

Regressão Quantílica e VaR: Uma Aplicação de Quantis Condicionais Extremos para os Retornos Relativos ao IBOVESPA e Petrobrás

Ana Katarina Campêlo ^{*}, Wilton Bernardino da Silva [†], Renan Oliveira Regis [‡],
Rafael Moura Azevedo [§]

12 de julho de 2017

Resumo

Análises de risco têm recebido uma atenção substancial em Economia e Finanças ao ser o foco de uma vasta literatura neste campo. O principal foco deste trabalho é aplicar a teoria e os métodos de quantis extremos na avaliação de fatores correlacionados à gestão de risco em duas séries do mercado financeiro brasileiro (IBOVESPA e Petrobrás). A principal metodologia utilizada é proposta por Chernozhukov & Du (2006), que descreve técnicas de estimação para quantis extremos condicionais, tendo como base a regressão quantílica (Koenker & Bassett, 1978). A atratividade desse método reside no fato de que ele estima diretamente os quantis extremos condicionais, os quais representam as estimativas do VaR. Além disso, a metodologia permite a verificação de quais variáveis correlatas afetam esta estatística em particular. Finalmente, o índice de cauda pode ser calculado, dando uma idéia da probabilidade de ocorrência desses eventos extremos. Desta forma, o artigo objetiva destacar a importância da aplicação desta técnica levando em consideração às série de dados financeiros brasileiros. Os resultados adquiridos com o uso do bootstrap extremo atestam que a regressão quantílica aplicada à quantis extremos fornece previsões precisas de VaR.

Palavras-chave: regressão quantílica, teoria do valor extremo, valor em risco.
Código JEL: C61, C68, E62.

Abstract

Risk analysis has received a substantial amount of attention in Economy and Finances by being the focus of a vast literature in this field. The main of this paper is to apply the theory and methods of extreme quantiles in the evaluation of correlated factors and risk management in two series of the Brazilian financial market (IBOVESPA and Petrobrás). The main methodology used was developed by Chernozhukov & Du (2006), which proposes estimative techniques of the conditional extremal quantiles, having as a base the Quantile regression (Koenker & Bassett, 1978). The attractiveness for such method lies on the fact that it directly estimates the conditional extremal quantiles, which represents the VaR estimatives. Additionally, the methodology allows the verification of which correlated variables affects this statistic in particular. Finally, the tail index of conditional exchange rate of the series can be calculated, giving us an idea of

^{*}anakcampelo@gmail.com

[†]wiltonrecc@gmail.com

[‡]renan.economia@hotmail.com

[§]rafael.moura.a@gmail.com

the probability of such extreme events occurrence. On this way, the paper targets to highlight the importance of applying this technique taking into consideration the series of Brazilian data. The acquired results from the extremal bootstrap method attest that the extremal quantile regression applied to extreme quantiles provide precise predictions of VaR.

Keywords: quantile regression, theory of extreme values, value at risk.
JEL code: C61, C68, E62.

1 Introdução

A mensuração e gerenciamento dos riscos envolvidos em negociações financeiras têm motivado pesquisadores a proporem conceitos e métodos que resultem em indicadores capazes de prever e quantificar quão arriscada é uma decisão de investimento. Nesse intuito, foi desenvolvido o conceito de Valor em Risco (VaR) (Roy, 1952), visando gerenciar os riscos envolvidos em transações financeiras, em especial quantificar as grandes perdas e chances de ocorrência das mesmas. A medida de VaR tem sido bastante empregada no mercado financeiro, auxiliando no controle e regulamentação de aspectos associados ao gerenciamento de riscos pelos agentes econômicos. Em muitas análises, dada uma informação a priori, utiliza-se a medida de VaR com o intuito de prever e explicar os quantis extremos da distribuição dos retornos de uma carteira de ativos (portfólio)¹, os quais ficam condicionados a um conjunto de variáveis regressoras (Chernozhukov & Umantsev, 2001). O VaR modelado dessa forma possui propriedades que o deixam com vantagens significativas relativamente às modelagens usuais, sendo capaz de quantificar os riscos com maior precisão e menor complexidade computacional.

Os métodos de estimação do VaR mais usuais e difundidos na literatura são os paramétricos e utilizam a hipótese de que os dados possuem certa distribuição condicional (Bollerslev, 1986; Longstaey & More, 1995). Porém, tais métodos podem subestimar o verdadeiro VaR sob elevada ocorrência de perdas extremas. Posteriormente, surgem os modelos que não necessitam definir previamente a distribuição da série de retornos (Chernozhukov & Umantsev, 2001; Engle & Manganelli, 2004; Adrian & Brunnermeier, 2011). Estes métodos são semi-paramétricos e tendem a apresentar maior precisão que os anteriores. Por fim, existem técnicas cuja metodologia se insere no arcabouço da teoria dos valores extremos (TVE) e se encontram em Monteiro et al. (2002) e Carvalhal da Silva & Mendes (2003).

Outra medida utilizada na mensuração dos riscos em finanças é o *Expected Shortfall* (ES), também chamado de *conditional Value-at-Risk* (CVaR), proposto por Rockafellar & Uryasev (2000). A diferença entre o VaR (que usa a probabilidade condicional) e o ES é que este é definido como a perda esperada quando o VaR é violado, ou seja, dado que as perdas superam o VaR, tem-se no ES a esperança condicional das perdas extremas (acima do VaR).

Uma grande vantagem da utilização do ES é que este é uma medida de risco coerente (Ibragimov & Walden, 2007). Nesse sentido, medidas de risco coerentes atendem às propriedades: (i) subaditividade (o valor da medida de risco não pode ser superior à soma das medidas de risco de sub-portfólios); (ii) homogeneidade (a medida é proporcional à escala do portfólio); (iii) monotonicidade (se uma carteira A de ativos possui retornos não inferiores aos de um portfólio B, então o risco associado a A não deve superar o de B); e (iv) translação invariante (a medida de risco não muda sob mudanças apenas em parâmetros de locação). É importante ressaltar que o VaR nem sempre satisfaz a subaditividade, porém, há vários casos em que a medida VaR é subaditiva (sob normalidade dos retornos, por exemplo), o que a torna uma medida de risco bastante atrativa em virtude da maior facilidade computacional em estimá-la.

¹Um portfólio em finanças é uma carteira de investimentos mantida por uma instituição ou indivíduo. Para uma descrição detalhada de portfólio (ASSAF, 2011).

A regressão quantílica para valores extremos (Chernozhukov & Du, 2006), como modelo de base para a estimação do VaR, tem despertado grande atenção às pesquisas acadêmicas internacionais, sendo utilizada com sucesso em diversas áreas aplicadas, porém ainda de forma incipiente na literatura brasileira. A maioria dos métodos existentes para o cálculo do VaR estima a distribuição dos retornos e, em seguida, recupera seu quantil de forma indireta. Nesse sentido, a regressão quantílica apresenta vantagens, pois possibilita a estimação direta de qualquer ponto da distribuição condicional da variável resposta, Y (retornos), dado um conjunto de covariáveis, X , não restringindo-se às estimativas de medidas centrais. O método pode ser utilizado como base para a obtenção de estimativas VaR associadas a quantis condicionais extremos, em particular àqueles pertencentes à cauda esquerda da distribuição dos retornos considerados em análise. Além disso, a técnica permite averiguar os fatores correlatos ao risco, determinantes no cálculo do VaR. Portanto, há um grande potencial para aplicação dessa teoria e métodos a diversas e interessantes análises empíricas em economia e finanças.

Toda modelagem que tem como base a regressão quantílica possui ainda outras propriedades atrativas, tais como: (i) não necessita de especificação paramétrica de uma distribuição (i.e., *distribution free*), sendo classificada como um método semi-paramétrico, ou seja, não requer uma parametrização prévia da distribuição condicional do erro associado ao modelo; (ii) possibilita a estimação de qualquer quantil condicional da variável dependente, oferecendo assim uma visão mais global da relação entre esta variável e as demais covariáveis; (iii) fornece estimativas dos parâmetros com propriedades desejáveis, ou seja, as mesmas são consistentes (i.e., as estimativas dos parâmetros convergem em probabilidade para seus valores populacionais em amostras grandes).

Por conseguinte, técnicas econométricas baseadas na regressão quantílica fornecem boas estimativas dos parâmetros (i.e., precisas e eficientes), tanto pontuais quanto intervalares, além de possibilitarem adequada inferência quanto à estimação e ajuste do modelo, bem como a utilização do mesmo para fins de previsão.

O presente trabalho objetiva estimar o VaR condicionado a uma matriz de variáveis explicativas X , tendo como base a regressão quantílica e tendo ênfase nos valores extremos. A pesquisa tem foco nos retornos do índice Bovespa e das ações ordinárias da Petrobrás, as quais são consideradas como variáveis de interesse. Com esse propósito, busca-se identificar quais fatores de risco impactam a variável de interesse. Adicionalmente, utilizar-se-á o índice de cauda para estimar quantis ainda mais extremos, por meio de técnicas de extrapolação baseadas em bootstrap. A pesquisa mostra-se também relevante para áreas de conhecimentos afins, para as quais análises de risco são igualmente necessárias. Ademais, este estudo complementa a literatura nacional ao utilizar metodologia mais sofisticada para a estimação do VaR, fornecendo estimativas mais completas e globais, ao incorporarem os efeitos de características do mercado financeiro brasileiro.

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 dedica-se à revisão bibliográfica da literatura nacional e internacional. Na Seção 3 é descrita a metodologia. A Seção 4 apresenta os resultados do trabalho. Por fim, na Seção 5 expõem-se as considerações finais da pesquisa.

2 Revisão Bibliográfica

Um dos primeiros teóricos na tentativa de mensurar riscos buscando estimativas de perdas potenciais em um portfólio foi Francis Edgeworth em 1888, seguido por Dickson H. Leavens em 1945, que menciona pela primeira vez o termo VaR em um estudo analisando riscos em uma carteira de ativos incluindo títulos públicos. Em 1952 Harry Markowitz introduz a teoria do portfólio e, três meses depois, Arthur D. Roy propõe os primeiros indicadores VaR.

O período compreendido entre as décadas de 1970 e 1980 é marcado pelos mercados apresentando-se mais voláteis e as empresas mais alavancadas. Por outro lado, o desenvolvimento tecnológico

possibilita a implementação de novos recursos para o cálculo do VaR. Em 1988, o Comitê de Basileia² publica uma série de exigências de capital mínimo³, que devem ser atendidas por bancos comerciais, para precaução relativa a risco de crédito⁴. Estas exigências passam a ser adotadas pelos países do G-10, e passam a ser conhecidos como acordo de Basileia de 1988.

Na década de 1990 os computadores já eram capazes de realizar as análises mais complexas de Markowitz (1959) e outros métodos já existentes do VaR. Um documento técnico publicado por J.P. Morgan em 1994 introduzia um sistema de gestão de riscos denotado por RiskMetricsTM, o qual descreve um método computacional de cálculo do VaR para um portfólio. Em 1996, o Comitê de Basileia acrescenta uma emenda que incluir as chances de ocorrência de risco de mercado⁵. Esta emenda aumenta o capital mínimo que os bancos precisam deter para cobrir os riscos de mercado e este requisito é o maior valor entre o VaR do dia anterior e o VaR médio ao longo dos últimos 60 dias, multiplicado por um fator definido pela autoridade reguladora com limite mínimo de 3. Após o acordo de Basileia há um crescente desenvolvimento de técnicas de mensuração do VaR.

Uma forma de classificar os modelos do VaR é distinguindo-os entre modelos não paramétricos, paramétricos e semi-paramétricos. No caso não paramétrico, a distribuição de probabilidade dos retornos é obtida empiricamente, não havendo especificação a priori. Um exemplo de modelagem desse tipo é a simulação histórica (HS), porposta por Roy (1952), onde se calcula o α -quantil ($\alpha \in (0, 0.1)$) da distribuição dos retornos a partir dos dados históricos. Os modelos classificados como paramétricos necessitam assumir uma distribuição para os dados e, através desta suposição, realizar a estimação dos parâmetros e, em seguida, estimar o VaR pelo α -quantil da distribuição estimada. Para esses casos, é bastante usual utilizar a distribuição normal e estimar seus parâmetros de média e variância. Os modelos heterocedásticos autoregressivos ARCH e GARCH (Bollerslev, 1986; Engle, 1982) são também paramétricos. Nestes, a distribuição condicional dos retornos é suposta ser gaussiana. Há também modelos paramétricos que assumem o padrão *Student-t* para a distribuição condicional dos retornos (modelos tARCH e tGARCH). Por fim, existe a modelagem semi-paramétrica como, por exemplo, o modelo CAViaR (Engle & Manganelli, 2004), que utiliza a regressão quantílica na estimação do VaR.

Em uma aplicação da regressão quantílica, Chernozhukov & Umantsev (2001) utilizam métodos econométricos e o conceito de VaR a fim de prever o risco de uma grande empresa de petróleo americana. Com esse propósito, os autores estimam quantis extremos condicionais, obtendo também regiões de confiança para o VaR, concluindo que a natureza semi-paramétrica e flexível do modelo é importante para avaliar os riscos de mercado com precisão. Também nessa linha de pesquisa, Chernozhukov & Du (2006) desenvolvem uma metodologia de mensuração do VaR para valores extremos (*extremal quantile regression*). Nesse trabalho, os autores propõem diversas técnicas de estimação de quantis extremos e revisam algumas questões abordadas em Chernozhukov & Umantsev (2001). Na aplicação feita pelos autores, além de estimar o VaR, aplica-se o estimador de Hill et al. (1975) na obtenção do índice de cauda. Após a caracterização das caudas dos retornos, quantis muito extremos são estimados através dos métodos de extrapolação propostos. Segundo os autores, há grandes oportunidades para novos desenvolvimentos teóricos e empíricos utilizando essa abordagem metodológica.

