

## Carteiras de baixa volatilidade podem apresentar retornos elevados ? Uma análise no mercado de ações brasileiro

Jorge Augusto Dias Samsonescu\*  
Igor Alexandre Clemente de Moraes\*\*  
Guilherme Ribeiro de Macêdo\*\*\*

**Resumo:** Este artigo analisa o desempenho fora da amostra de carteiras de mínima variância e baixa volatilidade no mercado de ações brasileiro entre 2003 e 2013, comparativamente ao índice IBOVESPA e a uma carteira igualmente ponderada. As carteiras de mínima variância foram otimizadas com restrição de posições vendidas e limite de peso para os ativos. A matriz de covariância foi estimada pelo método amostral e método de encolhimento proposto por Ledoit e Wolf (2003). A carteira de baixa volatilidade foi estruturada de forma similar ao método do índice S&P 500 *Low Volatility*. O período utilizado para o rebalanceamento das carteiras foi quadrimestral e os ativos elegíveis para as carteiras foram os componentes do IBOVESPA em cada quadrimestre analisado. A comparação das carteiras foi feita através dos indicadores de retorno, desvio padrão e índice de Sharpe anualizados, MVaR e *maximum drawdown*. Os resultados apontam para a importância na escolha do limite de pesos para os ativos das carteiras de mínima variância. As carteiras de menor risco obtiveram os melhores resultados em todos os indicadores testados.

**Palavras-chave:** Carteira de mínima variância. Baixa volatilidade. Otimização de carteiras. Matriz de covariância. Avaliação de desempenho.

**Abstract:** This study analyzes the out-of-sample performance of minimum-variance and low volatility portfolios in the Brazilian stock market from 2003 to 2013, when compared to IBOVESPA index and an equally weighted portfolio. The minimum variance portfolios have been optimized with short selling restriction and weight limits for the assets. The covariance matrix was estimated by sample method and shrinkage method proposed by Ledoit & Wolf (2003). The low volatility portfolio was structured in a similar way to the S&P 500 Low Volatility index method. The portfolios rebalancing period were quarterly and the eligible assets for the portfolios were IBOVESPA components in each analyzed period. The portfolios performance was evaluated through indicators such return, standard deviation, Sharpe ratio, maximum drawdown and MVAR indicators. The results point to the importance in choosing the weight limits for the assets of minimum-variance portfolios. Lower risk portfolios delivered the best results in all tested indicators.

**Keywords:** Minimum-variance portfolio. Low volatility. Portfolio optimization. Covariance matrix. Performance measurement.

Área 8: Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças  
Classificação JEL: C46, G11, G14, G32

### 1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores axiomas da teoria financeira sugere que os investidores devem aceitar maior risco para obter melhores rentabilidades. Desde o trabalho pioneiro de Markowitz (1952), o conceito da fronteira eficiente vem sendo discutido, quando se estabeleceu os padrões para o que é conhecida como a Moderna Teoria dos Portfólios. O autor introduziu o conceito de média variância e diversificação de portfólio através da construção de carteiras eficientes com minimização de risco. As carteiras eficientes

---

\* Mestre em Economia/Unisinos.

\*\* Professor do PPGE/Unisinos.

\*\*\* Professor do PPGE/UFRGS

são combinações de ativos com o menor nível de risco esperado para determinado nível de retorno esperado, ou o maior retorno para dado nível de risco.

Estendendo o trabalho de Markowitz, Sharpe (1964) criou o modelo Capital Asset Price Model (CAPM). O modelo pressupõe que o retorno esperado de uma ação é linearmente proporcional ao risco de mercado ( $\beta$ ). Para implementar estas estratégias, há a necessidade de estimar tanto o risco como o retorno esperado. Entretanto, conforme Clarke, De Silva e Thorley (2006) salientam, estimar estes retornos é um dos principais problemas enfrentados na prática.

Porém, contrariando estas bases teóricas do modelo CAPM, Haugen e Heins (1975) constataam que ações de baixa volatilidade produzem retornos maiores que seus pares mais arriscados. Na mesma linha, Fama e French (1992) documentam que a relação entre o retorno das ações no mercado americano e o  $\beta$  de mercado foi neutra entre 1963 e 1990. As evidências destes importantes autores impulsionaram os estudos sobre carteiras de mínima variância, as quais não dependem da estimação de retornos e têm menor risco que as carteiras de média variância baseadas nas abordagens de Markowitz e Sharpe. Com isso, surgiram indícios de que as ações e carteiras com menor risco tendem a apresentar maiores retornos, o que foi chamado de “efeito volatilidade”, podendo ser destacado os estudos de Black (1993), Falkenstein (1994) e Haugen e Baker (1991).

