O modelo com mudança de regime markoviana e duração dependente: Um estudo empírico para o PIB do Brasil.

Fernando Henrique de Paula e Silva Mendes*

Guilherme Valle Moura†

João Frois Caldeira‡

Resumo

O objetivo deste artigo é identificar ciclos econômicos no Brasil através da utilização do modelo com mudança de regime e duração dependente. Além da identificação de ciclos, a parametrização proposta busca investigar se a probabilidade de se mover da recessão para expansão (ou da expansão para recessão) depende da quantidade de períodos nesses estados. Os resultados evidenciaram que a probabilidade de transitar da recessão para expansão aumenta em função do número de períodos recessivos e, em contrapartida, a probabilidade de se mover da expansão para a recessão não aumenta em função do número de períodos na expansão. No que diz respeito à identificação de períodos de recessão (expansão), as probabilidades suavizadas do modelo com mudança de regime e duração dependente foram similares à datação de ciclos divulgada pelo CODACE-FGV.

Palavras-chave: Ciclos de Negócios, Mudança Markoviana, Duração Dependente

Classificação JEL: C22 E32 N16

Área 4: Macroeconomia, Economia Monetária e Finanças

Abstract

This article aims to identify business cycles in the brazilian economy using a markov switching model that incorporates duration dependence. Besides the identification, the proposed parameterization seeks to investigate whether the probability of moving from recession to expansion (or from expansion to recession) depends on the number of periods that the process has been in that state. The results showed that the probability of moving from recession to expansion increases as a function of periods in recession, on the other hand, the probability of moving from expansion to recession does not increase as a function of periods in expansion. With regard to the business cycles identification, the smoothed probabilities of this model were similar to the business cycles identification reported by CODACE-FGV.

Key-words: Business Cycles, Regime Switching, Duration Dependence

*Programa de Pós-Graduação em Economia - UFRGS. Email: fernandohpsm@hotmail.com

†Departamento de Economia - UFSC.

‡Departamento de Economia - UFRGS.

1 Introdução

Na literatura econômica, a busca por mensurar o estado da economia e entender a transição entre períodos de recessão e expansão tem sido tema importante na pesquisa sobre ciclos econômicos e tem suas origens nos trabalhos de Fisher (1925) e Burns & Mitchell (1946). Baseado nesses estudos, diversos autores buscaram desenvolver metodologias a fim de capturar regularidades que dizem respeito à analise dos ciclos econômicos. Um dos métodos mais bem sucedidos na identificação de diferentes regimes em séries de dados econômicos foi desenvolvido por Hamilton (1989), o qual define a mudança de regime através de uma cadeia de Markov de primeira ordem. A abordagem desenvolvida pelo autor possibilita a inferência estatística não só do estado corrente, mas também da probabilidade de permanência em determinado estado no período seguinte. Em sua aplicação, Hamilton (1989) buscou caracterizar ciclos econômicos e mostrou que o PIB dos Estados Unidos poderia ser modelado por um processo de dois regimes: expansão e recessão. Os resultados obtidos pelo autor foram próximos à datação de ciclos de negócios divulgada pelo NBER (*National Bureau of Economic Research*), fato que contribuiu para que essa metodologia pudesse ser amplamente utilizada na projeção e cronologia dos ciclos de negócios.

Posteriormente a contribuição de Hamilton (1989), vários autores estenderam essa metodologia com o intuito de analisar as diferentes características das séries econômicas, dentre eles, Durland & McCurdy (1994) buscaram entender o papel da dependência cíclica dos dados ao permitir que a mudança de regime entre o estado de recessão (expansão) não fosse apenas governada pelo regime atual, mas também pelo número de períodos em que o processo se encontra em determinado estado. Diferentemente do modelo proposto por Hamilton (1989), os autores expandiram a matriz de transição de probabilidades ao incorporar uma cadeia de Markov de ordem mais elevada e introduziram o conceito de duração dependente. Usando dados da economia norte-americana, Durland & McCurdy (1994) mostraram que probabilidade de sair da recessão depende do número de períodos recessivos, isto é, sair de recessão é mais verossímil caso a crise seja prolongada, no caso contrário, a modelagem não encontrou duração dependente no regime de expansão econômica.

Evidências sobre duração dependente nos ciclos econômicos não foi exclusivamente tratada através do modelo com mudança de regime e duração dependente, ver, por exemplo, Diebold & Rudebusch 1990, Diebold et al. 1993, entre outros[1]. Porém, após o trabalho Durland & McCurdy (1994), diversos artigos destacaram a importância deste modelo na análise dos ciclos econômicos. Por exemplo, Kim & Nelson (1998) obtiveram resultados similares à Durland & McCurdy (1994) usando um modelo com mudança de regime e fatores dinâmicos, Pelagatti (2001) observou o mesmo resultado para o período mais recente da economia norte-americana utilizando uma especificação multivariada (ambos os trabalhos avançaram na literatura empírica ao utilizar

[1] Estes trabalhos abordaram a ideia da duração dependente usando dados do NBER. Por exemplo, Sichel (1991) encontrou evidências de duração dependente no EUA no período pré-Segunda Guerra Mundial através do modelo de duração Weibull. Na mesma linha de pesquisa, Diebold et al. (1993) evidenciaram os mesmos resultados de Sichel (1991) ao propor um modelo exponencial quadrático. O trabalho de Diebold & Rudebusch (1990) não encontrou evidências de duração dependente ao propor uma abordagem não-paramétrica, porém, os autores reconheceram que, embora as evidências encontradas não fossem estatisticamente significativas, os dados analisados apresentaram fortes evidências em favor da existência de duração dependente.

inferência bayesiana na estimação deste tipo de modelo). Na mesma linha de pesquisa, Lam (2004) estendeu o trabalho de Durland & McCurdy (1994) ao permitir que a duração dependente não fosse apenas incorporada na transição de probabilidade do modelo com mudança de regime. Tornando a especificação mais flexível, a parametrização proposta pelo autor evidenciou duração dependente em períodos de recessão e expansão. Os resultados não só mostraram que a probabilidade de sair da recessão depende do número de períodos recessivos, mas que a probabilidade de sair da expansão não é influenciada pelo número de períodos na expansão. Mais recentemente, trabalhos que relacionam o modelo com mudança de regime e duração dependente tiveram como foco a análise de outras economias desenvolvidas e, também, em desenvolvimento (ver, por exemplo, Layton & Smith 2007, Ozun & Turk 2009 e Castro 2015).