Monteiro et al. (2002) utiliza uma abordagem designada de VaR-X condicional aplicada em dados do mercado financeiro português. Este método estatístico faz parte da teoria dos valores extremos (TVE). A medida condicional utilizada pelos autores leva em consideração a volatilidade condicional, permitindo verificar se esta captura algum risco de perda adicional, o qual, segundo os autores, seria relevante durante períodos de instabilidade financeira. Os mesmos concluem que, comparadas às

²O Comitê de Basileia é uma organização que incorpora autoridades de supervisão bancária e é constituído por representantes dos bancos centrais de 27 países.

³O capital mínimo é o capital total que a supervisionada deverá manter para operar.

⁴Risco de crédito surge quando o tomador ou contraparte não são capazes de cumprir com as suas obrigações contratuais.

⁵Risco de mercado decorre de movimentos dos níveis ou nas volatilidades dos preços de mercado.

previsões obtidas através da metodologia RiskMetrics, as previsões fornecidas pela nova abordagem são capazes de captar o risco de perda adicional com maior precisão. Carvalhal da Silva & Mendes (2003), por sua vez, utilizam a TVE para analisar séries provenientes de dez mercados de ações asiáticos, identificando qual tipo de distribuição assintótica melhor se adequa aos modelos que estimam valores extremos a partir de séries financeiras nesses mercados. Os testes estatísticos indicam que as distribuições dos retornos não se caracterizam por distribuição normal e que os mínimos e os máximos das séries dos retornos podem ser modelados pelos valores extremos. Ademais, os resultados indicam que o tempo médio de espera para um índice apresentar um retorno abaixo (acima) de um limite específico é geralmente maior para os países asiáticos desenvolvidos do que para os emergentes da Ásia. Também são obtidas estimativas do VaR usando a TVE, as quais são comparadas com os resultados do VaR empírico e normal. Os resultados sugerem que o método de valor extremo utilizado para realizar a estimação do VaR é uma abordagem mais conservadora para determinar as necessidades de capital do que os métodos tradicionais.

Engle & Manganelli (2004) propõem uma forma de mensuração de risco baseada em regressão quantílica (Koenker & Bassett, 1978), a qual recebeu o nome de Valor em Risco Auto-Regressivo Condicional (CAViaR). Nessa metodologia, propõe-se uma modelagem direta dos quantis da distribuição dos retornos de um portfólio, não havendo, portanto, hipóteses subjacentes relativas à distribuição. O modelo CAViaR permite a mensuração do risco de um investimento baseada em uma especificação que possibilita a estimação dos quantis condicionais com variáveis explicativas auto-regressivas, fazendo uso da técnica de regressão quantílica. As aplicações evidenciam a capacidade do modelo CAViaR de se adaptar a novos ambientes de riscos. Por fim, os resultados indicam que o comportamento das caudas pode ser diferente do restante da distribuição. Santos (2006), por sua vez, analisa o modelo CAViaR para medir os riscos de investimentos nos casos dos índices brasileiros (IBOVESPA e Petrobrás). Este modelo permite a modelagem da série por meio de um processo auto-regressivo condicional, além de permitir uma avaliação mais precisa da qualidade de ajuste deste. Em adição, no intuito de verificar a precisão das estimativas dos parâmetros, os autores realizam uma simulação de Monte Carlo, a partir da qual conclui-se que a mesma está relacionada à escolha dos valores iniciais sugeridos para os parâmetros e que, na maioria das vezes, faz-se necessário considerar um grande número de vetores de estimativas iniciais.

Adrian & Brunnermeier (2011) utilizam regressão quantílica na estimação do VaR de grandes instituições financeiras americanas, condicionado à circunstância de que outras instituições estivessem em situação de risco. Essa nova medida é denominada CoVaR. Nas análises são utilizados dados de bancos comerciais, bancos de investimento e *Hedge Fund*⁶. Em específico, são usados retornos de ações de cinco bancos comerciais (Bank of America, Citibank, JPMorgan Chase, Wachovia e Wells Fargo), bem como os retornos das ações de cinco importantes bancos de investimento (Bear Stearns, Goldman Sachs, Lehman Brothers, Merrill Lynch e Morgan Stanley), além dos retornos de diversos *Hedge Fund*. Os mesmos concluem que o aumento percentual do CoVaR relativamente ao VaR fornece informações sobre os excedentes de risco entre as instituições, sugerindo que as instituições financeiras devem informar os CoVaR's além dos VaR's e extrair as implicações para a gestão de riscos, regulação e risco sistêmico⁷. No entanto, posteriormente, Gropp et al. (2010) mostram que a abordagem do CoVaR proposta por Adrian & Brunnermeier (2009) negligencia as condições econômicas do ambiente financeiro e, portanto, não capta em termos de modelagem as intensidades das repercussão entre duas classes de ativos de forma adequada. Gropp et al. (2010) propõem um VaR de sensibilidade dependente do ambiente econômico (SDS-VaR), que mostra que o contágio varia consideravelmente em diferentes condições de mercado.

⁶*Hedge Fund* são fundos de investimentos que enfrentam menos regulamentação do que os demais fundos nos EUA.

⁷Segundo Kaufman et al. (2000), risco sistêmico refere-se ao risco de colapso de todo o sistema financeiro ou mercado, afetando amplamente a economia.

3 Metodologia

A presente seção discute o conceito de valor em risco e seus desdobramentos envolvendo as aplicações de regressão quantílica e a sua forma mais usual, utilizada, por exemplo, no método da simulação histórica. Adicionalmente, são discutidos tópicos da Teoria do Valor Extremo (TVE), bem como da abordagem econométrica desenvolvida por Chernozhukov & Du (2006), temas úteis ao entendimento da aplicação empírica descrita no Capítulo 4. Por fim, são descritos os testes de validação estatística (backtesting) para a modelagem VaR utilizada em pesquisa.

3.1 Valor em Risco

As instabilidades presentes nos mercados financeiros têm sido fonte de extensiva análise por parte de pesquisadores no intuito de prever e evitar perdas decorrentes das mesmas. A ocorrência de perdas significativas nestes mercados está, em geral, associada a eventos com probabilidade de ocorrência muito baixa, mas que são fonte de grande preocupação, por seus efeitos alarmantes e multiplicadores nas economias mundiais. Tais eventos acarretam ou tornam mais sérias as crises econômicas em períodos de recessão, podendo, inclusive, implicar na falência de importantes instituições internacionais e nacionais. Como exemplo mais recente, podemos citar a crise econômica ocorrida entre os anos de 2007 e 2009 que foi precipitada pela falência do tradicional banco de investimento americano Lehman Brothers, fundado em 1850. Em consequência, outras grandes instituições financeiras foram também conduzidas à falência, gerando uma crise econômica global cujos efeitos se estendem até os dias atuais.

Como uma medida bastante útil à gestão de riscos em mercados financeiros tem-se o VaR. Do ponto de vista de uma instituição financeira, este pode ser definido como sendo uma perda extrema em uma posição financeira considerando uma probabilidade baixa de ocorrência de perdas superiores ao nível definido pelo VaR (Jorion, 1997). A caracterização do VaR está relacionada com os quantis extremos da distribuição de probabilidade da variável financeira de interesse (por exemplo, os retornos de uma série de ativos financeiros).

O retorno (Y) de uma carteira de ativos é definido como sendo a variação do valor do ativo entre os instantes t e $t - 1$:

$$Y_t = \frac{v_t}{v_{t-1}} - 1 \approx \log(v_t) - \log(v_{t-1}), \quad (1)$$

em que v_t é o valor da carteira de ativos no instante de tempo t . A expressão no lado direito da equação (1) é denotado por (log) retorno.

Considerando uma variável aleatória Y e sua função de distribuição acumulada definida por $F_Y(y) = Pr(Y \leq y)$, o τ -quantil ($\tau \in (0, 1)$) da distribuição F_Y é definido como sendo o número $F_Y^{-1}(\tau)$ tal que $F_Y(F_Y^{-1}(\tau)) = \tau$, ou seja, $Pr(Y \leq F_Y^{-1}(\tau)) = \tau$. Desta forma, tem-se a função quantílica

$$F_Y^{-1}(\tau) = \inf\{y \in \mathbb{R}; F_Y(y) > \tau, \tau \in (0, 1)\}, \quad (2)$$

em que $\inf\{A\}$ denota o valor ínfimo do conjunto numérico A . Um τ -quantil é dito extremo quando $\tau \leq 0.15$ (quantis situados na cauda esquerda) ou $\tau \geq 0.85$ (quantis situados na cauda direita). O presente estudo tem foco nos quantis extremos inferiores, ou seja, na cauda esquerda da distribuição condicional da variável resposta.

Uma descrição do VaR, sob uma estrutura probabilística determinada a priori pode ser feita ao se supor que a distribuição dos retornos não está condicionada a um conjunto de regressores. Nesse sentido, sendo Y o (log) retorno da carteira de ativos durante o período de tempo considerado, define-se o VaR com probabilidade τ como sendo o valor (em %) tal que $\tau = Pr(Y < VaR)$. Dessa forma, tem-se que $VaR = F_Y^{-1}(\tau)$. Nesse caso, as perdas ocorrem para valores de $Y < 0$ (retornos negativos).

Em geral, F_Y^{-1} é desconhecida. Estudos de estimação do VaR são essencialmente relacionados

com a estimação de F_Y^{-1} e, especialmente, com o comportamento dos quantis situados na cauda esquerda da distribuição de Y . Partido-se da distribuição de Y , condicional a um vetor de variáveis explicativas ($X = (x_1, \dots, x_p)'$), define-se o τ -quantil condicional de $Y|X$ ($Q_\tau(Y|x)$) por

$$Q_\tau(Y|x) = \beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)x_1 + \dots + \beta_p(\tau)x_p + u, \quad (3)$$

sendo β_i , $i = 0, \dots, p$, os parâmetros do modelo e u a parcela associada ao erro aleatório.

As Seções seguintes são dedicadas a uma breve descrição da TVE, bem como das técnicas econométricas envolvendo a estimação de quantis extremos mediante a utilização da TVE e da regressão quantílica. A metodologia é proposta em Chernozhukov & Du (2006) e fornece a base teórica para o entendimento da presente pesquisa.

3.2 Teoria dos Valores Extremos

A Teoria dos Valores Extremos (TVE) tem como principal ênfase o estudo probabilístico de eventos ditos ‘raros’. Valores extremos de variáveis aleatórias podem ser caracterizadas por estatísticas de ordem extremas, máximos ou mínimos, ou até mesmo por excessos acima (ou abaixo) de valores limiares elevados (ou muito baixos). Os fundamentos da TVE baseiam-se em resultados referentes à distribuição assintótica de máximos e mínimos padronizados obtidos pela extração de uma amostra aleatória de $n \geq 2$ variáveis aleatórias i.i.d..

No que tange ao desenvolvimento da teoria, importantes resultados foram obtidos por Fréchet (1927), Fisher & Tippett (1928), Von Mises (1936) e Gnedenko (1943). Os primeiros desenvolvimentos dentro de uma ótica estatística foram propostos por Pickands III (1975). Diversas contribuições para o caso bivariado podem ser vistas em Gumbel & Lieblein (1954), Gumbel (1958), Oliveira (1962) e Sibuya (1959). Von Mises (1954) e Jenkinson (1955) propõem uma parametrização da distribuição de valores extremos, a qual ficou conhecida por distribuição generalizada dos valores extremos (GEV) e descreve a distribuição limite do mínimo (ou máximo), sendo parametrizada por um índice denotado por índice de cauda.