O objetivo deste artigo é analisar o desempenho das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade no mercado de ações brasileiro<sup>1</sup>. Para tanto, utiliza-se abordagem semelhante aos estudos de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) e Rubesam e Beltrame (2013), porém com importantes diferenças. Primeiramente, este estudo é feito com rebalanceamentos quadrimestrais das carteiras, diferente daqueles autores que testam períodos diários, semanais, mensais e até trimestrais. Esta opção é tomada seguindo o padrão do índice IBOVESPA (IBOV), buscando promover uma comparação mais justa com o índice, que é utilizado como benchmark, não permitindo que a composição das carteiras seja alterada enquanto a composição do IBOV não for alterada. Outra importante diferença neste estudo é a construção de uma carteira de baixa volatilidade alternativa às conhecidas carteiras de mínima variância. Esta carteira de baixa volatilidade tem metodologia de formação que se assemelha aos índices S&P *Low Volatility* da empresa S&P Dow Jones Indices, e ao método utilizado por Blitz e Van Vliet (2007). Este método é inédito em estudos realizados no Brasil e, acredita-se que, apesar da simplicidade da carteira, esta seja a maior contribuição deste estudo.

Além da carteira de baixa volatilidade, são construídas carteiras de mínima variância, otimizadas utilizando a matriz de covariância amostral e a matriz de covariância pelo método de encolhimento proposto por Ledoit e Wolf (2003). Ademais, buscou-se contemplar no estudo, a imposição de restrição de peso aos ativos das carteiras de mínima variância, por ser um tema muito discutido depois do artigo apresentado por Jagannathan e Ma (2003).

Para tanto, na seção seguinte realiza-se uma revisão dos principais estudos sobre carteiras de mínima variância, tanto no Brasil quanto no resto do mundo. Na terceira seção, descrevem-se os dados e software utilizados no estudo, bem como as diferentes abordagens para estimação da matriz de covariância. Além disso, apresenta-se o processo de otimização das carteiras de mínima variância e os métodos para construção e análise da performance das carteiras. A quarta seção apresenta os resultados e a comparação do desempenho das carteiras. Por fim, na última seção manifestam-se as considerações finais do estudo.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

O trabalho pioneiro de Markowitz (1952) estabelece aos investidores um conceito fundamental de *trade-off* entre risco e retorno esperados. Desde então, este conceito é debatido pelos estudiosos da volatilidade em séries financeiras, com aplicações nos mercados de opções, análise de risco e formação

<sup>1</sup> A denominação “mínima variância” foi utilizada para definir as duas carteiras construídas e otimizadas para atingir a menor variância possível, enquanto a denominação “baixa volatilidade” foi utilizada para descrever a carteira de baixo risco construída com base no índice S&P500 *Low Volatility*.

de carteiras. Neste último caso, pode-se destacar os estudos sobre carteiras de mínima variância, que buscam estabelecer portfólios com a menor variância possível, independente da estimativa de retornos dos componentes da carteira.

Entre esses estudos, Haugen e Baker (1991) analisam dados dos Estados Unidos para mostrar que a carteira de mercado não é um investimento eficiente, e a comparam com uma carteira de baixa volatilidade. O estudo compreende os anos de 1972 a 1989 e as mil maiores ações do mercado americano pelo critério de capitalização de mercado. Os autores impõem algumas restrições a fim de buscar a diversificação, como uma restrição de peso máximo por ativo e por setor. Os resultados do estudo mostram que a carteira de mínima variância apresenta menor risco e retornos superiores à carteira de mercado. Outro fato notável, encontrado também por estes autores e, posteriormente, por Ang et al. (2006), é que as carteiras de mínima variância apresentam menor volatilidade conforme o esperado, mas sem comprometer o retorno realizado, que na média é maior que a carteira de mercado.

De forma semelhante, Clarke, De Silva e Thorley (2006) propõem a construção de carteiras de mínima variância para ações dos Estados Unidos, porém com dados de janeiro de 1968 a dezembro de 2005, com restrição a posições vendidas. O estudo é similar ao de Haugen e Baker (1991), mas abrange um maior período e utiliza técnicas mais avançadas de estruturação da matriz de covariância. Neste caso, a matriz de covariância é estimada inicialmente pelo processo amostral. Para contornar problemas de estimação, reestrutura-se a matriz de covariância utilizando um processo de componente principal sugerido por Connor e Korajczyk (1988), e alternativamente o processo de encolhimento proposto por Ledoit e Wolf (2003). O estudo conclui que os processos de otimização de carteira funcionam bem, a volatilidade é persistente e de certa forma previsível.