No Brasil, o modelo com mudança de regime markoviana e suas extensões vem sendo explorado pela literatura empírica na datação de recessões e expansões. Por exemplo, Chauvet (2002) utilizou dados trimestrais (anuais) do PIB brasileiro entre os anos 1980 e 2000 (1980 e 1999) na identificação de ciclos. Cespedes et al. (2006) avaliaram o PIB brasileiro com frequência trimestral entre os anos 1975 e 2002 e concluíram que os modelos não lineares são superiores aos modelos lineares em termos preditivos. Em trabalho recente, Valls Pereira & Vieira (2014) analisaram os ciclos de negócios brasileiro entre os anos 1900 e 2012. Considerando que a série trimestral do PIB real só começa em 1980, os autores construíram a série para o período de 1900 a 1979 utilizando um modelo estrutural com desagregação temporal para o primeiro período e, após isso, um modelo com mudança de regime heterocedástico foi proposto para construir a cronologia de ciclos de negócios. Contudo, apesar das diversas aplicações do modelo com mudança de regime markoviana na datação e previsão dos ciclos econômicos, não se observou nenhum trabalho que relacione essa abordagem ao modelo com duração dependente.

Tendo isso em vista, o objetivo deste artigo é realizar uma análise empírica para a economia brasileira utilizando o modelo com mudança de regime e duração dependente. Além da identificação de ciclos, a parametrização proposta, buscará investigar se a probabilidade de se mover da recessão para expansão depende da quantidade de períodos em que economia ficou na recessão, ou de modo análogo, se a probabilidade da economia de se mover da expansão para recessão depende do número de períodos na expansão. Usando dados do PIB entre os anos 1980 e 2016, esse trabalho não só busca preencher a lacuna existente na literatura nacional como, também, trazer informações relevantes para análise macroeconômica, uma vez que o modelo utilizado captura simultaneamente a probabilidade e a dependência temporal da recessão (expansão).

Após esta introdução o trabalho está organizado em 3 seções. A seção 2 explora o conceito de duração dependente no modelo com mudança de regime. Na seção 3 são apresentados os dados, as estimativas dos modelos usados na análise de duração dependente e a datação de ciclos econômicos. Por fim, na seção final seguem as considerações finais.

2 Metodologia

O modelo com mudança de regime proposto por Hamilton (1989) é definido como:

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 S_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \{y_{t-i} - \mu_0 - \mu_1 S_{t-i}\} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

onde y_t é a variação da taxa de crescimento do PIB, S_t é a variável de estado que segue uma cadeia de Markov de primeira ordem, tal que, $S_t = i$, para, $i = 0{,}1$ caracterizando recessão (expansão) econômica, $\phi_1, \ldots, \phi_p$ os parâmetros, p o número de defasagens e ε_t um termo de erro no período t, homoscedástico e gaussiano.

Diferentemente dos modelos tradicionais de mudança de regime markoviana, Durland & McCurdy (1994), buscaram capturar a dependência temporal da variável de estado. A ideia dos autores foi colocar dinâmica na matriz de transição de probabilidade através da variável $D(St)$. O papel desta variável é retratar a memória na ocorrência consecutiva do estado S_t, assim definida na equação abaixo:

$$D(S_t) = \begin{cases} 1 \quad se \quad S_t \neq S_{t-1} \\ D(S_{t-1}) + 1 \quad se \quad S_t = S_{t-1} \quad e \quad D(S_{t-1}) < \tau \\ D(S_{t-1}) \quad se \quad S_t = S_{t-1} \quad e \quad D(S_{t-1}) = \tau \end{cases} . \tag{2}$$

Nota-se que um parâmetro limite τ é estabelecido na equação acima, entretanto, o seu valor é um número discreto e será calibrado[2]. Uma maneira de parametrizar as probabilidades de transição desta especificação é através do uso de uma função logística. Isso garante que as probabilidades estejam entre 0 e 1. Usando i e d para indexar a realização dos estados e a duração, onde $\gamma_1(i)$ e $\gamma_2(i)$ são os parâmetros, a probabilidade de transição para $i = 0,1$ é dada por:

$$P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = \begin{cases} \frac{\exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i) d)}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i) d)}, & d \leq \tau \\ \frac{\exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i) \tau)}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i) \tau)}, & d > \tau \end{cases} \quad i = 0, 1. \tag{3}$$

O efeito duração permite que a matriz de transição de probabilidade varie no tempo até atingir τ. O parâmetro $\gamma_2(i)$ determinará o efeito da dependência de duração: $\gamma_2(i) < 0$ significa que um longo período no regime i implica uma probabilidade mais alta de troca de estado; $\gamma_2(i) = 0$ significa que a probabilidade de transição é independente da duração do regime; e $\gamma_2(i) > 0$ indica que quanto maior a duração do regime i, maior a chance do processo se manter em i. É interessante destacar que, caso a dependência seja nula, $\gamma_2(i) = 0$, esta parametrização colapsa no processo de Markov de primeira ordem: $P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = P(S_t = i | S_{t-1} = i)$, ou seja, a mudança de regime dependerá apenas do valor passado mais recente da variável de estado e será independente do número de períodos no qual o processo se encontra em determinado estado.

[2]Para mais detalhes ver apêndice A.

A estimação dos parâmetros do modelo com mudança de regime e duração dependente pode ser realizada utilizando o método da quase-máxima verossimilhança, como em Durland & McCurdy (1994), ou empregar o amostrador Gibbs Sampling, tal como Pelagatti (2001). Neste trabalho, optou-se pelo primeiro método, dado que a série de dados utilizada aqui é grande o suficiente garantindo as propriedades assintotísticas do estimador[3] Adicionalmente, o presente trabalho seguirá o desenvolvimento visto em Maheu & McCurdy (2000)[4], já que essa parametrização pode ser vista como um processo markoviano de primeira ordem, fato que facilitará a implementação deste modelo (para mais informações ver apêndice A).

3 Resultados Empíricos

Dados

A análise empírica considera dados trimestrais da variação do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil. O período em análise vai do segundo trimestre de 1980 até segundo trimestre de 2016, perfazendo um total de 145 observações. Neste trabalho uso-se duas bases distintas para retratar os dados no período. A primeira série refere-se ao PIB trimestral com ajuste sazonal, ano base 2010 (entre o primeiro trimestre de 1996 e segundo trimestre de 2016). A segunda série refere-se ao PIB trimestral com ajuste sazonal, ano base 2000 (entre o primeiro trimestre de 1980 e terceiro trimestre de 2014). A fim de obter o PIB entre 1980 e 2016, a série mais curta (ano base 2010) foi retropolada usando a taxa de crescimento da série mais longa (ano base 2000). Após obtidos os dados, tomou-se o primeira diferença de seu logaritmo.

Tabela 1: Dados

Estatísticas descritivas	
Observações	145
Média	0.544
Desv. Padrão	1.796
Mínimo	-4.698
Máximo	7.105

Nota: Esta tabela apresenta estatísticas descritivas para dados trimestrais da diferença do logaritmo do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil. A base de dados é trimestral e o período amostral vai do segundo trimestre de 1980 até segundo trimestre de 2016, perfazendo um total de 145 observações.

[3]Para mais informações ver White (1982).