É importante ressaltar um dos principais resultados da TVE: as características e propriedades das distribuições de extremos aleatórios são determinadas pela forma da cauda (inferior ou superior) da distribuição comum às variáveis aleatórias consideradas. Considere $\{Y, Y_1, Y_2, \dots\}$ como sendo variáveis aleatórias contínuas, não-degeneradas⁸ e i.i.d, tendo função de distribuição comum representada por F_Y . Sejam $F_{F_Y}^+$ e $F_{F_Y}^-$ os limites superior e inferior do suporte da variável Y , respectivamente. Dessa forma, tem-se que $Y_{F_Y}^+ = \sup \{y \in \mathbb{R}; F_y(y) < 1\}$ e $Y_{F_Y}^- = \inf \{y \in \mathbb{R}; F_y(y) > 0\}$. Definem-se $M_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ e $m_n = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ como o máximo e o mínimo, respectivamente, de um conjunto contendo $n \geq 2$ variáveis aleatórias i.i.d. Estas variáveis estão relacionadas como segue

$$m_n = -\max(-Y_1, -Y_2, \dots, -Y_n). \quad (4)$$

Dada a relação de equivalência entre o máximo (M_n) e o mínimo (m_n), descrita na equação (4), pode-se trabalhar com um dos dois conceitos nos desenvolvimentos da TVE e, em seguida, transformar os resultados para o outro. Usualmente, os textos acadêmicos na área trabalham com o máximo (M_n) (Norberg, 1998). Visto que a aplicação empírica discutida no Capítulo 4 tem ênfase na cauda inferior da distribuição dos retornos, na discussão a seguir, são também descritos os principais resultados associados ao mínimo (m_n). As funções de distribuição exatas do máximo (M_n) e do mínimo (m_n), $n \geq 2$, podem ser obtidas pelas expressões seguintes

$$F_{M_n} = Pr(M_n \leq y) = [Pr(Y \leq y)]^n = [F_Y(y)]^n. \quad (5)$$

⁸Diz-se que uma variável aleatória é degenerada em $k \in \mathbb{R}$ quando esta assume o valor k com probabilidade um. Uma variável aleatória é dita ser degenerada se for degenerada em algum $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_{m_n}(y) &= Pr(m_n \leq y) = 1 - Pr(m_n > y) = 1 - Pr(Y_1 > y, \dots, Y_n > y) \\
&= 1 - [Pr(Y > y)]^n = 1 - [1 - Pr(Y < y)] = 1 - [1 - F_Y(y)]^n \\
&= 1 - [F_{-Y}(-y)]^n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Como pode-se observar nas equações (5) e (6), as distribuições do máximo (M_n) e do mínimo (m_n) dependem da distribuição F_Y . Tal distribuição é, em geral, desconhecida, o que implica que F_{M_n} e F_{m_n} também o são. Adicionalmente, quando $n \rightarrow \infty$, F_{M_n} e F_{m_n} tornam-se funções degeneradas.⁹ O teorema de Fisher & Tippett (1928) fornece um resultado sobre a convergência do máximo padronizado. Vale salientar que, com a devida modificação, o teorema pode ser utilizado para o mínimo (m_n)¹⁰.

Teorema 3.1 (Fisher-Tippett). *Seja $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, n \geq 2$, uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. tendo função de distribuição comum F_Y . Se for possível encontrar seqüências de números $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tais que a distribuição da variável aleatória $(M_n - d_n)/c_n$ converge para uma função limite H não degenerada à medida que $n \rightarrow \infty$, então a função H terá uma das três seguintes formas:*

$$Gumbel : H_1(y) = e^{-e^{-y}}, y \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$Frechet : H_2(y; \alpha) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ e^{-y^{-\alpha}}, & y \geq 0, \end{cases} \alpha > 0, \tag{8}$$

$$Weibull : H_3(y; \alpha) = \begin{cases} e^{-(-y)^\alpha}, & y < 0, \\ 1, & y \geq 0 \end{cases} \alpha > 0. \tag{9}$$

A derivação da distribuição limite de transformações lineares do máximo M_n (ou do mínimo) segue um desenvolvimento baseado na mesma idéia do Teorema do Limite Central (TLC), no qual o interesse reside em se determinar a distribuição assintótica de uma variável aleatória padronizada. No caso de extremos aleatórios de máximos, sendo $n \geq 2$, deseja-se conhecer a distribuição assintótica da variável aleatória $(M_n - d_n)/c_n$ para constantes apropriadas $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$. De forma mais geral, é importante saber quais classes de distribuições são assintoticamente válidas para a expressão do máximo (ou mínimo) padronizado. Tais distribuições são ditas ‘max-estáveis’ (Norberg, 1998).

Jenkinson (1955) e Von Mises (1954) propõem uma representação paramétrica generalizada para a forma funcional da distribuição de valores extremos, a qual é conhecida como *generalized extreme value distribution* (GEV). A GEV permite que os três tipos de distribuição (Gumbel, Fréchet e Weibull), descritos nas equações (7) a (9), possam ser vistos como membros de uma única família de distribuições, fazendo com que estas tornem-se um modelo contínuo e unificado. O parâmetro da GEV (ξ) é definido de forma que $\xi = 0$ corresponde à distribuição Gumbel, $\xi = \alpha^{-1} > 0$ corresponde à distribuição Fréchet e $\xi = -\alpha^{-1} < 0$ corresponde à distribuição Weibull (reversa). Considerando o máximo padronizado, a expressão da GEV é definida por

$$G_{max}(y; \xi) = \begin{cases} e^{[-(1+\xi y)^{-1/\xi}],} & \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-y}}, & \xi = 0 \end{cases}, \tag{10}$$

em que $1 + \xi y > 0$, se $\xi \neq 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se $\xi = 0$. A distribuição $G_{max}(y; \xi)$ pode ser reduzida às formas Gumbel, Fréchet e Weibull descritas nas equações (7) a (9) conforme a relações descritas a seguir

⁹O termo degenerado refere-se aos seguinte fatos: (1) $F_{M_n} \nearrow 1$ quando $y \rightarrow \infty$ e $F_{M_n} \searrow 0$ quando $y \rightarrow -\infty$; (2) $F_{m_n} \searrow 0$ quando $y \rightarrow -\infty$ e $F_{m_n} \nearrow 1$ quando $y \rightarrow \infty$

¹⁰Na prática, normalmente multiplica-se os dados por (-1) e analisa-se o mínimo que é o máximo dos dados trocados de sinal.

(Norberg, 1998):

$$\text{Gumbel: } H_1(y) \equiv G_{max}(y; 0), \quad (11)$$

$$\text{Fréchet: } H_2(y, \alpha) \equiv G_{max}(\alpha(y - 1); 1/\alpha), \quad (12)$$

$$\text{Weibull: } H_3(y, \alpha) \equiv G_{max}(\alpha(y + 1); -1/\alpha). \quad (13)$$

Com as devidas modificações, a forma generalizada para a distribuição do mínimo padronizado fica determinada por

$$G_{min}(y; \xi) = \begin{cases} 1 - e^{[-(1+\xi y)^{1/\xi}]}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-e^y}, & \xi = 0 \end{cases}, \quad (14)$$

em que $1 - \xi y > 0$ se $\xi \neq 0$ e $y \in \mathbb{R}$ se $\xi = 0$. Considerando a equação (14), quando $\xi = 0$, G_{min} converge para a forma Gumbel; quando $\xi < 0$ tem-se a distribuição Fréchet (reversa); e $\xi > 0$ representa a distribuição Weibull. O parâmetro ξ presente nas equações (10) e (14) é denotado por índice de cauda e seu valor absoluto mensura o peso nas caudas das distribuições G_{max} e G_{min} . Uma discussão detalhada sobre a Teoria dos Valores Extremos encontra-se em Norberg (1998).

Na estimação do índice de cauda (ξ), Chernozhukov & Du (2006) sugerem o uso dos estimadores propostos por Pickands III (1975) e Hill et al. (1975), cujas expressões são mostradas na subseção 3.3.2. A próxima Seção é dedicada a uma breve discussão das técnicas estatísticas desenvolvidas por Chernozhukov & Du (2006), que propõe o uso da regressão quantílica (Koenker & Bassett, 1978) na estimação do VaR. Essa metodologia está relacionada com a TVE e é o principal foco de aplicação para a presente pesquisa.

3.3 Regressão Quantílica e Valor em Risco

A metodologia desenvolvida por Chernozhukov & Du (2006) assume que a cauda esquerda da distribuição dos retornos (Y) comporta-se aproximadamente como uma função de potência.¹¹ Esse tipo de especificação (conhecida por ‘tipo Pareto’) é bastante comum em dados econômicos e inclui distribuições de caudas leves e pesadas, tendo suporte limitado ou não (Pareto, 1964). Desenvolvimentos relacionados à TVE e distribuições tipo Pareto podem ser vistos em Gnedenko (1943) e Haan (1970).

Segundo a modelagem econométrica proposta em Chernozhukov & Du (2006), dada a variável Y , define-se U como sendo identicamente igual a Y ($U \equiv Y$) se o suporte inferior de Y for $-\infty$ e $U \equiv Y - F_Y^{-1}(0)$ se esse suporte for finito. Dessa forma, tem-se que $F_U^{-1}(0) = -\infty$ ou $F_U^{-1}(0) = 0$. A hipótese de que a cauda esquerda da distribuição de U exibe comportamento tipo Pareto pode ser resumida pelas condições a seguir

$$F_U(u) \sim \bar{L}(u)u^{-1/\xi} \quad \text{sempre que } u \searrow F_U^{-1}(0), \quad (15)$$

$$F_U^{-1}(\tau) \sim L(\tau)\tau^{-\xi} \quad \text{sempre que } \tau \searrow 0, \quad (16)$$

em que $\xi \neq 0$ representa índice de cauda, \bar{L} e L são funções não paramétricas de variação suave ($L(\tau)$ constante, por exemplo) em $F_U^{-1}(0)$ e 0, respectivamente. Distribuições GEV_{max} (GEV_{min}) para as quais $\xi > 0$ ($\xi < 0$) são bastante utilizadas na modelagem de caudas pesadas. Como exemplos contemplando tal característica, têm-se as distribuições Pareto, t -Student e Burr. No caso da distribuição t , esta exibe caudas leves à medida que os seus graus de liberdade se aproximam de 30 (nesse caso, $\xi = 1/30$).

A proposta de Chernozhukov & Du (2006) é que os quantis extremos da distribuição de Y ,

¹¹Entende-se por função de potência toda função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(y) = y^n$, n sendo real não nulo.

condicionados ao vetor de variáveis explicativas $X = x$, sejam estimados pela seguinte forma linear

$$\hat{F}_{Y|X}^{-1}(\tau|X = x) = x'\hat{\beta}(\tau), \quad \tau \in (0, \eta], \quad (17)$$

em que $\eta \in (0, 1]$, e para todo x no suporte de X . A forma funcional descrita em (17), além de ser bastante conveniente computacionalmente, permite a obtenção de estimativas com propriedades assintoticamente desejáveis, sendo bastante flexível no sentido de que permite a inclusão de vários tipos de variáveis explicativas (funções de potência, splines¹² e diversas transformações de X). Na modelagem proposta por Chernozhukov (2005), supõe-se a existência de um vetor de parâmetros auxiliares ($\beta_e \in \mathbb{R}^{p+1}$) tal que a variável $U \equiv Y - X'\beta_e$ possui limite inferior (condicionado a $X = (x_1, \dots, x_p)'$) igual a 0 ou ilimitado ($-\infty$). Vale observar que, quando $Y|X$ tem limite inferior finito (ou seja, $\hat{F}_{Y|X}^{-1}(0) = x'\hat{\beta}(0) > -\infty$), então $\beta_e \equiv \beta(0)$, de modo que $U \equiv Y - X'\beta(0)$ tem limite inferior nulo por construção. No caso em que $X'\beta(0) = -\infty$, esta regressão não é adequada para ser utilizada como regressão auxiliar, mas a existência de qualquer outra regressão satisfazendo a relação $U \equiv Y - X'\beta_e$ é suficiente para validar o modelo.

A seguinte condição é também estabelecida: os quantis condicionais $F_{U|X}^{-1}(\tau|x)$, $\tau \in (0, \eta]$ devem ser tais que a relação abaixo é verificada para valores de x uniformemente distribuídos no suporte de X (Chernozhukov, 2005):

$$F_{U|X}^{-1}(\tau|x) = F_{Y|X}^{-1}(\tau|x) - x'\beta_e \sim L(\tau)\tau^{-\xi}, \quad \text{sempre que } \tau \searrow 0, \quad (18)$$

em que β_e representa o impacto das covariáveis sobre os quantis extremos e $L(\tau)$ é uma função não paramétrica de variação suave em 0. A equação (18) impõe que a cauda da distribuição de U tenha um comportamento em conformidade com a GEV_{min} , o qual ocorre uniformemente relativamente aos valores condicionais (Chernozhukov, 2005). Vale notar que essa suposição afeta apenas a região de cauda, permitindo que as covariáveis afetem os quantis extremos diferentemente dos quantis centrais. O parágrafo seguinte descreve o procedimento de estimação do vetor β_e , proposto por Koenker & Bassett (1978) e sugerido por Chernozhukov & Du (2006).

Dados T valores observados para X e Y , $\{Y_t, X_t\}_{t=1, \dots, T}$, Chernozhukov & Du (2006) sugerem que o estimador $\hat{\beta}(\tau)$ do vetor $\beta(\tau)$ seja tal que (Koenker & Bassett, 1978),

$$\hat{\beta}(\tau) = \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(Y_t - X_t'\beta), \quad (19)$$

em que $\rho_\tau(u) = \begin{cases} \tau u, & u \geq 0, \\ (\tau - 1)u, & u < 0. \end{cases}$, a função de desvio assimétrico absoluto (Fox & Rubin, 1964), sendo u tal que $F_{U|X}^{-1}(\tau|x) \sim L(\tau)\tau^{-\xi}$ sempre que $\tau \searrow 0$. Tem-se então o estimador $\hat{F}_{Y|X}^{-1}(\tau|x) = x'\hat{\beta}(\tau)$ para o τ -quantil condicional de Y .

Uma seqüência de quantis condicionais amostrais $F_{Y|X}^{-1}(\tau_i|x)_{i=1, 2, \dots, T}$ consiste em uma estatística de ordem.¹³ Nesse contexto, conforme definido em Chernozhukov & Du (2006), a ordem do quantil τ_i é dada pela quantidade $k_i = \tau_i T$, sendo T o tamanho amostral. Estatísticas de ordem formadas por quantis amostrais possuem ordem extrema se a seqüência $\tau_i \searrow 0$ e $k_i > 0$ para todo i , quando $T \rightarrow \infty$. Se $\tau_i \searrow 0$ e $k_i \rightarrow -\infty$ quando $T \rightarrow \infty$, a estatística possui ordem intermediária e, quando $\tau_i \in (0, 1)$ é fixo para todo i e $T \rightarrow \infty$, a ordem é central (Chernozhukov & Du, 2006). Vale destacar que, sendo a variável Y o retorno de um portfólio, o interesse reside em estatísticas de ordens extremas. Os resultados teóricos de inferência sobre o vetor de parâmetros β seguem a seguir.