Um estudo comparativo ainda mais completo é desenvolvido por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), no qual analisam quatorze diferentes abordagens de otimização de alocação de ativos e compararam a uma simples abordagem de pesos iguais para os ativos. Os autores constatam que nenhuma das quatorze abordagens entrega um índice de Sharpe maior que a ingênua estratégia de pesos iguais. Muito se atribui a este resultado o fato de que as técnicas de otimização são sensíveis aos erros de estimação.

Além destes trabalhos, outros importantes autores apresentam trabalhos relevantes na área. É o caso de Jagannathan e Ma (2003), que analisam portfólios de mínima variância. De acordo com os autores, normalmente são restringidas as posições vendidas nas carteiras e utilizados limites máximos no peso de cada ativo no portfólio. Eles concluem que ao impor estas restrições, não permitindo posições vendidas e limitando o peso dos ativos, as carteiras são beneficiadas.

Com um estudo mais recente, Blitz, Pang e Van Vliet (2013) pesquisam a relação entre risco e retorno nos mercados de ações emergentes e encontram que essa relação é neutra ou até mesmo negativa, contrariando as teorias tradicionais como o CAPM, que prevê uma relação positiva entre risco e retorno. Isto reafirma os importantes estudos de Black, Jensen e Scholes (1972), Blitz e Van Vliet (2007), Fama e MacBeth (1973) e Haugen e Heins (1975).

No Brasil, estudos semelhantes são desenvolvidos. Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) verificam se uma carteira de mínima variância global produz resultados superiores ao IBOV e Fundos de Investimentos em Ações. O período analisado vai de janeiro de 1998 a dezembro de 2008. As ações utilizadas são as que compõem o IBOV no período da análise. Não permite-se posições vendidas nas carteiras formadas e os autores testam diferentes restrições de pesos para os ativos. A matriz de covariância é estimada pela forma clássica (amostral) e também pelo método sugerido por Leal e Mendes (2005) através de um estimador *Minimum Covariance Determinant* (MCD) de Rousseeuw (1984). Os autores concluem que a carteira de mínima variância global apresenta resultados médios superiores e desvio-padrão inferior ao IBOV. Apesar disto, os autores constatam que uma carteira mais simples com ponderação igual entre os ativos obtém retornos similares à carteira de mínima variância estudada. O trabalho indica também que a imposição de limites no peso e na quantidade dos ativos apresenta vantagens para a alocação dos ativos na carteira.

Outro estudo desenvolvido por Santos e Tessari (2012) verifica o desempenho de estratégias de otimização por média variância e mínima variância, comparados ao IBOV e uma carteira igualmente ponderada. O estudo compreende o período de março de 2009 a novembro de 2011, utilizando 45 ativos que faziam parte do IBOV tanto no início quanto no final do período analisado. A matriz de covariância é estimada através de cinco diferentes abordagens: matriz amostral, matriz *RiskMetrics* e pelo método de encolhimento através de três estimadores propostos por Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b). Os autores concluem que as carteiras otimizadas por média variância e mínima variância apresentam desempenho superior aos *benchmarks* propostos, independente da forma como a matriz de covariância tenha sido estimada. Este trabalho de Santos e Tessari (2012) difere em alguns aspectos do estudo de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011), o que pode explicar a divergência nos resultados obtidos. De acordo com os autores, uma das diferenças deste estudo é a não imposição de restrição de pesos para os ativos, tornando a carteira mais flexível. O estudo compreende um período diferente e, além disso, são utilizadas mais alternativas de estimadores para a matriz de covariância. Por fim, o algoritmo utilizado para resolver o problema de otimização é diferente da ferramenta aplicada pelos outros autores.

Seguindo a mesma linha de pesquisa, Rubesam e Beltrame (2013) realizam um estudo de carteiras de variância mínima (CVM) de ações na bolsa brasileira. O trabalho é semelhante ao de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) e de Santos e Tessari (2012), porém os autores fazem os testes com uma quantidade maior de ações do que os estudos anteriores. O período do estudo é de junho de 1998 a junho de 2011, utilizando inicialmente todas as ações negociadas na janela de tempo estudada e que atenderam alguns critérios dos autores.

A matriz de covariância utilizada nas CVM é estimada pelos autores através de diferentes métodos. O mais simples é através da matriz de covariância amostral. Testa-se ainda, outros três diferentes modelos para estimar a matriz de covariância. Um deles é através do processo de encolhimento semelhante ao usado por Santos e Tessari (2012). O outro método utilizado é a ponderação exponencial ou EWMA (*Exponentially-Weighted Moving Average*). Este método pondera exponencialmente dando maior peso para os dados mais recentes. Para isso, o método incorpora um parâmetro de decaimento das ponderações, e este parâmetro é meramente arbitrário. Por fim, é utilizado o método DCC-GARCH multivariado.