[4]Estes autores estenderam a abordagem de Durland & McCurdy (1994) para a análise de *bull e bear market* na bolsa de Nova York. O modelos com mudança de regime e duração dependente capturaram o fato de que a persistência de um estado ascendente torna os investidores otimistas em relação ao futuro atraindo mais investimentos e fazendo com que a probabilidade de troca de regime também varie no tempo. Analogamente, no mercado de baixa, o pessimismo dos investidores faz com que a probabilidade de troca de regime seja tempo variante. No geral, os resultados revelaram que ambas as probabilidade diminui em função da permanência destes estados.

Modelo com mudança de regime (sem duração dependente)

Inicialmente foram estimados diversos modelos autoregressivos com mudança de regime e o critério BIC foi utilizado para determinar o número de defasagens que mais se adequa aos dados, porém, as especificações apresentaram baixo ajuste. Sendo assim, optou-se por um modelo na média, particularmente, o atrativo desta especificação, é que, apesar de simples, é possível capturar diversas características dos ciclos de negócios, independentemente da presença de quebras estruturais na série de dados (ver, por exemplo, McConnell & Perez-Quiros 2000, Harding & Pagan 2002, Albert & Chib 1993 entre outros.). No Brasil, Chauvet (2002) utilizou esta mesma especificação na análise do PIB trimestral entre os anos 1980 e 2000. Tal como evidenciado pela literatura internacional, o autor destacou que esta especificação é adequada, pois atenua o efeito adverso da presença de quebras estruturais, sobretudo, devido os planos de estabilização nas décadas de 80 e 90 no Brasil.

Tabela 2: Estimativas do modelo com mudança de regime sem duração dependente

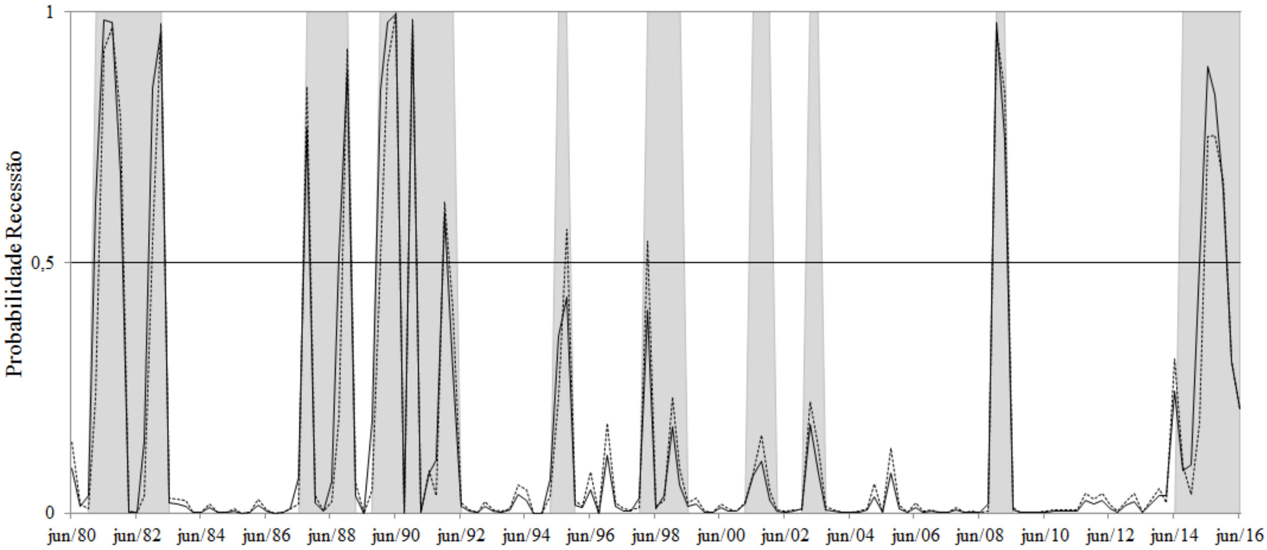
Parâmetros	Estimativa	Desvio-Padrão
μ_0	-2.1452^{***}	0.5132
μ_1	1.0030^{***}	0.1628
σ^2	1.9639^{***}	0.2992
$\gamma_1(0)$	-0.0533	0.5772
$\gamma_1(1)$	2.3374^{***}	0.4620
$\ln L$	-284.8844	

Nota: Esta tabela apresenta os parâmetros estimados do modelo com mudança de regime sem duração dependente para o PIB do Brasil com frequência trimestral entre o período de 1980 e 2016. $\ln L$ é o valor da log-verossimilhança e $^{***},^{**},^{*}$ indicam significância aos níveis de 1%, 5% e 10%, respectivamente.

Os resultados da tabela acima mostram as estimativas do modelo com mudança de regime para o período em análise que vai do segundo trimestre de 1980 até segundo trimestre de 2016. Na recessão, o valor do PIB segue uma tendência majoritariamente negativa e isso é retratado pela média ($\mu_0 = -2.14\%$). Na expansão, a tendência é de alta ($\mu_1 = 1.00\%$). Ambas estimativas são estatisticamente significativas e diferentes de zero. No que diz respeito a transição de probabilidade, os resultados evidenciaram que a chance de ficar no regime de recessão é $p_{00} = 48\%$, entretanto, a estimativa deste parâmetro ($\gamma_1(0) = -0.0533$) não foi estatisticamente diferente de zero. Em relação a chance de ficar no regime de expansão esse valor é $p_{11} = 91\%$, neste caso, a estimativa deste parâmetro ($\gamma_1(1) = 2.3374^{***}$) foi estatisticamente diferente de zero.

Com relação a identificação de períodos de recessão (expansão), a Figura 1 apresenta as probabilidades filtradas e suavizadas do modelo com mudança de regime frente a datação de ciclos econômicos divulgado pelo Comitê de Datação de Ciclos Econômicos da Fundação Getúlio Vargas[5]. É importante destacar que as probabilidades suavizadas são calculadas com base em todo o conjunto de informação, já as probabilidades filtradas, o conjunto de informação é limitado às informações até o período corrente[6]. Ambos os resultados evidenciaram que o modelo estatístico capturou os principais períodos recessivos "vis à vis" a datação da fundação Fundação Getúlio Vargas. Uma característica interessante na figura abaixo é que estas probabilidades são mais pronunciadas caso a recessão seja prolongada (exceto nos anos, 2008 e 2009, em que a recessão foi curta, porém, a variação do PIB foi extremamente abrupta).