¹²As funções splines são definidas como sendo polinômios por partes de grau n .

¹³No contexto em discussão, estatísticas de ordem estão sendo utilizadas com o objetivo de modelar a ocorrência de um menor valor dentre um conjunto de realizações de uma variável de interesse.

Sendo,

$$\hat{Z}_T(k) = \mathcal{A}_T(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)), \mathcal{A}_T = \frac{\sqrt{\tau T}}{\bar{X}'(\hat{\beta}(m\tau) - \hat{\beta}(\tau))}, \quad (20)$$

em que $\tau T(m-1) > p+1$, $m > 1$. Chernozhukov & Du (2006) derivam os resultados assintoticamente válidos para a realização de inferências sobre o vetor de parâmetros β , mostrando que, quando $\tau T \rightarrow k$ e $T \rightarrow \infty$,

$$\hat{Z}_T(\tau) \xrightarrow{d} Z_\infty(k) - k^{-\xi}, \quad (21)$$

sendo¹⁴

$$Z_\infty(k) = \operatorname{argmin}_{Z \in \mathbb{R}^p} [-k\mathbb{E}[x]'z + \sum_{j \geq 1} [X'_j z - \Gamma_j^{-\xi}]_+] (\xi < 0) \quad (22)$$

$$Z_\infty(k) = -\operatorname{argmin}_{Z \in \mathbb{R}^p} [-k\mathbb{E}[x]'z + \sum_{j \geq 1} [X'_j z - \Gamma_j^{-\xi}]_+] (\xi > 0). \quad (23)$$

A seqüência $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ é identificada por $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_2 \dots\}$ e $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias exponenciais i.i.d independentes de $\{X_1, X_2, \dots\}$. Adicionalmente, os autores mostram que, para todo $m > 1$ tal que $k(m-1) > p+1$, tem-se

$$Z_T(\tau) \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{k}Z_\infty(k)}{\mathbb{E}[X]'(Z_\infty(mk) - Z_\infty(k))} \quad (24)$$

A equação (24) é ainda válida considerando seqüências i.i.d e fracamente estacionárias com eventos extremos que satisfazem uma condição em que não há *clustering*¹⁵. Estes resultados assintóticos fornecem a base para técnica de estimação via bootstrap, descrita na Subseção 3.3.1.

3.3.1 Bootstrap Extremo

Em alguns casos, é de interesse realizar inferências através de um esquema bootstrap. As estimativas bootstrap fornecem um ajuste que se aproxima das características da cauda do modelo de regressão quantílica descrito pelas equações (15) a (18). Para este procedimento, considera-se a amostra

$$((Y_1, X_1), \dots, (Y_T, X_T)) = \left(\left(\frac{\varepsilon_1^{-\xi} - 1}{-\xi}, X_1 \right), \dots, \left(\frac{\varepsilon_T^{-\xi} - 1}{-\xi}, X_T \right) \right), \quad (25)$$

em que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T\}$ denota uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d tendo distribuição exponencial padrão e $\{X_1, \dots, X_T\}$ é um conjunto de variáveis explicativas conhecidas a priori. Com essas hipóteses é possível mostrar que

$$F^{-1}(\tau|X_t) = X'_t \beta(\tau) = \frac{[-\log(1-\tau)]^{-\xi} - 1}{-\xi}, \quad (26)$$

sendo $\beta(\tau) = \left(\frac{[-\log(1-\tau)]^{-\xi} - 1}{-\xi}, 0, \dots, 0 \right)'$ (Chernozhukov & Du, 2006). O modelo dado em (26) satisfaz as condições estabelecidas (15) a (18). Assim, pode-se estimar a distribuição de amostras finitas de $Z_T(\tau) = \mathcal{A}_T(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau))$ utilizando-se dados gerados em acordo com a equação (25). O esquema bootstrap proposto por Chernozhukov & Du (2006) é descrito a seguir

i Sendo B o número de repetições do experimento, para $j \leq B$, obtenha dados de acordo com (25).

Substitua o valor de ξ pela estimativa $\hat{\xi}$ (ver Subseção 3.3.2) e calcule a estatística $Z_{T,j}(\tau) = \mathcal{A}_T(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau))$.

¹⁴A notação $|x|_+$ é equivalente a função $|x|_+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

¹⁵Os dados não possuem agrupamentos de valores extremos.

ii Utilize a distribuição empírica dos dados simulados $(Z_{T,j}(\tau), j \leq B)$ na realização de inferências.

Dado o interesse no preditor linear $x'\hat{\beta}(\tau)$ para algum vetor não nulo de x , tem-se que, denotando o α -quantil de $x'Z_T(\tau)$ por $c(\alpha)$, após substituir ξ por uma estimativa adequada, a estimativa de $c(\alpha)$ pode ser obtida por meio de bootstrap extremo. Denotando o resultado estimado por $\hat{c}(\alpha)$. O estimador (corrigido pelo viés da mediana) e o intervalo de confiança (ao grau de cobertura α) para $x'\beta(\tau)$ são obtidos por

$$x'\hat{\beta}(\tau) - \frac{\hat{c}(1/2)}{\mathcal{A}_T} \text{ e } \left[x'\hat{\beta}(\tau) - \frac{\hat{c}(1-\alpha/2)}{\mathcal{A}_T}, x'\hat{\beta}(\tau) - \frac{\hat{c}(\alpha/2)}{\mathcal{A}_T} \right]. \quad (27)$$

3.3.2 Estimadores para o índice de cauda

O índice de cauda (ξ) indica a densidade nas caudas da distribuição de $Y|X$. Chernozhukov & Du (2006) sugerem que a estimação do índice de ξ seja feita com a utilização dos estimadores propostos em Pickands III (1975) ($\hat{\xi}_1$) e Hill et al. (1975) ($\hat{\xi}_2$). No primeiro caso, a estimação é baseada na razão de discrepâncias entre quantis amostrais e tem a forma

$$\hat{\xi}_1 = -\log \left(\frac{\hat{F}_Y^{-1}(4\tau|\bar{X}) - \hat{F}_Y^{-1}(2\tau|\bar{X})}{\hat{F}_Y^{-1}(2\tau|\bar{X}) - \hat{F}_Y^{-1}(\tau|\bar{X})} \right) / \log 2, \quad (28)$$

em que \bar{X} é a média de X_t . O estimador proposto por Hill et al. (1975) é sugestivo apenas quando $\xi > 0$, sendo dado por¹⁶

$$\hat{\xi}_2 = -\frac{\sum_{t=1}^T \log[Y_t/\hat{F}_Y^{-1}(\tau|X_t)]_-}{T\tau}. \quad (29)$$

Sob condições adicionais de regularidade¹⁷, quando $\tau \searrow 0$ e $\tau T \rightarrow \infty$ tem-se

$$\sqrt{\tau T}(\hat{\xi}_1 - \xi) \xrightarrow{d} N \left(0, \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \log 2)^2} \right), \quad (30)$$

$$\sqrt{\tau T}(\hat{\xi}_2 - \xi) \xrightarrow{d} N(0, \xi^2). \quad (31)$$

A técnica de bootstrap extremo pode ser utilizada considerando a estatística $Z_T = \sqrt{\tau T}(\hat{\xi} - \xi)$. Dessa forma, o estimador (corrigido pelo viés da mediana) e o intervalo de confiança (ao grau de cobertura α) para ξ são obtidos por

$$\hat{\xi} - \frac{\hat{c}(1/2)}{\sqrt{\tau T}} \text{ e } \left[\hat{\xi} - \frac{\hat{c}(1-\alpha/2)}{\sqrt{\tau T}}, \hat{\xi} - \frac{\hat{c}(\alpha/2)}{\sqrt{\tau T}} \right]. \quad (32)$$

3.3.3 Estimadores extrapolados

Diante da impossibilidade da estimação precisa de quantis muito extremos, Chernozhukov & Du (2006) sugerem a seguinte estratégia de estimação (Dekkers & De Haan, 1989): (i) estimar o índice de cauda para quantis menos extremos utilizando o estimador de Pickands III (1975) ou de Hill et al. (1975); (ii) extrapolar as estimativas usando os pressupostos sobre o comportamento da cauda declarados nas equações (15) a (18); (iii) utilizar os estimadores propostos por Dekkers & De Haan

¹⁶A notação $|x|_-$ é equivalente a função $|x|_- = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

¹⁷Para uma descrição detalhada, ver Pickands III (1975), Hill et al. (1975) e Chernozhukov (2005).

(1989), descritos a seguir, na obtenção das estimativas quantílicas extrapoladas.

$$\hat{F}_{Y|X}^{-1}(\tau_e|x) = \frac{(\tau_e/\tau)^{-\hat{\xi}} - 1}{m^{-\hat{\xi}} - 1} [\hat{F}_{Y|X}^{-1}(m\tau|x) - \hat{F}_{Y|X}^{-1}(\tau|x)] + \hat{F}_{Y|X}^{-1}(\tau|x), \quad (33)$$

$$\hat{F}_{Y|X}^{-1} = (\tau_e/\tau)^{-\hat{\xi}} \hat{F}_{Y|X}^{-1}(\tau|x) \quad (\xi > 0), \quad (34)$$

em que τ_e é um quantil muito inferior a τ (notação: $\tau_e \ll \tau$). Esses estimadores possuem propriedades desejáveis desde que as quantidades situadas no lado direito das expressões (33) e (34) sejam bem estimadas. No presente trabalho, os estimadores extrapolados são utilizados na obtenção das estimativas VaR para níveis de 2,5%, 1% e 0,1%, discutidas na Seção 4.

3.4 Backtesting

Os modelos para a estimação do VaR só apresentam utilidade se forem capazes de prever o risco com precisão. Por isso, os modelos de VaR precisam ser validados por algum processo que seja capaz de medir o desempenho das estimativas. O backtesting é um processo o qual avalia as previsões do VaR e checka a performance das previsões do modelo do VaR ao longo de um período de tempo. Trata-se de um procedimento que toma o VaR ex-ante de um determinado modelo e compara com os retornos realizados ex-post (i.e., observações históricas). Sempre que as perdas excederem o VaR, diz-se que ocorreu uma violação do VaR. Existem diversos estudos na literatura sobre backtesting [para maior detalhamento, ver Jorion (1997) e Danielsson (2011)].

Nesta subseção, são utilizadas as notações seguintes: W_E representa o número de observações usadas para prever o risco; W_T refere-se à amostra de dados sobre a qual o risco é previsto; $T = W_T + W_E$ representa o número de observações da amostra; $\eta_t = 0, 1$ é uma função indicadora que toma o valor 1 se $Y_t < \text{VaR}_t$ e o valor 0 caso contrário; $v_i, i = 0, 1$ representa o número de violações ($i = 1$) e não ocorrência de violações ($i = 0$) observadas em η_t .

Pode-se fazer uso do backtesting para verificar a qualidade das previsões do VaR. Nesta dissertação é utilizado a técnica da *violation rate* (VR) e um teste de razão de verossimilhanças que utiliza a distribuição de Bernoulli, proposto por Kupiec (1995). O método de VR compara o número real de violações com o valor esperado das violações.

$$\text{VR} = \frac{\text{Número de violações observadas}}{\text{Número de violações esperadas}} = \frac{v_1}{\tau \times W_T} \quad (35)$$

O valor VR ideal seria 1, que demonstraria um ajuste perfeito, mas na maioria das vezes isso não ocorre. Por isso, deve-se delimitar um intervalo para VR para o qual o modelo do VaR seria adequado. De acordo com Danielsson (2011) se $\text{VR} \in [0.8, 1.2]$ o modelo do VaR fornece uma boa previsão e se $\text{VR} < 0.5$ ou $\text{VR} > 1.5$ o modelo é impreciso. É possível que dois modelos que fornecem previsões do VaR diferentes possuam o mesmo VR. Nesses casos pode ser útil verificar o desvio padrão da estimativa do VaR, pois um menor desvio padrão implica em estimador mais eficiente.

3.4.1 backtesting de cobertura de Bernoulli (Bern LR)

A abordagem para o teste de cobertura vem do arcabouço clássico de testes estatísticos para sequências de fracasso e sucesso, ou seja, eventos de Bernoulli. A ocorrência de violações no dia t é expressa por $\eta = 1$ e, caso contrário $\eta = 0$, em que $\{\eta\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli. O teste de cobertura serve para avaliar a proporção de violações do VaR sob a hipótese nula

$$H_0 : \eta \sim B(p)$$

em que B é a distribuição de Bernoulli. A densidade de Bernoulli é dada por

$$(1 - p)^{1-\eta_t} (p)^{\eta_t}.$$

A probabilidade \hat{p} é estimada por

$$\hat{p} = \frac{v_1}{W_T}. \quad (36)$$

A partir da probabilidade estimada é possível estimar a função verossimilhança irrestrita (sob hipótese alternativa) que é dada por

$$L_U(\hat{p}) = \prod_{t=W_E+1}^T (1 - \hat{p})^{1-\eta_t} (\hat{p})^{\eta_t} = (1 - \hat{p})^{v_0} (\hat{p})^{v_1}. \quad (37)$$

Onde $v_1 = \sum \eta_t$ e $v_0 = W_T - v_1$. Note que ela é irrestrita porque usa a probabilidade estimada \hat{p} , diferente da função de verossimilhança restrita cuja probabilidade é o valor p utilizado no cálculo do modelo do VaR.