Além das CVM, os autores constroem uma carteira que maximiza a razão de Sharpe (CRS). Teoricamente, esta carteira produz o melhor retorno ajustado à volatilidade. Também elabora-se uma carteira que maximiza a média geométrica dos retornos (CMG). (Ver, por exemplo, CHRISTENSEN, 2005). Por fim, os autores criam uma simples carteira igualmente ponderada (CIP). Para todas essas abordagens, é utilizada uma restrição de posição vendida que depois é liberada, permitindo carteiras 130/30. Além desta, é testada uma restrição para o peso máximo de cada ativo nas carteiras.

Os resultados são comparados ao IBOV e aos outros *benchmarks* de otimização (CRS, CMG e CIP), e indicam que o desempenho das CVM é melhor e estatisticamente significativa. O estudo aponta que os métodos mais simples de estimação da matriz de covariância produzem os melhores resultados. Outra constatação é que as carteiras que utilizam as médias históricas de retorno no processo de otimização produzem resultados ruins fora da amostra.

Além desses estudos que investigam a construção de carteiras de mínima variância, muitas pesquisas são desenvolvidas para analisar o comportamento da volatilidade em séries financeiras. Alguns autores modelam a volatilidade de índices de ações no Brasil, e destacam-se Da Silva e Da Silva (2013), Jubert et al. (2009), Medeiros (2012), e Mól, Dos Santos Felipe e Júnior (2014), onde todos verificam características de assimetria e persistência da volatilidade.

Por fim, esta seção busca descrever os principais estudos sobre carteiras de mínima variância, identificando em linhas gerais, que as carteiras de menor risco tendem a ser uma boa opção de investimento. Na próxima seção apresentam-se os dados e metodologia utilizados no trabalho.

### 3 METODOLOGIA E DADOS

Utilizou-se neste artigo dados de retorno diário do IBOV e das ações que compuseram o índice no período de janeiro de 2003 até dezembro de 2013. A composição de cada quadrimestre da carteira teórica do IBOV foi obtida através do sistema de recuperação de informações da BM&FBovespa. As informações sobre retorno do IBOV e dos ativos foram obtidas na base da Economática. As informações referentes a mudanças de códigos, fusões, aquisições e cancelamento de ativos listados foram coletadas através do sistema de notícias Bloomberg. Além disso, foram utilizados os dados de retorno do CDI<sup>2</sup> diário para o cálculo do índice de Sharpe das carteiras. Os ativos lançados na bolsa e que entraram no IBOV antes de um ano de negociações não foram utilizados para o cálculo da matriz de covariância e tampouco para a formação da carteira de baixa volatilidade, por não haver dados suficientes para a estimação. Assim que estes ativos completaram um ano de existência (e se mantiveram no IBOV), foram disponibilizados para utilização nas carteiras.

Todos os cálculos necessários para a formação das carteiras foram realizados no *software* livre R (TEAM, 2014), através do ambiente integrado de desenvolvimento RStudio. (RSTUDIO, 2014). No ambiente do *software*, além das funções disponíveis no pacote base, foram utilizados diferentes pacotes para os cálculos e estimações. O pacote *xts* (RYAN; ULRICH, 2014) foi necessário para a formatação dos dados para o estilo “série de tempo”. Para estimar a matriz de covariância pelos métodos utilizados, foi usado o pacote *tawny* (ROWE, 2014), e a otimização quadrática das carteiras de mínima variância foi feita através do pacote *quadprog* (TURLACH; WEINGESSEL, 2013). Todas as estatísticas das carteiras construídas, bem como os gráficos gerados, foram possíveis através do pacote *PerformanceAnalytics* (PETERSON; CARL, 2014).

Desta forma, foram construídas quatro diferentes carteiras quadrimestrais: (i) carteira com pesos igualmente ponderados; (ii) carteira de mínima variância através da matriz de correlação pelo método de encolhimento (CMVL) com restrição de pesos de 8% para os ativos; (iii) carteira de mínima variância através da matriz de correlação amostral (CMVA) com restrição de pesos de 6% para os ativos; (iv) carteira de baixa volatilidade calculada com 17% de ativos menos voláteis do total da carteira IBOV.

Para a estimação da matriz de covariância, tanto pelo método de encolhimento como pelo método amostral, foi utilizado um processo semelhante ao que Clarke, De Silva e Thorley (2006) realizaram para dados diários, através de janelas móveis. No início de cada quadrimestre, iniciando em janeiro de 2003, a matriz de covariância dos ativos que compõem o IBOV no início do mesmo período (janeiro de 2003) foi estimada pelos dois métodos, através do histórico de retorno diário dos últimos doze meses, de janeiro de 2002 a dezembro de 2002. Com esta matriz, foi feita a otimização dos pesos dos ativos para compor as carteiras de mínima variância. O mesmo processo de janelas móveis foi realizado para a carteira de baixa volatilidade, porém sem a necessidade de estimação da matriz de covariância. As carteiras foram mantidas sem qualquer alteração por todo o quadrimestre.