Figura 1: Probabilidades filtradas (pontilhado) e suavizadas (contínuo) X CODACE-FGV (região cor cinza)



A fim de padronizar estes resultados, a Tabela 3 apresenta os períodos em que as probabilidades suavizadas de recessão são superiores (ou igual) a 50% frente a cronologia da Fundação Getúlio Vargas (optou-se por usar a probabilidade suavizada, pois ela contém toda a informação contida na amostra). Nota-se que o modelo estatístico capturou 5 das 9 recessões, entre os anos 1980 e 2016, todavia, as probabilidades suavizadas foram menores do que 50% nas recessões entre os anos, 1995 e 2003. Uma possível explicação para esse resultado, é que neste período a volatilidade é menor quando comparada com os demais períodos. Particularmente, neste trabalho optou-se por uma especificação em que a variança da distribuição dos dados não muda de regime, desta forma, pode existir momentos em que a probabilidade de recessão é baixa em decorrência da baixa variabilidade dos dados, fato que destoa da datação da fundação Fundação Getúlio Vargas.

.

[5] O CODACE é um comitê criado em 2008 pela Fundação Getulio Vargas com a finalidade de determinar uma cronologia de referência para os ciclos econômicos brasileiros. A forma de organização e método de trabalho do CODACE segue o modelo adotado em muitos países, com destaque para o Comitê de Datação norte-americano, criado em 1978 pelo *National Bureau of Economic Research* (NBER).

[6] Para mais informações ver Hamilton 1994

Tabela 3: Datação recessão: Probabilidades suavizadas X CODACE-FGV

Probabilidade Suavizada	Datação Ciclos (CODACE /FGV)
1° Trim./1981 - 4° Trim./1981 (-8.9%) 4° Trim./1982 - 1° Trim./1983 (-5.5%)	1° Trim./1981 - 1° Trim./1983 (-9.2%)
3° Trim./1987 (-3.1%) 3° Trim./1988 - 4° Trim./1988 (-4.3%)	3° Trim./1987 - 4° Trim./1988 (-4.3%)
4° Trim./1989 - 2° Trim./1990 (-9.3%) 4° Trim./1990 (-4.8%) 4° Trim./1991 (-2.2%)	3° Trim./1989 - 1° Trim./1992 (-8.3%)
	2° Trim./1995 - 3° Trim./1995 (-2.9%)
	1° Trim./1998 - 1° Trim./1999 (-1.5%)
	2° Trim./2001 - 4° Trim./2001 (-0.9%)
	1° Trim./2003 - 2° Trim./2003 (-1.6%)
4° Trim./2008 - 1° Trim./2009 (-5.9%)	4° Trim./2008 - 1° Trim./2009 (-5.9%)
2° Trim./2015 - 4° Trim./2015 (-5.3%)	2° Trim./2014 - 2° Trim./2016* (-8.6%)

Nota: Esta tabela apresenta a cronologia dos períodos de recessivos com base na avaliação do comite de datação de ciclos econômico (CODACE) da FGV (direita) e os períodos em que a probabilidade suavizada é superior a 50% (esquerda), em parentese é mostrado o crescimento acumulado no período recessivo de pico e vale. Vale, refere-se ao trimestre anterior, caso a probabilidade de recessão passa a ser inferior a 50%. Pico, expressa o trimestre anterior, caso a probabilidade de recessão passa a ser superior (ou igual) a 50%.

Outro ponto importante que deve ser destacado é que as decisões da Fundação Getúlio Vargas são tomadas com base na análise do conjunto mais abrangente de variáveis e estatísticas, como também, tomando o ponto de vista de seus membros, assim sendo, não é de se esperar que o modelo com mudança de regime seja extremante preciso quando comparado com esta cronologia. Contudo, as probabilidades filtradas (visto que as mesmas incorporam o conjunto de informação até o período corrente) não deixam de ser uma medida em tempo real, uma vez que o comitê divulga a datação de ciclos muito após a realização dos dados.

Modelo Weibull

Apesar do modelo com mudança de regime sem duração dependente abster-se do parâmetro que captura o efeito duração dependente, os resultados preliminares trazem indícios a respeito desta hipótese. Conforme visto anteriormente, a probabilidade de ficar no regime de recessão é menor que no regime de expansão, ademais, a duração média em cada regime também apresenta assimetria. Na recessão este valor é próximo de $(1/1-p_{00}) \approx 2$ trimestres, na expansão esse valor é $(1/1-p_{11}) \approx 11$ trimestres[7]. Na realidade, os resultados mostram a diferença na absorção de cada regime, fato evidenciado pelas probabilidades do modelo em cada instante do tempo[8].

[7] Para mais detalhes ver Hamilton (1989), p.374
[8] Ver subseção anterior.

Usando o critério de recessão, trimestres em que essa probabilidade suavizada é superior (ou igual) a 50%, os valores na Tabela 4 evidenciam o tempo em cada recessão (expansão) por meio da análise de pico e vale. Vale, refere-se ao trimestre anterior, caso a probabilidade de recessão passa a ser inferior a 50%. Pico, expressa o trimestre anterior, caso a probabilidade de recessão passa a ser superior (ou igual) a 50%. Os resultados são similares aos encontrados na Tabela 3, porém, o foco da Tabela 4 é computar a persistência, ou de modo análogo, a sobrevivência em cada regime.

Tabela 4: Cronologia dos ciclos através das probabilidade suavizada do modelo com mudança de regime

PIB Trimestral		Permanência			
Vale	Pico	Expansão	Recessão	Ciclo	
		Vale Pico	Pico Vale	Pico Pico	Vale Vale
1° Trim./1980*	4° Trim./1980	3*	-	3*	-
4° Trim./1981	3° Trim./1982	3	4	7	7*
1° Trim./1983	2° Trim./1987	17	2	19	5
3° Trim./1987	2° Trim./1988	3	1	4	18
4° Trim./1988	3° Trim./1989	3	2	5	5
2° Trim./1980	3° Trim./1990	1	3	4	6
4° Trim./1990	3° Trim./1991	3	1	4	2
4° Trim./1991	3° Trim./2008	67	1	68	4
1° Trim./2009	1° Trim./2015	24	2	26	69
4° Trim./2015	2° Trim./2016*	2*	3	5	27
Média (9 Ciclos)		14	2	16	16

Nota: Esta tabela mostra a cronologia de recessão (expansão) com base nas probabilidades suavizadas. Os resultados são apresentados por meio da análise de picos e vales. Vale, refere-se ao trimestre anterior, caso a probabilidade de recessão passa a ser inferior a 50%. Pico, expressa o trimestre anterior, caso a probabilidade de recessão passa a ser superior (ou igual) a 50%. * indica que a permanência pode ser maior, pois a data de pico e vale é censurada, já que esses valores estão fora da amostra e não são conhecidos.