A amostra de dados é dividida em duas janelas, as de teste (W_E) e estimação (W_T). A primeira W_E é reservada para obter as estimações, o teste começa em $W_E + 1$.

Sobre a hipótese nula $H_0 : p = \hat{p}$, a função de probabilidade restrita é

$$L_R(p) = \prod_{t=W_E+1}^T (1 - p)^{1-\eta_t} (p)^{\eta_t} = (1 - p)^{v_0} (p)^{v_1} \quad (38)$$

A estatística de teste é dada por

$$\begin{aligned} LR &= 2(\log(L_U(p)) - \log(L_R(\hat{p}))) \\ &= 2\log \frac{(1 - \hat{p})^{v_0} (\hat{p})^{v_1}}{(1 - p)^{v_0} (p)^{v_1}} \\ &\sim \chi_{(1)}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Escolhendo o nível de significância de 5%, a hipótese nula é rejeitada se $LR > 3,84$.

4 Estudo Empírico

Na análise empírica, como variáveis dependentes, utilizam-se as séries de (log) retornos do principal índice da bolsa brasileira (IBOVESPA) e das ações ordinárias da Petrobrás (PETR3)¹⁸, juntamente com outras variáveis regressoras, descritas na Subseção 4.1. Os dados compreendem o período entre 01/01/2010 e 31/08/2016, totalizando 1729 observações diárias para o caso da Petrobrás e 1629 observações para o caso do IBOVESPA, sendo extraídos da base de dados do IPEADATA¹⁹ e da plataforma de análises GrapherOC²⁰. As análises estatísticas são realizadas por meio do ambiente de programação, análise de dados e gráficos, R, disponível gratuitamente em <https://www.r-project.org/>.

O resumo das estatísticas descritivas do IBOVESPA para o período amostral completo e para os diversos anos que o agregam é apresentado na Tabela 1. Observando os retornos do índice para todos os períodos, notam-se médias amostrais aproximadamente nulas, o que é comum em dados de séries

¹⁸As estimativas para as ações preferências (PETR4) foram obtidas e os resultados encontrados foram similares.

¹⁹Base de dados econômicos e financeiros mantida pelo Ipea (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada).

²⁰O GrapherOC é uma ferramenta de análise técnica que fornece dados sobre o mercado de capitais brasileiro (acesso ao website em <http://www.quantisis.com/grapherOC/>).

de retornos. Considerando o período compreendendo toda a série, os retornos máximo e mínimo diários são de 8,5% (observado em 2015) e -8,4% (observado em 2011), respectivamente. Entre os subperíodos, os máximos são próximos a 4% entre 2010 e 2014, sendo superiores em 2015 e 2016, subperíodos apresentando desvios-padrão de 1,15% e 1,18%, respectivamente. Os retornos mínimos apresentam-se semelhantes entre os anos de 2010, 2013, 2014 e 2015, cujas volatilidades (medidas pelo desvio-padrão) são de 1,12% (2010 e 2013) e 1,15% (2014 e 2015). Nos anos de 2011 e 2016 (desvios-padrão de 1,16% e 1,18%, respectivamente), as quedas mínimas são próximas de -8% e em 2012, tem-se o valor mais ameno entre os subperíodos (-3,3%).

Tabela 1: Resumo de estatísticas descritivas das séries de retorno do IBOVESPA

Retorno IBOVESPA	Período completo	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Média anual	-0,0001	-0,000	0,000	0,0002	-0,0006	-0,000	-0,0002	0,001
Desvio padrão	0,014	0,012	0,016	0,013	0,012	0,015	0,015	0,018
Máxima diária	0,085	0,040	0,049	0,046	0,035	0,049	0,085	0,063
Mínima diária	-0,084	-0,048	-0,084	-0,033	-0,045	0,046	-0,040	-0,079
Assimetria	0,049	-0,186	-0,465	0,217	-0,160	0,119	0,850	-0,146
Curtose	5,297	4,135	6,327	3,350	3,630	3,792	6,132	5,415
Excesso de Curtose	2,297	1,135	3,327	0,350	0,630	0,792	3,132	2,415
Jarque Bera Test	0,00*	0,00*	0,00*	0,19	0,07***	0,02**	0,00*	0,00*

Nota: * Teste Jarque-Bera significante ao nível de 1%

** Teste Jarque-Bera significante ao nível de 5%

*** Teste Jarque-Bera significante ao nível de 10%.

Fonte: Elaboração própria.

Os dados exibem coeficientes de assimetria próximos de zero, havendo leve tendência de assimetria positiva em 2014 e negativa nos demais períodos. No histograma considerando o período completo, apresentado na Figura 1 (gráfico à direita), é possível observar uma curva de densidade essencialmente simétrica. No que tange à curtose, as séries apresentam excesso de curtose positivo em todos os períodos, o que indica caudas densas para as densidades dos retornos. O teste de Jarque-Bera é utilizado na avaliação de normalidade, rejeitando-se a hipótese nula (densidade gaussiana) ao nível de significância de 10% em praticamente todos os períodos (exceto em 2012).

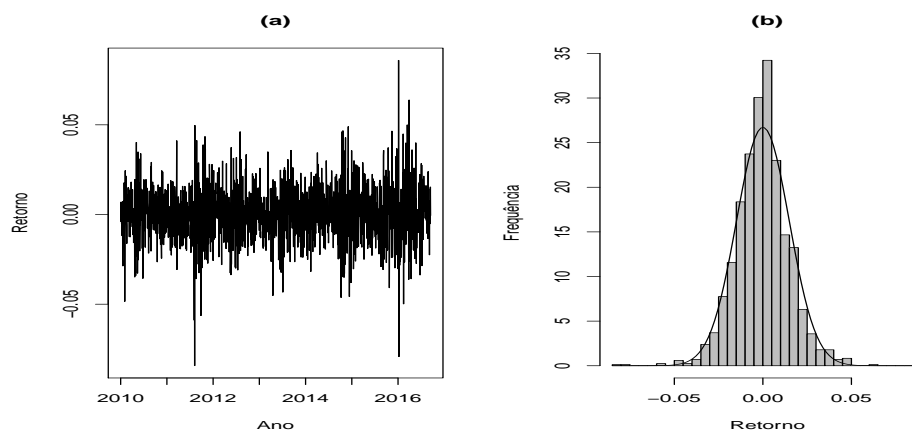


Figura 1: (a) Série do retorno do IBOVESPA; (b) Histograma da série de retornos do IBOVESPA com curva gaussiana padrão plotada.

A Figura 2 mostra o gráfico de QQ-plot com as bandas de confiança (90% de confiabilidade) considerando os quantis da normal considerando o período completo da Tabela 1. Como é possível

observar, o ajuste normal é bastante fragilizado nas regiões extremas, sinalizando caudas densas. Essa característica é um diferencial na modelagem proposta por Chernozhukov & Du (2006), que tem base na teoria dos valores extremos e é fonte de estudo do presente artigo.

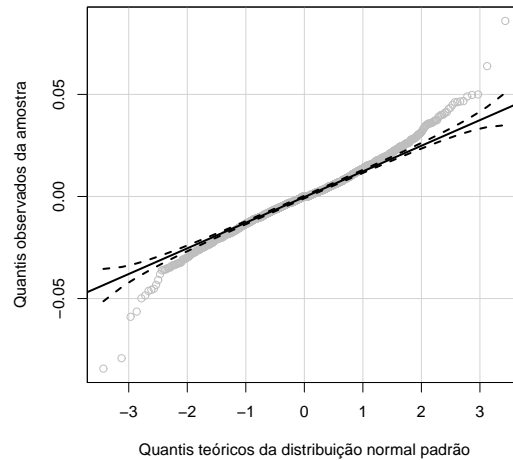


Figura 2: Q-Q plot para os retornos diários do IBOVESPA considerando o período completo da série.

A Tabela 2 contém o sumário das estatísticas descritivas considerando as séries associadas ao ativo PETR3. Como no caso anterior, observam-se médias próximas de zero. Os retornos máximos e mínimos ocorrem em 2016 (14,9%) e 2014 (-12%), respectivamente. Entre os subperíodos, os retornos máximos inferiores a 10% em 2010, 2011 e 2012, seguindo o sentido contrário em 2013, 2014, 2015 e 2016. Os retornos mínimos são registrados abaixo de -10% entre 2013 e 2016. Estes períodos destacam o recente cenário de crise política brasileiro. Os subperíodos que apresentam-se maior volatilidade são observados entre 2014 e 2016.

Os coeficientes de assimetria estimados, como no caso do IBOVESPA, apresentam-se próximos de zero. Há uma leve assimetria positiva visível no histograma da Figura 3 (gráfico à direita), em que valores extremos são levemente mais intensos na região da cauda direita da distribuição dos dados. Adicionalmente, como observado para o IBOVESPA, os excessos de curtose não nulos, revelam distribuições de caudas pesadas. O teste de Jarque Bera ao nível de 10% não rejeita a hipótese de normalidade apenas em 2010.

Tabela 2: Resumo de estatísticas descritivas do Retorno da Petrobrás

Retorno Petrobrás	Período completo	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Média anual	-0.0005	-0.001	-0.0009	-0.0005	-0.0008	-0.001	-0.0003	0.003
Desvio padrão	0.028	0.017	0.019	0.021	0.025	0.032	0.038	0.040
Máxima diária	0.149	0.054	0.045	0.070	0.141	0.105	0.133	0.149
Mínima diária	-0.120	-0.049	-0.082	-0.087	-0.109	-0.120	-0.110	-0.092
Assimetria	0.289	-0.083	-0.464	-0.267	0.535	-0.064	0.365	0.371
Curtose	5.647	3.426	4.533	4.804	8.673	4.332	3.593	3.446
Excesso de Curtose	2.647	0.426	1.533	1.80	5.673	1.332	0.593	0.446
Jarque Bera Test	0.00*	0.32	0.00*	0.00*	0.00*	0.04**	0.00*	0.06***

Nota: * Teste Jarque-Bera significativa ao nível de 1%

** Teste Jarque-Bera significativa ao nível de 5%

*** Teste Jarque-Bera significativa ao nível de 10%.

Fonte: Elaboração própria.

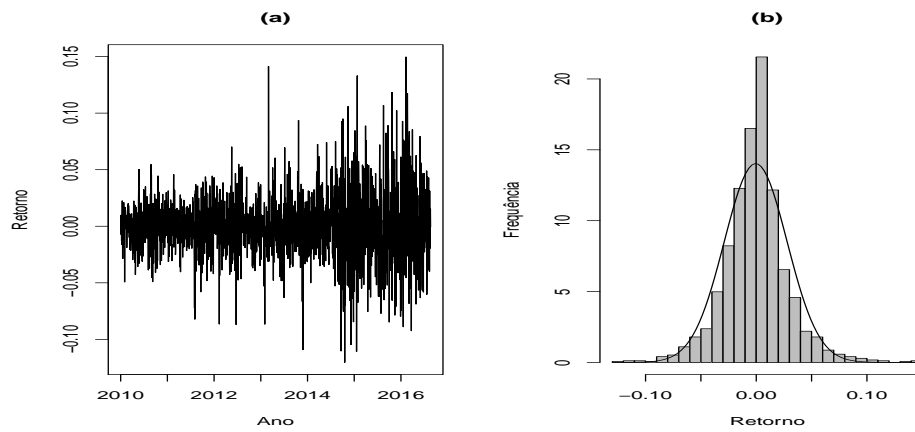


Figura 3: (a) Retornos diários da Petrobrás (PETR3); (b) Histograma da série da Petrobrás com curva gaussiana padrão ajustada.

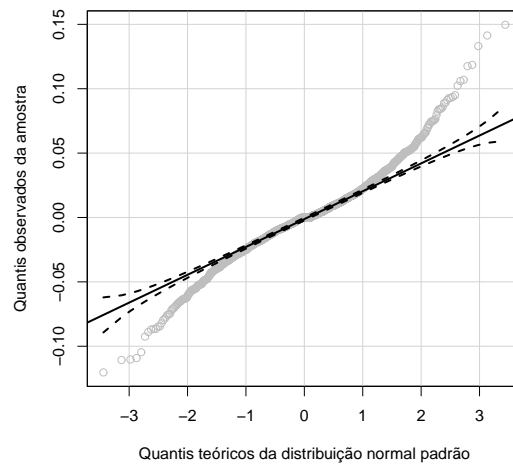


Figura 4: Q-Q plot para os retornos diários da Petrobrás (PETR3) considerando o período completo da série.

O gráfico QQ-plot construído a 90% de confiança (Figura 4) revela que na região central os dados comportam-se como em uma distribuição normal (observações dentro das bandas), porém, nos quantis extremos, os dados diferem bastante do padrão gaussiano (observações fora das bandas de confiança). De acordo com o envelope inserido da Figura 4, há evidência empírica contra a hipótese de normalidade.