No momento seguinte, o processo foi realizado para o próximo quadrimestre que se iniciou em maio de 2003, utilizando para a estimação das matrizes e carteiras o histórico de retorno das ações no período de maio de 2002 a abril de 2003. A cada quadrimestre o processo se repetiu, movendo a janela um quadrimestre à frente. Desta forma, as carteiras são estimadas para trinta e três quadrimestres fora da amostra (11 anos), e posteriormente comparadas ao IBOV, que serve como *benchmark*. A carteira CIP não passou por nenhum processo de otimização ou análise de retornos históricos e foi calculada atribuindo-se o mesmo peso para todos os ativos que compuseram o IBOV no quadrimestre analisado.

#### 3.1 Otimização por mínima variância

A otimização de carteiras é um tema bastante abordado desde os trabalhos de Markowitz (1952,1959). Nestes estudos o autor definiu o modelo de média variância para a seleção de portfólios, que posteriormente passou a ser considerada a base para a Moderna Teoria do Portfólio. Estes estudos

<sup>2</sup> O certificado de depósito interbancário (CDI) é utilizado como ativo livre de risco.

levantaram um contraponto à ideia que perdurava na época, que consistia em concentrar os investimentos em ativos que apresentavam os maiores retornos esperados. O autor demonstrou que uma carteira diversificada poderia entregar retornos superiores ao de uma carteira concentrada. Uma das bases do modelo é que o investidor maximiza a utilidade em função do risco e retorno esperados. Isso significa dizer que o investidor é avesso ao risco, e o grau de aversão, define o prêmio de risco esperado. Markowitz definiu como medida de risco a variância dos retornos dos ativos. Então, quanto maior a variância e quanto mais avesso ao risco é o investidor, maior deve ser o retorno esperado. Para o autor, o retorno esperado é uma variável aleatória com distribuição normal.

Assim, a otimização de carteira por média variância sugerida por Markowitz passa pela solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} \min_w w' \hat{\Sigma} w - \frac{1}{\gamma} \hat{\mu}' w \\ \sum_i w_i = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $w \in \mathbb{R}^N$  são os vetores de pesos dos ativos na carteira,  $\hat{\mu}' w$  é a média amostral dos excessos de retornos da carteira,  $w' \hat{\Sigma} w$  é a variância amostral dos retornos da carteira e  $\gamma$  é o parâmetro de aversão ao risco. A restrição  $\sum_i w_i = 1$  garante que a soma dos pesos atinja 100%, significando investimento total da carteira. Um requisito adicional normalmente utilizado é a impossibilidade de posições vendidas e um limite máximo  $y$  de peso para as ações, o que acrescenta a seguinte restrição ao problema de otimização

$$\forall i : 0 \leq w_i \leq y$$

Um dos problemas que podem surgir na abordagem de média variância é a ocorrência de erros na estimação dos retornos dos ativos. Sabe-se que a estimação de retornos tem um grau de dificuldade maior que a estimação da covariância dos ativos (ver, por exemplo, MERTON, 1980) e pequenos erros na estimação dos retornos podem causar grande impacto nos pesos dos ativos na carteira de média variância. Entretanto, a carteira de mínima variância tem a propriedade de ser construída independente de qualquer estimação de retorno dos ativos. O objetivo das carteiras de média variância é minimizar o risco para dado retorno, enquanto a carteira de mínima variância tem a função de minimizar o risco independente do retorno esperado. (CLARKE; DE SILVA; THORLEY, 2006).

Apesar desta abordagem não seguir a função utilidade do investidor compreendida na teoria de Markowitz, pode ser considerada como um caso especial da Equação 1, com um coeficiente de aversão ao risco infinito e prêmio de risco zero. Neste caso, é ignorado o retorno esperado, e compreende-se o problema de otimização como

$$\begin{aligned} \min_w w' \hat{\Sigma} w \\ \text{sujeito a } \sum_i w_i = 1 \\ \forall i : 0 \leq w_i \leq y \end{aligned} \quad (2)$$

Conforme comentado anteriormente, não há necessidade de estimar os retornos dos ativos, assim o foco passa à estimação da matriz de covariância e à otimização dos pesos dos ativos para formar a carteira de mínima variância.