Com base nos resultados da tabela acima, uma maneira preliminar de investigar a hipótese de duração dependente é aplicando a abordagem clássica de duração, uma vez que esse tratamento originalmente usado na análise de sobrevivência pode ser aplicada de sobremaneira nos fatos aqui discutidos (ver, Castro 2013). Entre os diversos modelos empregados na análise de duração destaque é o modelo Weibull, particularmente, o interesse neste modelo decorre da função perda, que neste contexto, capta a taxa de permanência na recessão (expansão) no período t. Em outras palavras, essa função mede a probabilidade de deixar um determinado estado no período t condicionado a permanência naquele estado. A função perda do modelo Weibull é caracterizada pela expressão abaixo:

$$h(t) = \gamma\rho t^{\rho-1}, \tag{4}$$

em que $\gamma > 0$ e $\rho > 0$. O parâmetro, γ é uma constante e ρ parametriza a duração dependente. Se $\rho > 1$, a probabilidade condicional na troca de um estado aumenta se o estado corrente fica velho, ou seja, duração dependente positiva. Se $\rho < 1$, denota duração dependente negativa. Por fim, se $\rho = 1$ não existe duração dependente. Em resumo, o valor da estimativa do parâmetro ρ é fundamental para validar a presença da duração dependente na recessão e expansão (detalhes ver apêndice B).

O modelo pode ser estimado pelo princípio da máxima verossimilhança. A função de log-verossilinhança para a amostra $i = 1, ..., n$ de permanência (*spells*) na recessão (expansão) é dado por:

$$lnL(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i(ln\rho - \rho ln\beta + (\rho - 1)lnt_i) - (\frac{t_i}{\beta})^{\rho} \right] \tag{5}$$

em que $\beta = (\frac{1}{\gamma})^{\rho}$ e c_i indica se o dado é censurado[9]. Essa é a estrutura básica da log-verossimilhança do modelo Weibull usado para investigar a presença de duração dependente com base no série de permanecia na recessão (expansão) oriunda das probabilidades do modelo com mudança de regime.

As estimativas do modelo Weibull são apresentadas na Tabela 5. O parâmetro ρ mede a magnitude da duração dependente e β é o termo constante. O desvio-padrão e sua versão bootstrap são reportados individualmente seguido cada estimativa do parâmetro. No caso do desvio-padrão bootstrap foram reamostradas 1000 observações com reposição para contornar problemas com relação o tamanho da amostra. A significância estatística da estimativa do parâmetro ρ é computada com base no desvio-padrão bootstrap para garantir maior precisão na análise dos resultados.

Tabela 5: Estimativas do modelo Weibull

Parâmetros	Recessão	Expansão
β	2.3943 (0.3670)	11.8324 (5.3515)
ρ	2.2994* (0.6005) [0.6580]	0.7724+ (0.1836) [0.2363]
$\ln L$	-12.2162	-32.0756

Nota: Esta tabela apresenta as estimativas do modelo Weibull para série de permanência na recessão (expansão), com base nas probabilidades suavizadas do modelo sem duração dependente. O valor em parêntese é o desvio-padrão e o valor em colchete é o desvio-padrão bootstrap. $^+$ indica que ρ é estatisticamente maior que 1, teste unicaudal ao nível de 5% de significância. * indica que ρ é estatisticamente diferente de zero ao nível de 5% de significância. $\ln L$ é o valor da log-verossimilhança.

[9] O dado é censurado ($c_i = 0$) se a amostra do período termina antes que um ponto de reversão seja observado, quando o ponto de reversão é observado na amostra os dados não são censurados ($c_i = 1$).

Segundo as estimativas da tabela acima, na recessão, a estimativa do parâmetro ρ é 2.2994 e é estatisticamente maior que 1 ao nível de 5% de significância. Esse resultado indica duração dependente positiva, ou seja, a probabilidade de sair da recessão aumenta em função do número de períodos na recessão. Na expansão, a estimativa do parâmetro ρ é 0.7724 e é estatisticamente diferente de zero ao nível de 5% de significância. Esse resultado indica duração dependente negativa, ou seja, a probabilidade de ficar na expansão aumenta em função do número de períodos na expansão.

Modelo com mudança de regime e duração dependente

Os resultados da Tabela 6 mostram as estimativas dos parâmetros do modelo com mudança de regime e duração dependente. Os valores das médias e da variância são estatisticamente significantes e em linha com as estimativas do modelo com mudança de regime sem duração dependente, além disso, o valor da verossimilhança não muda abruptamente em relação ao modelo anterior. Em relação a duração dependente, as estimativas destes coeficientes foram estatisticamente significantes e indicam que a duração dependente é positiva na recessão ($\gamma_2(0)$= -1.05) e negativa na expansão ($\gamma_2(1)$= 0.29). Os resultados estão de acordo com as estimativas preliminares obtidas através do modelo Weibull, isto é, a probabilidade de mover-se da recessão para expansão aumenta em função do número de trimestres na recessão, já a probabilidade mover-se da expansão para recessão não aumenta em função do número de trimestres na expansão.

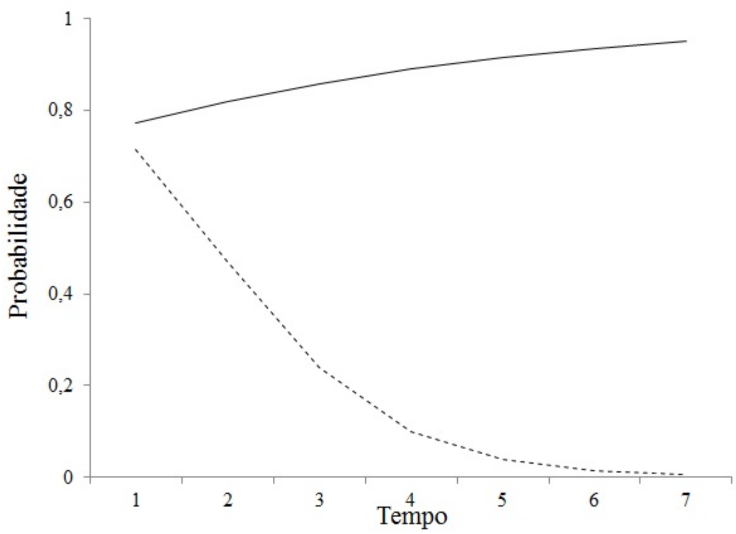
Tabela 6: Estimativas do modelo com mudança de regime e duração dependente

Parametros	Estimativa	Desvio-Padrão
μ_0	-2.1422^{***}	0.5357
μ_1	0.9928^{***}	0.1424
σ^2	1.9928^{***}	0.4520
$\gamma_1(0)$	1.9684^{*}	1.5816
$\gamma_2(0)$	-1.0484^{*}	0.8271
$\gamma_1(1)$	0.9369	0.8247
$\gamma_2(1)$	0.2886^{**}	0.1632
τ	7	
$\ln L$	-282.9580	

Nota: Esta tabela apresenta os parâmetros estimados do modelo com mudança de regime e duração dependente para PIB brasileiro com frequência trimestral entre o período de 1980 e 2016. $\ln L$ é o valor da log-verossimilhança e ***,**,* indicam significância aos níveis de 1%, 5% e 10%, respectivamente.

