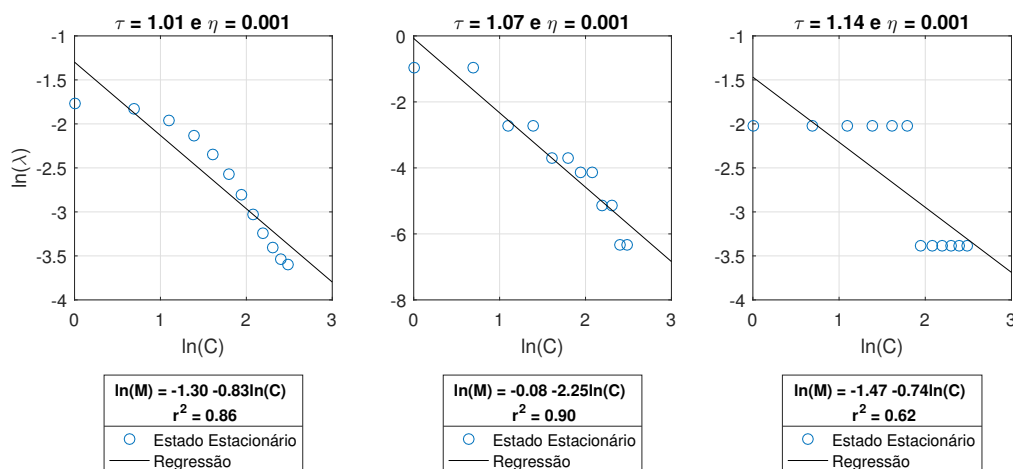


Figura 6: *Rank-Size Distribution*.

Para uma economia com 12 regiões que apresenta um custo de congestionamento de  $\eta = 0.001$ , a Figura 6 mostra as regressões da *rank-size distribution*, equação (21), para três valores de tecnologia de transporte. Os dados são os estados estacionários de cada região, obtidos através de (19). Para  $\eta = 1.14$ , temos  $q = 0.74$  e  $r^2 = 62\%$ , ou seja, 62% da variação do tamanho regional é explicada pela *rank-size distribution*. Como evidenciado pela Figura 5, esse resultado decorre da estrutura espacial da produção possuir apenas dois valores de  $M$ . Para  $\eta = 1.07$ , temos  $q = 2.25$  e  $r^2 = 90\%$ . Como evidenciado pela Figura 5, o  $q > 1$  decorre das duas maiores regiões concentrarem 70% do capital humano. Ademais, apesar do alto  $r^2$ , a relação não é plenamente linear, pois no estado estacionário cada valor de  $M$  se repete duas vezes, de modo que  $M_1 = M_2$ ,  $M_3 = M_4$ , e assim por diante.

Diferente de  $\tau = 1.07$  e  $\tau = 1.14$ ,  $\tau = 1.01$  origina uma distribuição da produção manufatureira mais próxima da realidade, pois nenhuma região apresenta uma participação exatamente idêntica a outra. Nessa situação, temos  $q = 0.83$  e  $r^2 = 0.86$ . Apesar de  $q < 1$ , a distribuição da produção manufatureira para  $\tau = 1.01$  é a que mais se aproxima da lei de Zipf para os parâmetros utilizados nas seções anteriores do artigo.

Modificando dois parâmetros anteriormente fixados, o modelo é capaz de reproduzir a lei de Zipf para o estado estacionário de uma economia com 12 regiões, Figura 7. A primeira modificação acontece no parâmetro  $\rho$ . As três situações da Figura 7 utilizam  $\rho = 0.5$ , ou seja cada região detém uma quantidade de trabalho não qualificado equivalente a metade do trabalho qualificado total da economia. A segunda modificação acontece no parâmetro  $\sigma$ . Na primeira situação,  $\tau = 1.065$  e  $\eta = 0.005$ , utiliza-se  $\sigma = 4$ , ou seja, o grau de diferenciação entre as variedades é maior que nas simulações anteriores. Na segunda situação,  $\eta = 1.025$  e  $\eta = 0.0035$ , utiliza-se  $\sigma = 6$ , ou seja, o grau de diferenciação entre as variedades é idêntico ao das simulações anteriores. Na terceira situação,  $\eta = 1.020$  e  $\eta = 0.0025$ , utiliza-se  $\sigma = 8$ , ou seja, o grau de diferenciação entre as variedades é menor que nas simulações anteriores.