### 3.1.1 Métodos de estimação da matriz de covariância

Com o objetivo de construir a carteira de mínima variância, a matriz de covariância deve ser estimada utilizando as informações disponíveis no período anterior. Existem inúmeros métodos de estimação da matriz de covariância e, neste estudo, são utilizados o método de matriz amostral e o método de encolhimento proposto por Ledoit e Wolf (2003). A utilização da matriz amostral é muito criticada no meio acadêmico, por sofrer alguns problemas, por exemplo, quando a quantidade de ativos é maior que o período amostral. (Ver, por exemplo, DEMIGUEL et al., 2009; CLARKE; DE SILVA; THORLEY, 2006; LEDOIT; WOLF, 2004b). Como, em média, este trabalho utiliza 62 ativos, não

passando de 73 ativos e o período por amostra é em média 250 dias, não espera-se este problema comum citado pelos autores.

Enquanto existem técnicas mais sofisticadas de estimação da matriz de covariância como, por exemplo, a modelagem GARCH, decidiu-se utilizar o histórico da amostra de dados para que as principais conclusões sejam de fácil replicação. Outro motivo para a não utilização de modelagem GARCH aparece na periodicidade das carteiras: a composição não muda durante um quadrimestre ou em média, aproximadamente 82 dias. Isso significaria estimar a volatilidade pelos modelos GARCH para 82 períodos para frente, o que poderia gerar muitos erros na estimação; ou alternativamente calcular a volatilidade somente para o primeiro dia da carteira, o que tornaria a carteira muito próxima dos outros métodos utilizados no trabalho.

### 3.1.1.1 Matriz de covariância amostral

Apesar do método de estimação amostral ser pouco usado, pois impõe pouca estrutura à matriz de covariância, selecionou-se este método pela facilidade computacional e para efeito de comparação com o método de encolhimento. Se a quantidade de ativos  $N$  assume o mesmo tamanho da série histórica de retornos  $T$ , o número total de parâmetros para se estimar é muito grande. Quando  $N \geq T$ , a matriz de covariância amostral passa a ser singular (não inversível).<sup>3</sup>

Assumindo  $\mathbf{X}$  como uma matriz  $N \times T$ , e que os retornos dos ativos são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), a matriz de covariância amostral é definida por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{T} \mathbf{X} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right) \mathbf{X}' \quad (3)$$

onde  $\mathbf{1}$  são vetores de “uns” e  $\mathbf{I}$  é a matriz de identidade. A Equação 3 mostra porque a matriz de covariância amostral não é inversível quando  $N \geq T$ . Chamamos de  $s_{ij}$  as entradas de  $\mathbf{S}$ .

Este problema na estimação ofusca algumas - supostas - boas propriedades da matriz de covariância amostral, como a máxima verossimilhança sobre condições de normalidade da distribuição. Isso significa dizer que é muito provável que os parâmetros estimados sejam semelhantes aos dados que serviram como base. Isto pode ser um problema se a amostra não for muito grande, levando a erros de estimação devido à pequena quantidade de dados avaliada, ou seja, se  $T$  não for maior que  $N$ . No caso específico deste estudo, todos os períodos analisados apresentam  $T > N$ , então espera-se que a matriz amostral não reflita tantos erros na estimação.

### 3.1.1.2 Matriz de covariância pelo método de encolhimento

Os possíveis problemas resultantes da matriz amostral podem ser amenizados impondo alguma estrutura ao estimador. Para isso, Ledoit e Wolf (2003) propõem a utilização da média ponderada entre a matriz de covariância amostral e a matriz de covariância gerada pelo conhecido modelo de único fator de Sharpe (1963). Este modelo de único fator é dado pelo retorno  $x$  dos ativos  $i$  no período  $t$

$$x_{it} = \alpha_i + \beta_i x_{0t} + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

onde se considera não correlacionados o retorno de mercado  $x_{0t}$  e os resíduos  $\varepsilon_{it}$ . Assume-se também que a variância dos ativos é constante. Logo,  $Var(\varepsilon_{it}) = \delta_{ii}$ . Desta forma, a matriz de covariância subjacente ao modelo é dada por

$$\mathbf{\Phi} = \sigma_{00}^2 \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{\Delta} \quad (5)$$

onde  $\sigma_{00}^2$  é a variância dos retornos de mercado  $x_{0t}$ ,  $\mathbf{b}$  é o vetor de inclinações  $\beta$  da regressão e  $\mathbf{\Delta}$  é a matriz diagonal das variâncias dos resíduos  $\delta_{ii}$ . Denota-se  $\phi_{ij}$  as entradas de  $\mathbf{\Phi}$ . Sendo assim, Ledoit e

<sup>3</sup> Os pesos ótimos para os ativos da carteira dependem da matriz de covariância amostral invertida.

<sup>4</sup> O ordenamento de  $\mathbf{S}$  é no máximo igual ao ordenamento da matriz  $\mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}'/T$ , que é  $T - 1$ . Desta forma, quando  $N > (T - 1)$  o ordenamento da matriz fica deficitário, não sendo possível, por exemplo, estimar a matriz de covariância irrestrita.