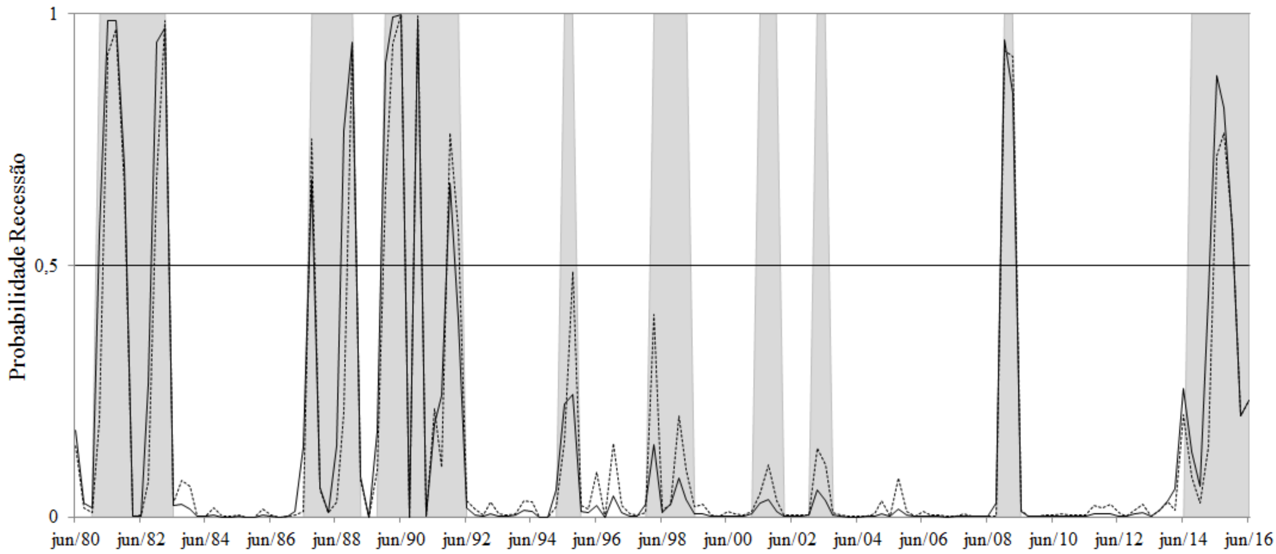
A figura a seguir retrata e efeito da duração dependente por meio da função de transição de probabilidade. A linha pontilhada representa a probabilidade de ficar na recessão e a linha contínua denota a probabilidade de ficar na expansão. Nota-se que a probabilidade de ficar na recessão cai gradativamente ao longo dos trimestres, ou seja, a probabilidade de mover-se da recessão para expansão aumenta em função do tempo (duração dependente positiva). No caso oposto, a probabilidade de ficar na expansão aumenta gradativamente ao longo dos trimestres, ou seja, a probabilidade de mover-se da expansão para recessão não aumenta em função do tempo (duração dependente negativa). Esses resultados foram de acordo com as evidências internacionais e se baseiam na seguinte interpretação econômica. Na recessão, espera-se que os formuladores de política econômica empreguem medidas anticíclicas para atenuar o efeito da crise. Sendo assim, presume-se que ao longo dos trimestres estas medidas ganhem envergadura e influenciem positivamente a probabilidade de sair da recessão. Por outro lado, é intuitivo pensar na probabilidade crescente de ficar na expansão, já que isso retrata a ideia de crescimento sustentado, porém, caso a expansão seja curta, maior a fragilidade de retornar à recessão. Após 7 trimestres a probabilidade de mudar de regime é tempo invariante e esse valor é representado pelo parâmetro τ, que foi calibrado com base no valor da maximização da função de verossimilhança. Este procedimento baseou-se na avaliação de diversos modelos, sendo que o conjunto de valores para τ variou entre 5 e 25.

Figura 2: Transição de probabilidade: recessão (linha pontilhada), expansão (linha continua)



Por fim, os resultados referentes à identificação de recessões (expansões) mostram que análise anterior se mantêm. A Figura 3 apresenta as probabilidades filtradas e suavizadas do modelo com duração dependente frente à datação de ciclos econômicos da Fundação Getúlio Vargas. Usando o critério de recessão, isto é, probabilidade suavizada superior (ou igual) a 50%, o modelo capturou as mesmas recessões, 5 das 9, entre os anos 1980 e 2016, e o baixo ajuste entre os nos 1995 e 2003. Posto isso, a similaridade nestes resultados corroboram a ideia de que o modelo com duração pode ser visto como uma extensão direta do modelo originalmente proposto por Hamilton (1989). Todavia, o atrativo desta especificação decorre da inclusão do parâmetro que capta o efeito duração dependente conjuntamente com as probabilidades de recessão (expansão). Em ambos os modelos à hipótese da duração dependente foi confirmada, o que confirma que essa é uma característica dos dados, entretanto, a vantagem do modelo com mudança de regime e duração dependente frente o modelo Weibull, é que este último foi parametrizado usando as probabilidades do modelo com mudança de regime sem duração dependente, já o modelo com mudança de regime e duração dependente foi estimado em apenas um passo.

Figura 3: Probabilidades filtradas (pontilhado) e suavizadas (contínuo) X CODACE-FGV (região cor cinza)



4 Conclusão

As estimativas do modelo com mudança de regime e duração dependente foram estatisticamente significantes e em linha com o evidenciado na literatura internacional.[10] A parametrização proposta capturou a ideia que a probabilidade de se mover da recessão para expansão aumenta em função do número de períodos recessivos e, em contrapartida, a probabilidade de se mover da expansão para a recessão não aumenta em função do numero de períodos na expansão, isto é, a probabilidade de ficar na expansão aumenta no tempo. Assim, na recessão espera-se que os formuladores de política econômica empreguem medidas anticíclicas para atenuar o efeito da crise. Portanto, presume-se que ao longo dos trimestres estas medidas ganhem envergadura e influenciem positivamente a probabilidade de sair da recessão. Por outro lado, é intuitivo pensar na probabilidade crescente de ficar na expansão, já que isso retrata de maneira geral a ideia de crescimento sustentado, ou seja, caso a expansão seja curta, maior a fragilidade de retornar à recessão.

No que diz respeito à identificação de períodos de recessão (expansão), as probabilidades suavizadas do modelo com duração dependente foram similares à datação de ciclos econômicos divulgado pelo Comitê de Datação de Ciclos Econômicos da Fundação Getúlio Vargas. Os resultados mostraram que os modelos estatísticos capturaram os principais períodos recessivos, entretanto, uma característica evidenciada neste resultado é que as probabilidades são mais pronunciadas caso a recessão seja prolongada. Outro ponto importante que deve ser destacado é que as decisões do CODACE são tomadas com base na análise do conjunto mais abrangente de variáveis e estatísticas, como também, tomando o ponto de vista de seus membros, dessa forma, não é de se esperar que o modelo com mudança de regime e duração dependente seja extremante preciso quando comparado com esta cronologia de ciclos, contudo, o modelo estatístico não deixa de ser uma medida em tempo real, uma vez que o comitê divulga a datação de ciclos muito após a realização dos dados.