O fato de ambas as séries possuírem caudas com padrões diferentes do gaussiano sugerem a obtenção de estimativas VaR diferentes dos usuais. A regressão quantílica pode ser utilizada com esse propósito. A Seção 4.1 mostra os resultados com essa abordagem.

4.1 Análise VaR via regressão quantílica

Na realização das análises, as covariáveis utilizadas na modelagem quantílica do VaR referente aos retornos do IBOVESPA são:²¹ (i) o (log) retorno do IBOVESPA, defasado de um período ($IBOV_{t-1}$); (ii) o (log) retorno (defasado em um período) da taxa de câmbio - Livre - Dólar americano (compra)²² ($Cmbio_{t-1}$); e (iii) o log retorno (defasado de um período) da taxa média de depósito interbancário

²¹O conjunto de covariáveis é limitado a um pequeno conjunto de fatores de risco a fim de evitar que o modelo estatístico se ajuste demasiadamente ao conjunto de dados (*overfitting*)

²²Metodologia de cálculo disponível em <http://dadosabertos.bcb.gov.br/dataset/10813-taxa-de-cambio---livre---dolar-americano-compra>

(DI)²³($Juros_{t-1}$). Vale destacar que há diversos estudos os quais evidenciam a relação de causalidade existente entre as variáveis descritas nos itens (i) a (iii) e o movimento dos preços das ações de empresas cujos ativos compõem índices representativos nos mercados (Junior & Higuchi, 2008; Chen et al., 1986; Júnior & Scherma, 2010; Bjørnland & Leitemo, 2009).

As covariáveis utilizadas na estimação quantílica do VaR referente aos retornos das ações ordinárias PETR3 são: (iv) o log retorno (defasado em um período) do ativo PETR3 ($PETR3_{t-1}$); (v) o log retorno do índice IBrX 50²⁴ defasado em um e dois períodos ($IBrX_{t-1}$ e $IBrX_{t-2}$, respectivamente); e (vi) o log retorno (defasado de um período) do preço unitário do barril de petróleo bruto WTI (Fob)²⁵. Os fatores (iv) a (vi) são escolhidos em consonância com os estudos de Chernozhukov & Du (2006) e Grôppo (2004).

As estimativas VaR são obtidas para os quantis de 10%, 5%, 2,5%, 1% e 0,1% e apresentadas nas Subseções 4.1.1 e 4.1.2, sendo também mostradas as estimativas corrigidas pelo viés e as respectivas regiões de confiança a 90% de confiabilidade (ambas obtidas usando bootstrap extremo). Para o índice de cauda (ξ), via bootstrap extremo, são também calculadas as estimativas corrigidas pelo viés e as regiões de confiança (90% de cobertura). Por fim, com o uso da estratégia de extrapolação descrita na Subseção 3.3.3, valores $\hat{\xi}$ estimados para quantis menos extremos são utilizados na obtenção de estimativas VaR mais extremas.

4.1.1 Análise VaR para o IBOVESPA

A análise quantílica VaR considerando os log retornos do IBOVESPA é baseada na equação de regressão

$$\hat{F}_{Y_t}^{-1}(\tau|X_t) = X_t' \hat{\beta}(\tau) = \hat{\beta}_0(\tau) + \hat{\beta}_1(\tau) IBOV_{t-1} + \hat{\beta}_2(\tau) Câmbio_{t-1} + \hat{\beta}_3(\tau) Juros_{t-1}, \quad (40)$$

em que Y_t , $\hat{F}_{Y_t}^{-1}(\tau|X_t)$ e $\hat{\beta}_i$, $i = 0, \dots, 3$ denotam, respectivamente, o (log) retorno (diário) do IBOVESPA em t , o estimador do VaR condicional ao nível τ e os estimadores dos parâmetros do modelo. A Tabela 3 mostra os resultados da estimação. Como um ponto a observar, tem-se a não significância de $Juros_{t-1}$ para os quantis 10%, 2,5% e 1% (intervalos de confiança estimados contêm o zero). Para esses quantis, a covariável não revela ter impacto relevante. Em contra partida, o VaR ao nível $\tau = 0,1\%$ é muito impactado por esse regressor: corrigindo o viés, 1% de aumento no DI impacta em uma variação de $-2,25\%$ nesse quantil. O Câmbio é uma variável significativa em praticamente todos os níveis de VaR, exceto no $VaR_{0,1\%}$, em que o intervalo de confiança estimado contém o zero. Percebe-se um aumento no impacto do câmbio à medida em que $\tau \searrow 0$ ($-0,18\%$ quando $\tau = 10\%$ contra $-0,25\%$ para o $VaR_{1\%}$). O (log) retorno do IBOVESPA ($IBOV_{t-1}$) é o fator menos impactante, apresentando estimativas significativas apenas para o nível $\tau = 10\%$. Nesse caso, o impacto estimado é de $-0,06\%$ mediante uma variação percentual positiva em $IBOV_{t-1}$.

A Tabela 4 apresenta os resultados da estimação do índice de cauda utilizando o estimador proposto por Hill et al. (1975). Como todas as estimativas são positivas, visto que as equações (15) e (16) são escritas na forma da GEV_{max} ,²⁶ tem-se mais uma evidência da presença de caudas densas na distribuição dos (log) retornos. Observa-se que a única estimativa não significativa foi obtida para $\tau = 0,1\%$, em que a estimativa intervalar contém o zero. Adicionalmente, as estimativas corrigidas pelo viés são consideravelmente distintas daquelas sem correção. Entretanto, a correção de viés torna

²³Taxa DI é o contrato futuro de taxa média de depósito interfinanceiro de 1 dia negociado no mercado da BM&F, expressa as expectativas sobre os comportamentos dos juros para períodos futuros. Essa variável é escolhida por apresentar uma maior liquidez do que na Taxa básica de juros (Selic) e por apresentar as expectativas sobre juros futuros [Para maior detalhamento, ver Almeida et al. (2008)].

²⁴O IBrX 50 é o indicador do desempenho médio das cotações dos 50 ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro. Esse é escolhido como variável representativa do mercado financeiro por expressar as oscilações dos retornos das principais companhias de capital aberto da BM&FBOVESPA.

²⁵Preço de referência dos EUA, transacionado na Bolsa de mercadorias de Chicago (CME).

²⁶Na forma GEV_{min} altera-se o sinal de ξ .

mais estável os valores $\hat{\xi}$ obtidos para $\tau = 10\%$, 5% e $2,5\%$. Quando $\tau = 1\%$ tem-se $\hat{\xi} \approx 0,22$, cerca de 83% superior (também significativa a 10% de significância).

Tabela 3: Estimativas VaR para o modelo de regressão quantílica associado ao IBOVESPA.

Coefficiente	Estimativa	Estimativa sem viés	Região de conf. 90%
$\tau = 0,1\%$			
(Intercepto)	-0,07	-0,08	[-0,13;-0,06]
$IBOV_{t-1}$	-0,65	-0,69	[-1,62; 0,28]
$Câmbio_{t-1}$	-0,76	-0,72	[-2,56; 0,62]
$Juros_{t-1}$	-1,48	-2,25	[-3,14;-0,06]
$\tau = 1\%$			
(Intercept)	-0,03	-0,03	[-0,04;-0,03]
$IBOV_{t-1}$	-0,05	-0,05	[-0,21; 0,11]
$Câmbio_{t-1}$	-0,24	-0,25	[-0,49;-0,02]
$Juros_{t-1}$	-0,27	-0,26	[-0,57; 0,02]
$\tau = 2,5\%$			
(Intercept)	-0,03	-0,03	[-0,03;-0,03]
$IBOV_{t-1}$	-0,06	-0,05	[-0,23; 0,10]
$Câmbio_{t-1}$	-0,14	-0,13	[-0,42;-0,07]
$Juros_{t-1}$	-0,26	-0,22	[-0,58; 0,13]
$\tau = 5\%$			
(Intercept)	-0,02	-0,02	[-0,02;-0,02]
$IBOV_{t-1}$	-0,07	-0,07	[-0,16; 0,02]
$Câmbio_{t-1}$	-0,22	-0,22	[-0,35;-0,10]
$Juros_{t-1}$	-0,22	-0,20	[-0,42;-0,03]
$\tau = 10\%$			
(Intercept)	-0,02	-0,02	[-0,02;-0,02]
$IBOV_{t-1}$	-0,06	-0,06	[-0,11;-0,01]
$Câmbio_{t-1}$	-0,17	-0,18	[-0,25;-0,09]
$Juros_{t-1}$	0,00	0,00	[-0,14; 0,12]

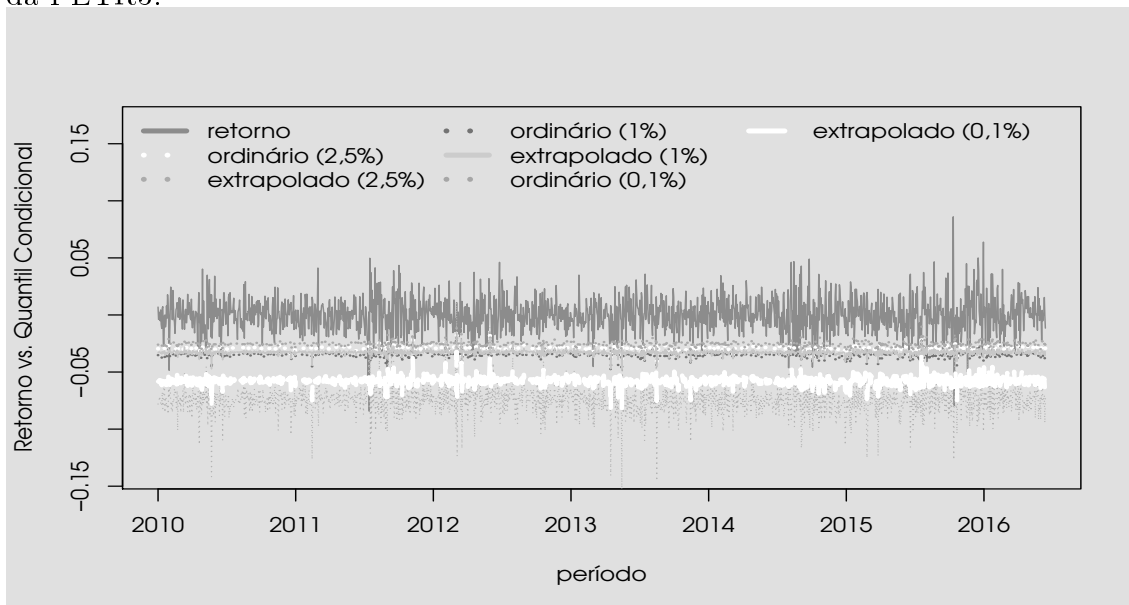
A Figura 5 mostra o gráfico das séries VaR obtidas após todo o processo de estimação quantílica. No gráfico, são mostrados os (log) retornos juntamente com as linhas VaR aos níveis $\tau = 2,5\%$, 1% e $0,1\%$ (ajustes ordinário e extrapolado - ver Subseção 3.3.3). Para as estimativas extrapoladas, na obtenção dos valores VaR, sendo $\tau = 2,5\%$, extrapola-se o quantil $\tau = 5\%$ considerando $\hat{\xi}_{\text{mdio}} \approx 0,1258$ (média de $\hat{\xi}$ para os quantis 10% e 5%). Quando $\tau = 1\%$, considera-se a média $\hat{\xi}_{\text{mdio}} = \frac{0,1227+0,1290+0,1246}{3} \approx 0,1254$ (média para os quantis 10%, 5% e 2,5%), extrapolando-se o $\text{VaR}_{2,5\%}$. Por fim, com $\tau = 0,1\%$, a estimativa $\hat{\xi} = 0,2191$ é utilizada (referente ao quantil $\tau = 1\%$), sendo extrapolado o $\text{VaR}_{2,5\%}$.

Os resultados evidenciam como a estimação via bootstrap extremo tende a performar de forma mais realista. Esse fato é observado na Figura 5, em que a linha $\text{VaR}_{0,1\%}$ estimada via bootstrap posiciona-se acima da mesma estimada via método ordinário. Nesse sentido, é possível interpretar que a estimação ordinária precifica o risco de forma excessiva, superestimando os quantis muito extremos. Segundo Chernozhukov & Du (2006), a diferença entre as estimações ordinária e extrapolada se dá em virtude da primeira limitar-se à amostra enquanto que a segunda utiliza um modelo da cauda apropriado sob um condicional estimado de forma confiável, o que torna o método extrapolado mais adequado. A Tabela 5 contém as estatísticas de backtest, considerando as estimações extrapoladas para os quantis VaR aos níveis $\tau = 2,5\%$, 1% e $0,1\%$. A janela de estimação é a mesma definida no início da Seção 4. Como é possível observar, para a linha $\text{VaR}_{2,5\%}$, a razão de violação situa-se

Tabela 4: Estimativas do índice de cauda ($\hat{\xi}$) considerando os (log) retornos do IBOVESPA

Estimativa	Estimativa sem viés	Região de conf. 90%
$\tau = 0,1\%$		
0,0595	0,09123	[-0,1337; 0,1189]
$\tau = 1\%$		
0,2569	0,2191	[0,0937; 0,3181]
$\tau = 2,5\%$		
0,2287	0,1246	[0,0389; 0,1950]
$\tau = 5\%$		
0,27226	0,1290	[0,0511; 0,1856]
$\tau = 10\%$		
0,3275	0,1227	[0,0621; 0,1750]

Figura 5: Extrapolação versus estimativas ordinárias para os níveis VaR associados aos (log) retornos da PETR3.