Wolf (2003) expõem que a matriz de covariância dos retornos das ações  $x_{it}$  gerada pelo modelo de único fator de Sharpe (1963), rodando uma regressão dos retornos das ações, é dada por

$$\mathbf{F} = s_{00}^2 \boldsymbol{\vartheta} \boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{D} \quad (6)$$

onde  $s_{00}^2$  é a variância amostral dos retornos de mercado  $x_{ot}$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}$  é o vetor de inclinações  $\beta$  da regressão e  $\mathbf{D}$  é a matriz diagonal das variâncias residuais amostrais. Caracteriza-se  $f_{ij}$  as entradas de  $\mathbf{F}$ .

Alguns autores que abordaram a covariância documentaram problemas opostos: Jobson e Korkie (1980) verificaram que a performance da matriz de covariância amostral é ruim; por outro lado, Rosenberg (1974) discutiu a importância da matriz de covariância estimada além do fator de mercado, ou modelo de único fator, por exemplo. Com isso, Ledoit e Wolf (2003) concluem que um modelo que se situe entre matriz de covariância amostral e a matriz gerada pelo modelo de único fator é o mais adequado.

Assim, o estimador de encolhimento da matriz de covariância dos retornos das ações sugerido pelos autores é a média ponderada entre a matriz de covariância amostral e a matriz de covariância gerada pelo modelo de único fator

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{k}{T} \mathbf{F} + \left(1 - \frac{k}{T}\right) \mathbf{S} \quad (7)$$

O parâmetro  $k$  mede a intensidade de encolhimento para a amostra  $T$  e precisa ser estimado, pois depende de variáveis não observáveis. O cálculo de  $k$  é dado por

$$k = \frac{(\pi - \rho)}{\gamma} \quad (8)$$

onde  $\pi$  é a soma das variâncias assintóticas de  $\sqrt{T}s_{ij}$ ,  $\rho$  é a soma das covariâncias assintóticas de  $[\sqrt{T}f_{ij}, \sqrt{T}s_{ij}]$ . Por fim,  $\gamma$  é a medida do erro de especificação do modelo de único fator, definido pela soma de  $(\phi_{ij} - \sigma_{ij})^2$ .

### 3.2 Carteira de baixa volatilidade

As carteiras de mínima variância exigem a utilização de *softwares* estatísticos para a estimação, tornando a implementação pouco prática para pequenos investidores. Para contornar este problema, propõe-se a construção de uma carteira de baixa volatilidade (CBV) baseada na metodologia aplicada nos índices *S&P Low Volatility*, da empresa *S&P Dow Jones Indices*, que se auto afirma ser “a maior fonte mundial de conceitos baseados em índices, dados e pesquisa”. Os índices de baixa volatilidade da *S&P* medem o desempenho das ações menos voláteis do índice *benchmark*. Este método se assemelha ao desenvolvido por Blitz e Van Vliet (2007), com algumas alterações no tamanho da amostra, quantidade e ponderação dos ativos.

A volatilidade é definida como sendo o desvio padrão anualizado dos retornos das ações do IBOV nos últimos doze meses anteriores ao rebalanceamento da carteira. Após isso, os ativos são classificados por ordem decrescente baseado no inverso da volatilidade. Assim, os ativos com menor volatilidade são os melhores classificados e, portanto, integram a carteira de baixa volatilidade. Nos índices *S&P Low Volatility* é utilizada uma quantidade fixa destes ativos menos voláteis, pois os índices base são constituídos também por uma quantidade fixa. No caso brasileiro, o IBOV apresenta poucos ativos se comparado, por exemplo, ao índice americano, e varia a cada rebalanceamento, não tendo uma quantidade fixa.

Devido a esta particularidade do IBOV, realizou-se um ajuste na quantidade de ativos que foram selecionados para a CBV, utilizando um percentual fixo (17%) do total de ações a cada período analisado. A ponderação dos pesos da carteira CBV foi realizada a cada quadrimestre da seguinte forma

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_{anual_i}}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{anual_i}}} \quad (9)$$



onde  $w_i$  é o peso de cada ativo e  $\sigma_{anual_i}$  é o desvio padrão anualizado dos ativos.

### 3.3 Carteira igualmente ponderada

Na grande maioria dos trabalhos sobre carteiras de mínima variância (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009, KRITZMAN; PAGE; TURKINGTON, 2010, THOMÉ NETO; LEAL; ALMEIDA, 2011, SANTOS; TESSARI, 2012, RUBESAM; BELTRAME, 2013, entre outros) é utilizada a carteira igualmente ponderada pela sua facilidade de construção e para servir como um *benchmark* alternativo aos índices de mercado. Em algumas pesquisas, esta carteira apresentou desempenho superior ao mercado e até mesmo às carteiras otimizadas.