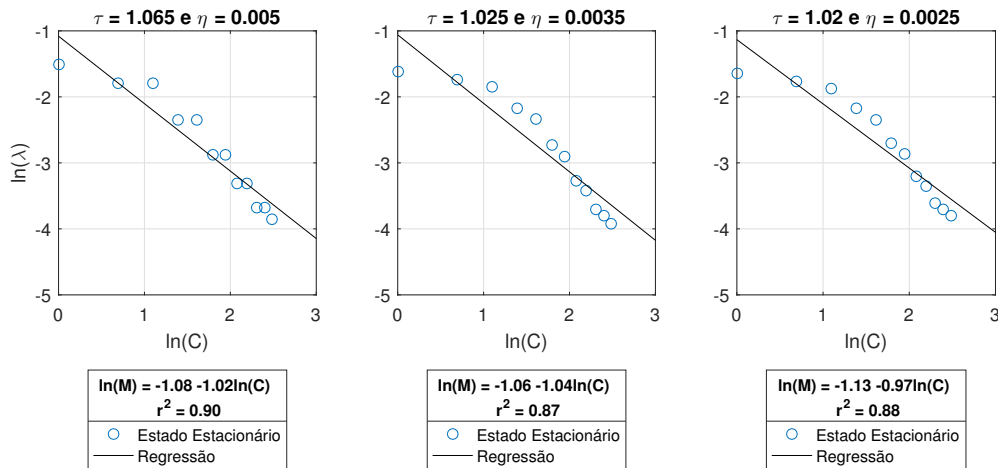


Figura 7: Lei de Zipf.

## 4 Conclusões e Perspectivas

Este artigo apresenta uma generalização do modelo de Pflüger (2004) através da expansão para  $R \geq 2$  regiões e da inclusão de uma nova força, a qual, dependendo do valor do parâmetro que governa sua intensidade, expressa custos ou benefícios de congestionamento. No primeiro caso, a nova força atua direta e indiretamente – enfraquecendo o efeito índice de preço e fortalecendo o efeito extensão da competição – em favor da dispersão espacial da produção manufatureira. Já no segundo caso,

a nova força atua direta e indiretamente – fortalecendo o efeito índice de preço e enfraquecendo o efeito extensão da competição – em favor da aglomeração espacial da produção manufatureira.

As simulações numéricas para uma economia com  $R = 2$  regiões mostram que no caso sem congestionamento, a distribuição espacial da produção manufatureira, como exposto por (Pflüger, 2004), é caracterizada por uma transição suave da dispersão para aglomeração total, conforme a redução dos custos de transporte. Ademais, no caso com custos de congestionamento intensos o suficiente, a distribuição espacial da produção manufatureira é caracterizada pela dispersão, aglomeração parcial e dispersão, conforme a redução dos custos de transporte. Para altos custos de transporte, a dispersão ocorre para as firmas aproveitarem ao máximo a demanda dos trabalhadores não qualificados, enquanto que para baixos custos de transporte, a dispersão ocorre devido os custos urbanos da concentração. No caso limite em que os custos de congestionamento são muito altos, a indústria se dispersa igualmente entre todas as regiões, independente dos custos de transporte

No caso com benefícios de congestionamento, a distribuição espacial da produção é caracterizada por dois pontos de sustentação. Dessa maneira, a economia manifesta histerese, pois tem um comportamento espacial diferente entre a situação com custos de transporte baixos, mas apresentando uma tendência de alta, e a situação com custos de transporte altos, mas apresentando uma tendência de baixo. Na primeira situação, a economia sai abruptamente da concentração para a dispersão, enquanto na segunda situação, a economia sai suavemente da dispersão para aglomeração parcial, mas abruptamente da aglomeração parcial para aglomeração total. No caso limite em que os benefícios de congestionamento são muito altos, a indústria se aglomera totalmente em apenas uma região, independente dos custos de transporte.