[10] Para mais detalhes, ver, por exemplo, Lam 2004.

Referências

Albert, J. H. & Chib, S. (1993), 'Bayes Inference via Gibbs Sampling of Autoregressive Time Series Subject to Markov Mean and Variance Shifts', *Journal of Business & Economic Statistics* **11**(1), 1.
URL: *http://www.jstor.org/stable/1391303?origin=crossref*

Burns, A. & Mitchell, W. (1946), 'Measuring business cycles', *NBER Book Series Studies in Business Cycles* **2**.

Castro, V. (2013), 'The portuguese stock market cycle chronology and duration dependence', *OECD Journal: Journal of Business Cycle Measurement and Analysis* **2013**(4), 1–23.

Castro, V. (2015), 'The Portuguese business cycle: chronology and duration dependence', *Empirical Economics* **49**(1), 325–342.
URL: *http://link.springer.com/10.1007/s00181-014-0860-4*

Chauvet, M. (2002), 'The brazilian business and growth cycles', *Revista Brasileira de Economia* **56**(1), 75–106.
URL: *http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/view/807*

Diebold, F. X. & Rudebusch, G. D. (1990), 'A nonparametric investigation of duration dependence in the american business cycle', *Journal of Political Economy* **98**(3), 596–616.
URL: *http://www.jstor.org/stable/2937701*

Diebold, F. X., Rudebusch, G. & Sichel, D. (1993), 'Further evidence on business cycle duration dependence', *NBER Chapters* pp. 255–284.
URL: *http://ideas.repec.org/h/nbr/nberch/7194.html*

Durland, J. M. & McCurdy, T. H. (1994), 'Duration-dependent transitions in a markov model of u.s. gnp growth', *Journal of Business & Economic Statistics* **12**(3), 279–288.
URL: *http://amstat.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07350015.1994.10524543*

Fisher, I. (1925), 'Our unstable dollar and the so-called business cycle', *Journal Journal of the American Statistical Association* **20**, 179–202.

Hamilton, J. D. (1989), 'A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle', *Econometrica* **57**(2), 357–384.
URL: *http://www.jstor.org/stable/1912559*

Harding, D. & Pagan, A. (2002), 'Dissecting the cycle: a methodological investigation', *Journal of Monetary Economics* **49**(2), 365–381.
URL: *http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304393201001088*

Kim, C.-J. & Nelson, C. R. (1998), 'Business Cycle Turning Points, A New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model With Regime Switching', *Review of Economics and*

Statistics **80**(2), 188–201.

URL: *http://www.mitpressjournals.org/doi/abs/10.1162/003465398557447*

Lam, P.-s. (2004), 'A markov switching model of gnp growth with duration dependence', *International Economic Review* **45**(1), 175–204.

URL: *http://doi.wiley.com/10.1111/j.1468-2354.2004.00121.x*

Layton, A. P. & Smith, D. R. (2007), 'Business cycle dynamics with duration dependence and leading indicators', *Journal of Macroeconomics* **29**(4), 855–875.

URL: *http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0164070407000298*

Maheu, J. M. & McCurdy, T. H. (2000), 'Identifying bull and bear markets in stock returns', *Journal of Business & Economic Statistics* **18**(1), 100–112.

URL: *http://www.jstor.org/stable/1392140*

McConnell, M. M. & Perez-Quiros, G. (2000), 'Output Fluctuations in the United States: What Has Changed Since the Early 1980's?', *American Economic Review* **90**(5), 1464–1476.

URL: *http://pubs.aeaweb.org/doi/10.1257/aer.90.5.1464*

Ozun, A. & Turk, M. (2009), 'A duration dependent regime switching model for an open emerging economy', *Journal for Economic Forecasting* (4), 66–81.

Pelagatti, M. M. (2001), 'Gibbs sampling for a duration dependent markov switching model with an application to the u.s. business cycle', *Quaderno di Dipartimento* (2).

Sichel, D. E. (1991), 'Business Cycle Duration Dependence: A Parametric Approach', *The Review of Economics and Statistics* **73**(2), 254.

URL: *http://www.jstor.org/stable/2109515?origin=crossref*

Valls Pereira, P. L. & Vieira, H. P. (2014), 'A study of the brazilian business cycles (1900 âĂŞ 2012)', *Brazilian Review of Econometrics* **33**(2), 123.

URL: *http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/bre/article/view/17176*

White, H. (1982), 'Maximum likelihood estimation of misspecified models', *Econometrica* **50**(1), 1–25.

Apêndice A: Função de verossimilhança do modelo com mudança de regime e duração dependente

Uma maneira de estimar os modelos com mudança de regime e duração dependente é fazer com que essa parametrização possa ser vista como um processo com mudança de regime markoviana de primeira ordem. Conforme demonstrado em Maheu & McCurdy (2000), o processo de estimação é semelhante ao filtro de Hamilton (1989). Para o modelo com dois estados, $S_t = i$, em que, $i = 0{,}1$ e p é a defasagem de y_t, uma maneira de retratar isso é definindo uma nova variável latente $\mathcal{S}_t$ que engloba todas as possibilidades de trajetórias históricas de S_t até S_{t-p}, juntamente com a respectiva duração da sequência atual de estados. Dessa forma, é possível definir a nova variável de estado como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_t &= 1, \quad \text{se} \quad S_t = 1, S_{t-1} = 0, S_{t-2} = 0, ..., S_{t-p} = 0, D(S_t) = 1, \\
\mathcal{S}_t &= 2, \quad \text{se} \quad S_t = 1, S_{t-1} = 1, S_{t-2} = 0, ..., S_{t-p} = 0, D(S_t) = 2, \\
\mathcal{S}_t &= 3 \quad \text{se} \quad S_t = 1, S_{t-1} = 1, S_{t-2} = 0, ..., S_{t-p} = 1, D(S_t) = 2, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
\mathcal{S}_t &= N \quad \text{se} \quad S_t = 0, S_{t-1} = 0, S_{t-2} = 0, ..., S_{t-p} = 0, D(S_t) = \tau.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(7)

Os valores assumidos por essas variáveis buscam caracterizar todas as combinações na estrutura dependente dos dados até a ordem τ, neste caso, o número total das combinações é dado por $N = 2^{p+1} + 2(\tau - p - 1)$.