Fonte: Elaboração própria.

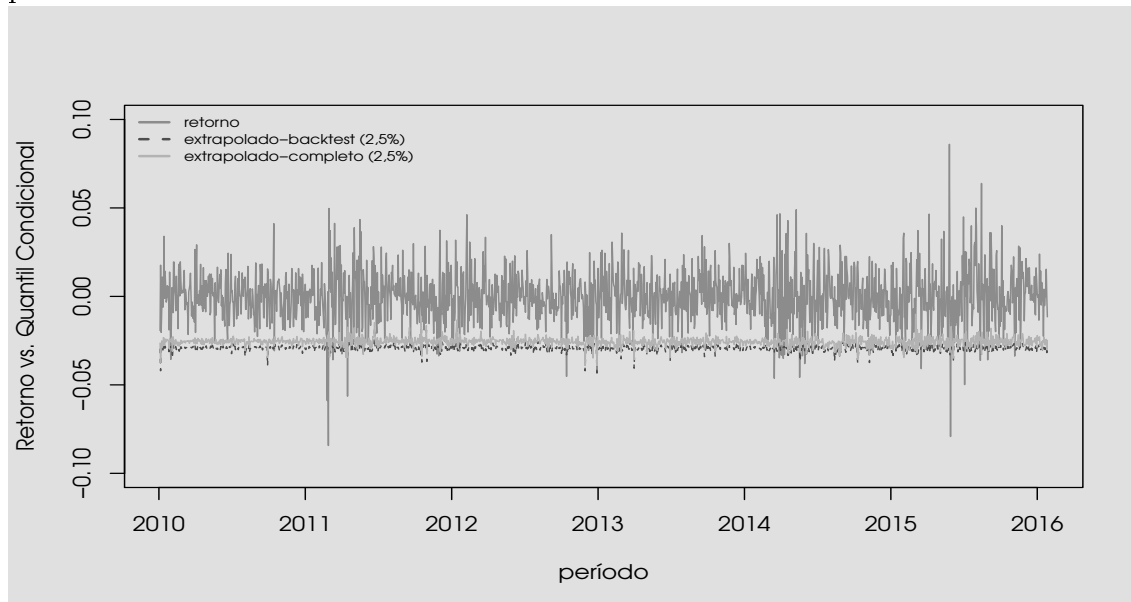
dentro da faixa considerada como razoável ($VR \approx 1,40$), porém, a estatística bernoulli, calculada sob H_0 , indica rejeição da hipótese nula em teste. Considerando os quantis mais extremos os resultados são positivos, apresentando $VR \approx 1,43$ e $1,78$ ($VaR_{1\%}$ e $VaR_{0,1\%}$, respectivamente) e não havendo rejeição da hipótese nula em teste (estatísticas bernoulli inferiores a $3,84$).

A Figura 6 mostra o gráfico dos log retornos contra as linhas $VaR_{2,5\%}$, obtidas via bootstrap extremo, uma utilizando a janela completa de dados (extrapolado-completo) e a outra utilizando uma janela de estimação $WE = 100$ no procedimento de backtest descrito na Subseção 3.4. No segundo caso, $VR = 0,99$ e $LR \approx 0,214$, configurando um melhor ajuste relativamente aquele obtido com os dados completos (Tabela 5). Dessa forma, quando necessário, a obtenção de estimativas VaR mais adequadas pode ser realizada por meio de backtests. Ao se realizar o mesmo procedimento considerando $\tau = 1\%$ e $0,1\%$ nota-se que não há diferenças significativas entre as linhas VaR obtidas pelos dois procedimentos.

Tabela 5: Resumo das estatísticas de backtest para o modelo de regressão quantílica considerando as curvas VaR extremas estimadas para o IBOVESPA. Quantil crítico do teste bernoulli é de 3,84 a 5% de significância.

τ	violações (em %)	VR	estatística LR
2,5%	3.51	1.407275	6.34
1%	1.43	1.431127	2.77
0,1%	0.18	1.788909	0.84

Figura 6: Estimativas VaR extrapoladas associados aos (log) retornos do IBOVESPA com e sem procedimento backtest.



Fonte: Elaboração própria.

4.1.2 Análise VaR para a Petrobrás

A análise VaR considerando os log retornos da PETR3 é baseada na equação de regressão

$$\hat{F}_{Y_t}^{-1}(\tau|X_t) = \hat{\beta}_0(\tau) + \hat{\beta}_1(\tau)PETR3_{t-1} + \hat{\beta}_2(\tau)IBrX_{t-1} + \hat{\beta}_3(\tau)IBrX_{t-2} + \hat{\beta}_4(\tau)Preço_{t-1}, \quad (41)$$

em que Y_t , $\hat{F}_{Y_t}^{-1}(\tau|X_t)$ e $\hat{\beta}_i$, $i = 0, \dots, 3$ denotam, respectivamente, o (log) retorno (diário) do ativo PETR3 em t , o estimador do VaR condicional ao nível τ e os estimadores dos parâmetros do modelo, como pode ser visto na tabela 6.

Tabela 6: Estimativas do VaR para o modelo de regressão quantílica para valores extremos da PETR3

Coeficiente	Estimativa	Viés de correção	Região de conf. 90%
$\tau = .001$			
(Intercepto)	-0.10	-0.11	[-0.14;-0.09]
$PETR3_{t-1}$	-0.68	-0.71	[-1.25;-0.10]
$IBrX_{t-1}$	0.74	0.87	[-0.53; 1.87]
$IBrX_{t-2}$	0.00	-0.10	[-0.85; 0.74]
$Preço_{t-1}$	0.42	0.41	[-0.04; 0.95]
$\tau = .01$			
(Intercepto)	-0.08	-0.08	[-0.08;-0.07]
$PETR3_{t-1}$	-0.03	-0.03	[-0.40; 0.38]
$IBrX_{t-1}$	0.06	0.10	[-0.83; 0.82]
$IBrX_{t-2}$	0.29	0.29	[-0.21; 0.80]
$Preço_{t-1}$	0.19	0.20	[-0.11; 0.54]
$\tau = .025$			
(Intercepto)	-0.06	-0.06	[-0.06;-0.05]
$PETR3_{t-1}$	-0.14	-0.13	[-0.38; 0.11]
$IBrX_{t-1}$	0.27	0.27	[-0.30; 0.75]
$IBrX_{t-2}$	0.15	0.14	[-0.18; 0.45]
$Preço_{t-1}$	0.20	0.20	[0.00; 0.43]
$\tau = .05$			
(Intercept)	-0.04	-0.04	[-0.05;-0.04]
$PETR3_{t-1}$	0.06	0.07	[-0.12; 0.24]
$IBrX_{t-1}$	-0.25	-0.25	[-0.67; 0.13]
$IBrX_{t-2}$	0.30	0.31	[0.08; 0.52]
$Preço_{t-1}$	0.17	0.17	[0.01; 0.32]
$\tau = .10$			
(Intercept)	-0.03	-0.03	[-0.04;-0.03]
$PETR3_{t-1}$	-0.02	-0.01	[-0.15; 0.11]
$IBrX_{t-1}$	-0.06	-0.08	[-0.33; 0.17]
$IBrX_{t-2}$	0.21	0.21	[0.06; 0.36]
$Preço_{t-1}$	0.17	0.17	[0.07; 0.27]

Os resultados da estimação podem ser vistos na Tabelas 6 e 7. Na Tabela 6 observa-se que os retornos do preço do petróleo são significativos quando $\tau = 5\%$ e 10% , tendo impacto médio estimado de 0,17% nas variações de preço da PETR3 (para cada aumento de 1% em $Preço_{t-1}$, *ceteris paribus*). Nos quantis $\tau = 2,5\%$ e 1% , o impacto estimado, embora não significativo, é de 0,20% e, quando $\tau = 0,1\%$, esse valor mais que dobra ($\approx 0,40\%$), porém, a estimativa é não significativa. As variações defasadas em dois períodos do IBRX 50 ($IBrX_{t-2}$) são relevantes para os níveis $VaR_{10\%}$ e $VaR_{5\%}$ enquanto que os log retornos defasados em um período ($IBrX_{t-1}$) não são significativos para nenhum

valor τ considerado. Vale observar que, mesmo havendo estimativas não significativas, os valores dos coeficientes estimados associados aos regressores $IBrX_{t-1}$ e $IBrX_{t-2}$ mudam de sinal (de $-0,08$ para $0,87$ e de $0,21$ para $-0,10$, respectivamente), evidenciando uma tendência de reversão do impacto à medida que o quantil torna-se mais extremo. Os log retornos (defasados) da PRTR3 são significativos apenas para $\tau = 0,1\%$, região em que o nível do impacto estimado (em valor absoluto) é bastante superior relativamente aos demais quantis considerados. Nesse sentido, para $\tau = 0,1\%$, estima-se que um aumento percentual em $PETR3_{t-1}$ acarreta em uma variação de $-0,71\%$ nos log retornos da PETR3, em média.

A Tabela 7 reporta as estimativas do índice de cauda, obtidas segundo Hill et al. (1975). Os valores $\hat{\xi}$ são estatisticamente significativos para $\tau = 10\%, 5\%$ e $2,5\%$, sendo bastante próximas entre os dois primeiros ($\hat{\xi} \approx 0,196$ e $0,20$, respectivamente). Quando $\tau = 2,5\%$, $\hat{\xi}$ diminui para $0,118$. A Figura 7 mostra o gráfico das séries VaR obtidas após o todo o processo de estimação quantílica. Como na Figura 5, são mostrados os (log) retornos juntamente com as linhas VaR aos níveis $\tau = 2,5\%, 1\%$ e $0,1\%$ (ajustes ordinário e extrapolado). Para as estimativas extrapoladas, na obtenção dos valores VaR, sendo $\tau = 2,5\%$, extrapola-se o quantil $\tau = 5\%$ considerando $\hat{\xi}_{\text{mdio}} \approx 0,1975$ (média dos valores $\hat{\xi}$ obtidos para os quantis 10% e 5%). Quando $\tau = 1\%$ e $0,1\%$, extrapola-se o quantil $\tau = 2,5\%$ considerando $\hat{\xi}_{\text{mdio}} \approx 0,1745$ (média de $\hat{\xi}$ para $\tau = 10\%, 5\%$ e $2,5\%$).

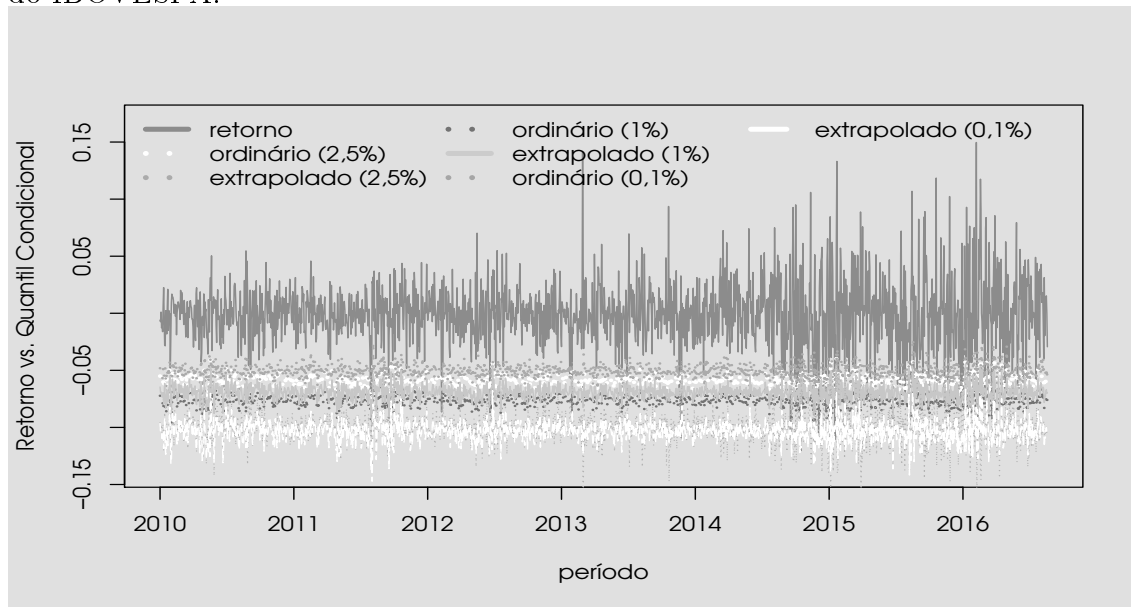
Tabela 7: Estimativa do índice de cauda ξ da Petrobrás

Estimativa	Estimativa sem viés	Região de conf. 90%
$\tau = 0,1\%$		
0,069	0,139	[-0,0952;0,139]
$\tau = 1\%$		
0,145	0,071	[-0,0284;0,142]
$\tau = 2,5\%$		
0,222	0,118	[0,0277;0,190]
$\tau = 5\%$		
0,331	0,208	[0,126;0,275]
$\tau = 10\%$		
0,382	0,197	[0,141;0,253]

Como pode-se observar, o ajuste extrapolado para o $\text{VaR}_{0,1\%}$ é menos volátil que o mesmo obtido pelo método ordinário (desvio padrão de 0.0092 contra 0.0133). O método extrapolado mostra-se bastante favorável na estimação dos quantis mais extremos, região em que há uma maior diferença nas estimativas VaR obtidas. A Tabela 8 contém as estatísticas de backtest, considerando as estimações extrapoladas para os quantis VaR aos níveis $\tau = 2,5\%, 1\%$ e $0,1\%$. A janela de estimação é a mesma definida no início da Seção 4. Como na análise do IBOVESPA, para a linha $\text{VaR}_{2,5\%}$, a razão de violação situa-se dentro da faixa considerada como razoável ($\text{VR} = 1,44$), porém, a estatística bernoulli, calculada sob H_0 , indica rejeição da hipótese nula em teste. Considerando os quantil $\tau = 1\%$ têm-se $\text{VR} = 1,43$, sem rejeição de H_0 . Quando $\tau = 0,1\%$ e $2,18$ ($\text{VaR}_{1\%}$ e $\text{VaR}_{0,1\%}$, por se tratar de um quantil mais extremo, $\text{VR} = 2,18$ respectivamente, porém, H_0 não é rejeitada.