As simulações numéricas para uma economia com  $R = 12$  regiões mostram que, comparado ao caso original, o caso com custos de congestionamento apresenta uma maior dispersão espacial da atividade manufatureira, enquanto o caso com benefícios de congestionamento apresenta uma maior concentração espacial. Além disso, este modelo, no caso com custos de congestionamento, foi capaz de reproduzir a lei de Zipf para três configurações diferentes de parâmetros. Como tópico futuro de pesquisa se inclui a análise matemática da estabilidade dos equilíbrios do modelo.

## Referências Bibliográficas

- Alonso-Villar, O. (2008). A model of economic geography with demand-pull and congestion costs. *Papers in Regional Science*, 87(2):261–276.
- Brakman, S., Garretsen, H., and van Marrewijk, C. (2012). *The New Introduction to Geographical Economics*. Cambridge University Press, New York, US, 2 edition.
- Brakman, S., Garretsen, H., van Marrewijk, C., and van den Berg, M. (1999). The return of zipf; towards a further understanding of the rank-size curve. *Journal of Regional Science*, 39(1):183–213.
- Czaika, M. and Parsons, C. R. (2017). The gravity of high-skilled migration policies. *Demography*, 54:603–630.
- Dixit, A. K. and Stiglitz, J. E. (1977). Monopolistic competition and optimum product diversity. *The American Economic Review*, 67(3):297–308.
- Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P. (2003). An analytically solvable core-periphery model. *Journal of Economic Geography*, 3(3):229–240.
- Fujita, M., Krugman, P., and Venables, A. J. (1999). *The Spatial Economy*. MIT Press.
- Fujita, M. and Thisse, J.-F. (2002). *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location*. Cambridge University Press, UK.

- Henderson, J. V. (1974). The sizes and types of cities. *The American Economic Review*, 64(4):640–656.
- Krugman, P. (1991). Increasing returns and economic geography. *Journal of Political Economy*, 99(3):483–499.
- Monasterio, L. M. (2004). A lei de zipf: Rio grande do sul (1940-2000). *Redes (Santa Cruz do Sul)*, 9(2):181–190.
- Moura, N. J. and Ribeiro, M. B. (2006). Zipf law for brazilian cities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 367:441–448.
- OECD and EU (2018). *Settling In 2018: Indicators of Immigrant Integration*. OECD Publishing, Paris/European Union, Brussels.
- Ottaviano, G., Tabuchi, T., and Thisse, J.-F. (2002). Agglomeration and trade revisited. *International Economic Review*, 43(2):409–435.
- Pflüger, M. (2004). "a simple, analytically solvable, chamberlinian agglomeration model. *Regional Science and Urban Economics*, 34(5):565 – 573.
- Pflüger, M. and Südekum, J. (2008). Integration, agglomeration and welfare. *Journal of Urban Economics*, 63(2):544–566.
- Pflüger, M. and Tabuchi, T. (2010). The size of regions with land use for production. *Regional Science and Urban Economics*, 40(6):481–489.
- Picard, P. M. and Zeng, D.-Z. (2005). Agricultural sector and industrial agglomeration. *Journal of Development Economics*, 77(1):75–106.
- Puga, D. (1999). The rise and fall of regional inequalities. *European Economic Review*, 43(2):303–334.
- Samuelson, P. A. (1952). The transfer problem and transport costs: The terms of trade when impediments are absent. *The Economic Journal*, 62(246):278–304.
- Strogatz, S. H. (2007). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Levant Books, Kolkata, India, 1 edition.
- Tabuchi, T. (1998). Urban agglomeration and dispersion: A synthesis of alonso and krugman. *Journal of Urban Economics*, 44(3):333–351.
- Tabuchi, T. and Thisse, J.-F. (2002). Taste heterogeneity, labor mobility and economic geography. *Journal of Development Economics*, 69(1):155–177.
- Van Marrewijk, C. (2006). Geographical economics model with congestion. In Schuh, N. and Schuster, P., editors, *New Regional Economics in Central European Economies: The Future of CENTROPE*, pages 17–35. Oesterreichische Nationalbank, Vienna, AT.