Seja ξ_t um vetor aleatório de dimensão $(N \times 1)$, então:

$$
\xi_t = \begin{cases}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}', & \text{quando} \quad \mathcal{S}_t = 1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}', & \text{quando} \quad \mathcal{S}_t = 2, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}', & \text{quando} \quad \mathcal{S}_t = 3, \\
\qquad \vdots & \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}', & \text{quando} \quad \mathcal{S}_t = N.
\end{cases}
\tag{8}
$$

Define-se $\hat{\xi}_{t|t-1}$, o vetor em que o i-ésimo elemento é $P(\mathcal{S}_t = i | y_{t-1}, \dots, y_1, \theta)$, e θ representa os parâmetros de $P(\mathcal{S}_t = i|\cdot)$, isto é, a probabilidade de predição do estado i condicionado em $(\cdot)$. $\hat{\xi}_{t|t}$ é um vetor em que o i elemento é dado por $P(\mathcal{S}_t = j | y_t, \dots, y_1, \theta)$, ou seja, a probabilidade filtrada.[11]

[11] Para mais informações ver Hamilton (1989)

Para η_t o vetor em que o i-ésimo elemento é a densidade condicional de y_t, temos:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f(y_t|S_t = 1, y_{t-1}, \ldots, y_1, \theta) \\ f(y_t|S_t = 2, y_{t-1}, \ldots, y_1, \theta) \\ \vdots \\ f(y_t|S_t = N, y_{t-1}, \ldots, y_1, \theta) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Assume-se que P é a matriz de transição de probabilidade de S_t, tal que:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

onde $p_{j_a j_b} = P(S_t = j_b|S_{t-1} = j_a),\ j_a, j_b = 1, \ldots, N$.

A probabilidade filtrada $\hat{\xi}_{t|t}$ para $t = 1, \ldots, T$ pode ser obtida através do seguinte par de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t}{1'(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)} &= \hat{\xi}_{t|t} \\ \hat{\xi}_{t+1|t} &= P\hat{\xi}_{t|t}. \end{aligned} \tag{11}$$

A iteração das equações em (11) começa em $t = p+1$, dado $y_1, \ldots, y_p$, em que $\odot$ significa multiplicação elemento por elemento entre os vetores. Para inicializar as equações acima, o valor inicial $\hat{\xi}_{p+1|p}$ é a probabilidade incondicional, isto é, estamos considerando que a cadeia de Markov seja estacionária e ergótica.

Neste modelo, a função de log-verossimilhança é dada pela expressão:

$$L(\theta) = \sum_{t=p+1}^{T} \ln f(y_t|y_{t-1}, \ldots, y_1, \theta), \tag{12}$$

onde o termo do lado direito na equação acima é dado por:

$$f(y_t|y_{t-1}, \ldots, y_1, \theta) = 1'(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t). \tag{13}$$

Por fim, é importante salientar que o parâmetro τ visto na estrutura da transição de probabilidade, é calibrado em função do valor mais verossímil obtido na otimizado da função acima. Esse procedimento é baseado na avaliação de diversos modelos, neste caso, o conjunto de valores para τ vai ser baseada no valor máximo de $L(\theta)$.

Apêndice B: Análise de duração e o modelo Weibull

Análise de duração

Assume-se que a variável duração é definida como sendo o número de períodos (trimestres) de recessão (expansão). Seja T o tempo entre o incio é termino da recessão (expansão), t_1, $t_2, ..., t_n$ representam a amostras da duração observada. A distribuição de probabilidade da variável duração, T, pode ser estabelecida pela função de distribuição acumulada $F(t) = Pr(T < t)$, e pela função de densidade de probabilidade é $f(t) = dF(t)/dt$. Alternativamente, a distribuição da variável T pode ser caracterizada pela função sobrevivência (*survivor function*) $S(t) = Pr(T \geq t) = 1 - F(t)$, em que captura a probabilidade de que a duração seja maior que ou igual a t.

Uma função importante na análise de duração é a função perda (*hazard function*), tal como:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{14}$$

em que mede a taxa de permanência da recessão (expansão) terminar na data t, dado que sua duração foi até aquele momento. Em outras palavras, mede a probabilidade de deixar um respectivo estado em t condicionado na permanência daquele estado. Essa função ajuda caracterizar a trajetória da duração dependente. Por exemplo; (i) se $dh(t)/dt > 0$ para $t = t^*$ existe duração dependente positiva em t^*. No caso, $dh(t)/dt < 0$, existe duração dependente negativa em t^*. Por fim, $dh(t)/dt = 0$ para $t = t^*$ não existe duração negativa. Desta forma, quando a derivada da função perda em relação ao tempo for positiva, a probabilidade de recessão ou expansão acabar em t, dado que mesma atingiu $t = t^*$ aumenta com sua idade, assim sendo, quando mais longa for a recessão ou expansão, maior será a probabilidade condicional de que ocorrera seu fim. Por fim é importante destacar que data a função perda, pode-se integrar a mesma, tal como:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du \tag{15}$$

e computar a função de sobrevivência, tal como mostrado pela equação abaixo:

$$S(t) = exp[-H(t)]. \tag{16}$$

Modelo Weibull

O modelo Weibull é caracterizado pela seguinte função perda, tal como:

$$h(t) = \gamma\rho t^{\rho-1}, \tag{17}$$

em que ρ parametriza a duração dependente, t denota o tempo de premanencia na recessão (expanssão), ou seja, representa a variável de duração e γ é uma constante, tal que, $\rho > 0$ e $\gamma > 0$. Se $\rho > 1$, a probabilidade condicional de troca de estado aumenta se com permanência neste estado, ou seja, duração dependente positiva. Se $\rho < 1$, existe duração dependente negativa. Por fim, se $\rho = 1$ não existe duração dependente. Substituindo a equação (16) na equação (14), temos a função sobrevivência abaixo:

$$S(t) = exp[-\gamma t^{\rho}]. \tag{18}$$

Usando as equações, (16), (17) e (14), obtêm-se a densidade de probabilidade, tal como:

$$f(t/\gamma,\rho) = \gamma\rho t^{\rho-1} \cdot exp[-\gamma t^{\rho}], \tag{19}$$

ou de modo análogo,

$$f(t/\beta,\rho) = \frac{\rho}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\rho-1} exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\rho}\right) \tag{20}$$

em que, $\gamma = \frac{1}{\beta^{\rho}}$.

Por fim, o modelo pode ser estimando pelo principio da máxima verosimilhança para a amostra de permanência de recessão (expansão), $i = 1, ..., n$, tal como:

$$lnL(\cdot) = \sum_{i=1}^{n}\left[c_i(ln\rho - \rho ln\beta + (\rho-1)lnt_i) - \left(\frac{t_i}{\beta}\right)^{\rho}\right] \tag{21}$$

em que, $\beta = (\frac{1}{\gamma})^{\rho}$ e c_i aponta se o dado é censurado, isto é, $c_i = 0$ indica se a amostra do período termina antes que um ponto de reversão seja observado, já no caso em que o ponto de reversão é observado na amostra os dados não são censurados, $c_i = 1$. Essa é a estrutura básica da log-verossimilhança do modelo Weibull usado para investigar a presença de duração dependente na recessão (expansão) com base na amostra no tempo de permanência na recessão (expansão).