A Figura 8 mostra o gráfico dos log retornos contra as linhas $\text{VaR}_{2,5\%}$, obtidas via bootstrap extremo, uma utilizando a janela completa de dados (extrapolado-completo) e a outra utilizando uma janela de estimação $WE = 100$ no procedimento de backtest descrito na Subseção 3.4. No segundo caso, $\text{VR} = 1,10$ e $LR \approx 0,082$, configurando um melhor ajuste relativamente àquele obtido com os dados completos (Tabela 8), sendo possível a obtenção de estimativas VaR mais adequadas por meio de backtests. Como na análise do IBOVESPA, ao se considerar $\tau = 1\%$ e $0,1\%$ em um mesmo procedimento, não há diferenças significativas entre as linhas VaR obtidas pelas duas estratégias.

Figura 7: Extrapolação versus estimativas ordinárias para os níveis VaR associados aos (log) retornos do IBOVESPA.

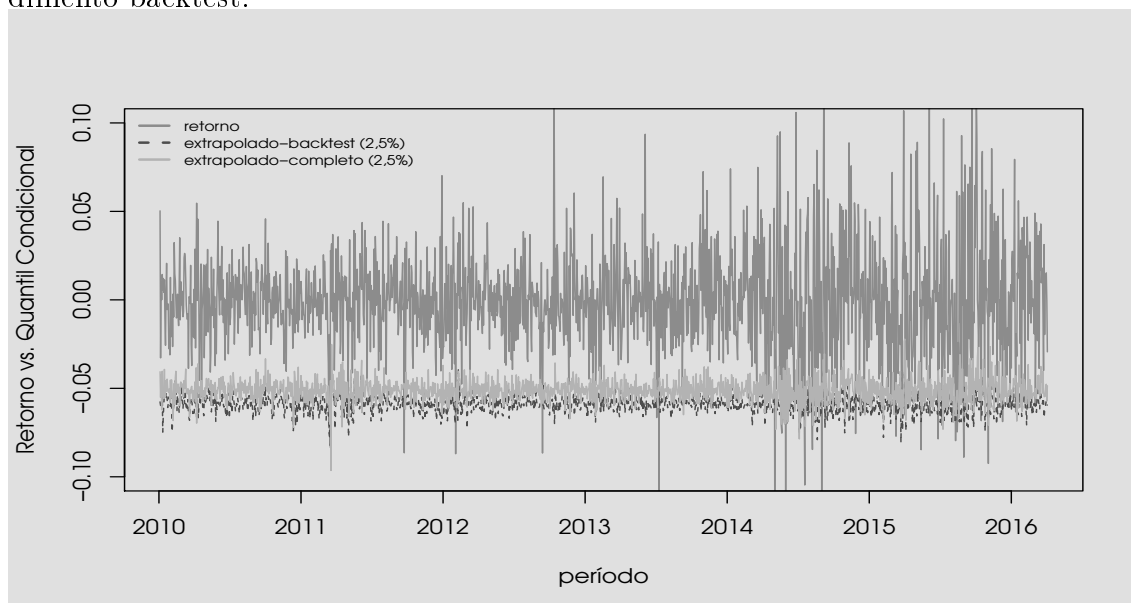


Fonte: Elaboração própria.

Tabela 8: Resumo das estatísticas de backtest para o modelo de regressão quantílica considerando as curvas VaR extremas estimadas para a petr3. Quantil crítico do teste bernoulli é de 3,84 a 5% de significância.

τ	violações (em %)	VR	estatística LR
2,5%	3,59	1.44	7.48
1%	1,27	1.27	1.21
0,1%	0,23	2.32	2.18

Figura 8: Estimativas VaR extrapoladas associados aos (log) retornos da PETR3 com e sem procedimento backtest.



Fonte: Elaboração própria.

5 Conclusões

A aplicação empírica obtida no presente artigo evidencia que o mercado financeiro brasileiro apresenta retornos negativos extremos com uma maior frequência esperada do que aquela observada em séries sob hipótese de normalidade condicional. Nesse sentido, as abordagens tradicionais costumam subestimar o VaR e o erro de estimação pode aumentar à medida que a ênfase de estudo recai sob quantis mais extremos. Essa característica observada nos mercados torna útil o desenvolvimento de técnicas de estimação mais sofisticadas e com esse propósito a regressão quantílica para valores extremos torna-se bastante atrativa, pois não necessita de especificação prévia dos parâmetros da distribuição, sendo denominado um método semiparamétrico. Adicionalmente, a modelagem possibilita verificar quais são os fatores de risco que afetam a série financeira de interesse.

O trabalho também adentra no arcabouço da teoria do valor extremo. Com esse propósito, a TVE aprimora a regressão quantílica na estimação do VaR associado a eventos extremos ('raros'). Com isso, estima-se a densidade da cauda da distribuição, a qual é caracterizada pelo índice de cauda. Com a estimativa deste índice realizam-se inferências sobre o VaR via bootstrap (método extrapolado), dando maior capacidade para mensurar o risco em quantis mais extremos.

Na aplicação para o IBOVESPA as variações na taxa de câmbio e nos juros impactam negativamente os níveis VaR associados a quantis mais extremos. Adicionalmente, o impacto (em valor absoluto) associado aos juros é muito superior para o quantil 0,1%. As estimativas dos índices de cauda evidenciam (log) retornos do IBOVESPA distribuindo-se em concordância com distribuições de caudas pesadas, em conformidade com a teoria em finanças. No que tange ao método de extrapolação, este mostra-se como uma solução para a previsão do VaR em quantis muito extremos. Por conseguinte, os resultados dos backtesting revelam uma boa precisão do modelo de regressão quantílica ajustado para o IBOVESPA.

Considerando os (log) retornos das ações da Petrobrás (PETR3) observa-se a variação (defasada em um período) do IBrX50 impacta no VaR aos níveis 10% e 5%. Além disso, observa-se uma mudança no sinal do impacto à medida que o VaR se aproxima de níveis τ próximos de zero. Para esses quantis estima-se impacto positivo. Os log retorno do preço do petróleo mostram-se significativos (impacto positivo) para os níveis VaR_{5%} e VaR_{10%}. Como no IBOVESPA, as estimativas do índice de cauda revelam log retornos em acordo com densidades tendo caudas pesadas. A análise gráfica evidencia que as estimativas extrapoladas mostram-se satisfatórias. Os resultados do backtesting evidenciam que o modelo de regressão quantílica para valores extremos é adequado na estimação do VaR para a PETR3.

Finalmente, o artigo evidencia que a regressão quantílica para valores extremos pode ser usada para fazer boas previsões do VaR no mercado financeiro brasileiro. A abordagem utilizada é proposta por Chernozhukov & Du (2006) que além de prever o VaR, ainda mostra quais variáveis correlatas afetam o VaR da série estudada. Nesse sentido, a presente pesquisa demonstra uma abordagem que pode ser usada para prever o VaR no mercado financeiro Brasileiro.

6 Agradecimentos

O segundo autor agradece o apoio financeiro parcial do CNPq.

Referências

- Adrian, T. & M. K. Brunnermeier (2009). Covar: a method for macroprudential regulation. *Federal Reserve Bank of New York Staff Report 348*.
- Adrian, T. & M. K. Brunnermeier (2011). Covar. Technical report, National Bureau of Economic Research.

- Almeida, C., R. Gomes, A. Leite, & J. Vicente (2008). Movimentos da estrutura a termo e critérios de minimização do erro de previsão em um modelo paramétrico exponencial. *Revista Brasileira de Economia* 62(4), 497–510.
- ASSAF, N. (2011). Mercado financeiro.
- Bjørnland, H. C. & K. Leitemo (2009). Identifying the interdependence between us monetary policy and the stock market. *Journal of Monetary Economics* 56(2), 275–282.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics* 31(3), 307–327.
- Carvalho da Silva, A. & B. V. Mendes (2003). Value-at-risk and extreme returns in asian stock markets. *International Journal of Business* 8.
- Chen, N.-F., R. Roll, & S. A. Ross (1986). Economic forces and the stock market. *Journal of business*, 383–403.
- Chernozhukov, V. (2005). Extremal quantile regression. *Annals of Statistics*, 806–839.
- Chernozhukov, V. & S. Du (2006). Extremal quantiles and value-at-risk. *mit Department of economics working Paper*.
- Chernozhukov, V. & L. Umantsev (2001). Conditional value-at-risk: Aspects of modeling and estimation. *Empirical Economics* 26(1), 271–292.
- Danielsson, J. (2011). *Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*, Volume 588. John Wiley & Sons.
- Dekkers, A. L. & L. De Haan (1989). On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *The Annals of Statistics*, 1795–1832.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987–1007.
- Engle, R. F. & S. Manganelli (2004). Caviar: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. *Journal of Business & Economic Statistics* 22(4), 367–381.
- Fisher, R. A. & L. H. C. Tippett (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Volume 24, pp. 180–190. Cambridge Univ Press.
- Fox, M. & H. Rubin (1964). Admissibility of quantile estimates of a single location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1019–1030.
- Fréchet, M. (1927). Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables. *Fundamenta Mathematicae* 9(1), 25–32.
- Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d’une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, 423–453.
- Gropp, R., Z. Adams, & R. Füss (2010). Systemic risk, contagion, and state-dependent sensitivities in value-at-risk estimation: Evidence from hedge funds. *Frankfurt a. M.: Verein für Socialpolitik*.
- Grôppo, G. d. S. (2004). *Causalidade das variáveis macroeconômicas sobre o Ibovespa*. Ph. D. thesis, Universidade de São Paulo.

- Gumbel, E. (1958). *Statistics of extremes*. 1958. *Columbia Univ. press, New York*.
- Gumbel, E. J. & J. Lieblein (1954). *Statistical theory of extreme values and some practical applications: a series of lectures*, Volume 33. US Government Printing Office Washington.
- Haan, L. (1970). *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*. Mathematisch Centrum.
- Hill, B. M. et al. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The annals of statistics* 3(5), 1163–1174.
- Ibragimov, R. & J. Walden (2007). Value at risk under dependence and heavy-tailedness: Models with common shocks. *Harvard Institute of Economic Research Discussion Paper* (2139).
- Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 81 (348), 158–171.
- Jorion, P. (1997). Value at risk: The new benchmark in controlling market risk. *Irwin, Chicago* 1, 997.
- Junior, T. P. & R. H. Higuchi (2008). Variáveis macroeconômicas e o ibovespa: um estudo da relação de causalidade. *Revista Eletrônica de Administração* 14(2), 296–315.
- Júnior, T. P. & F. R. Scherma (2010). Um estudo da influência entre o dólar e o ibovespa no período 1999–2003. *GESTÃO. Org-Revista Eletrônica de Gestão Organizacional* 3(1).
- Kaufman, G. G. et al. (2000). Banking and currency crises and systemic risk: Lessons from recent events. *Federal Reserve Bank of Chicago Economic Perspectives* 24(3), 9–28.
- Koenker, R. & G. Bassett (1978). Regression quantiles. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 33–50.
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The J. of Derivatives* 3(2).
- Longerstaeey, J. & More (1995). Introduction to riskmetrics. *Morgan Guaranty Trust Company, Market Risk Research, JPMorgan*.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. J. Wiley.
- Monteiro, J., P. M. Silva, et al. (2002). Risco de perda adicional, teoria dos valores extremos e gestão do risco: aplicação ao mercado financeiro português. *Universidade da Beira Interior*.
- Norberg, R. (1998). Embrechts p., klüppelberg c., mikosch t.(1997): Modelling extremal events for insurance and finance, springer-verlag. 645 pp (1.04 kg). issn 0172-4568, isbn 3-540-60931-8. *ASTIN Bulletin* 28(02), 285–286.
- Oliveira, J. T. (1962). *Structure theory of bivariate extremes extensions*.
- Pareto, V. (1964). *Cours d'économie politique*, Volume 1. Librairie Droz.
- Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *the Annals of Statistics*, 119–131.
- Rockafellar, R. T. & S. Uryasev (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk* 2, 21–42.

- Roy, A. D. (1952). Safety first and the holding of assets. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 431–449.
- Santos, T. (2006). Valor em risco auto-regressivo condicional: o caso de índices brasileiros.
- Sibuya, M. (1959). Bivariate extreme statistics, i. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 11(2), 195–210.
- Von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. math. Union interbalcanique* 1(1).
- Von Mises, R. (1954). Numerische berechnung mehrdimensionaler integrale. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 34(6), 201–210.