Neste estudo, a CIP foi constituída com base nos ativos do IBOV do quadrimestre analisado. Os pesos da CIP, para  $N$  ações, são dados por

$$\forall i : w_i = \frac{1}{N} \quad (10)$$

### 3.4 Medidas de avaliação de desempenho das carteiras

A análise das carteiras construídas foi feita através de indicadores amplamente utilizados no mercado financeiro e nos estudos da área. Para este propósito, utilizou-se medidas de retorno dos ativos, volatilidade, índice de Sharpe, *Value at Risk* (VaR) e *maximum drawdown*. Os indicadores de retorno e índice de Sharpe são considerados melhores quando maior for seu valor, enquanto a medida de volatilidade é considerada melhor quanto menor for o valor. As medidas de VaR e *maximum drawdown* geram valores negativos, então quanto menor o valor em módulo, melhor.

#### 3.4.1 Retorno das carteiras

Ao comparar as carteiras por um longo período, é mais prático utilizar valores padronizados na análise. O retorno anualizado é o indicador mais utilizado pelos praticantes do mercado, e também amplamente usado no meio acadêmico. O retorno composto anualizado é calculado da seguinte forma

$$RA_t = \left( \prod_{i=1}^T (1 + R_i) \right)^{f/T} - 1 \quad (11)$$

onde  $R_i$  é o retorno da carteira no período  $i$  e  $f$  é o número de períodos  $T$  em um ano. O retorno  $R_i$  é dado por

$$R_i = \sum_{x=1}^n w_x x_i \quad (12)$$

sendo  $x_i$  o retorno do ativo  $x$  no período  $i$ .

#### 3.4.2 Volatilidade

Para a análise do risco foi utilizada a medida de desvio padrão anualizado

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2} \quad (13)$$

$$\sigma_{anual} = \sigma \sqrt{f} \quad (14)$$

onde  $R_i$  é o retorno da carteira no período  $i$ ,  $\bar{R}$  é o retorno médio da carteira no período e  $\sigma_{anual}$  é o desvio padrão anualizado.

### 3.4.3 Índice de Sharpe

Naturalmente, assume-se que os investidores são avessos ao risco. Dado dois ativos ou carteiras com o mesmo retorno, o investidor irá preferir o de menor risco. Porém, quando as carteiras apresentam diferentes valores de retorno e risco, não é possível fazer esta comparação de maneira direta. Para isso, o Nobel William Sharpe desenvolveu uma ferramenta para resolver este problema. O índice de Sharpe calcula a relação entre risco e retorno, através do excesso de retorno em relação ao desvio padrão da carteira, determinando assim a recompensa (retorno) por unidade de risco (desvio padrão) que a carteira foi exposta. O cálculo do índice é expresso por

$$IS = \frac{(R_z - RF_z)}{\sigma_z} \quad (15)$$

$$IS_{anual} = IS\sqrt{3} \quad (16)$$

onde  $R_z$  é o retorno da carteira no período  $z$ ,  $RF_z$  é o retorno do ativo livre de risco no período  $z$  e  $\sigma_z$  é o desvio padrão da carteira no período  $z$ . Na análise deste trabalho, assume-se que  $z = quadrimestre$  e  $IS_{anual}$  é o índice de Sharpe anualizado.

### 3.4.4 Modified Value at Risk

O VaR estima a pior perda potencial da carteira em situações normais de mercado, em um determinado horizonte temporal, a um determinado nível de confiança estatística. Devido à característica das carteiras (assimetria e curtose) sugerir uma distribuição não-normal, foi utilizado o cálculo do VaR modificado (MVaR) que foi proposto por Zangari (1996), que leva em conta estes valores de assimetria e curtose de distribuições não-normais. A modificação foi feita utilizando a expansão de Cornish e Fisher (1938) e é calculada por

$$MVaR = -\hat{\mu}'w - q_\alpha^{cf} \sqrt{w'\hat{\Sigma}w} \quad (17)$$

onde  $q_\alpha^{cf}$  é a porção  $(1 - \alpha)$  da distribuição, estabelecida pela expansão de Cornish-Fisher. Este quantil pode ser calculado usando a seguinte fórmula

$$q_\alpha^{cf} = q_\alpha + \frac{(q_\alpha^2 - 1)\hat{s}_T}{6} + \frac{(q_\alpha^3 - 3q_\alpha)\hat{k}_T}{24} - \frac{(2q_\alpha^3 - 5q_\alpha)\hat{s}_T^2}{36} \quad (18)$$

onde  $q_\alpha$  é a porção  $(1 - \alpha)$  da distribuição normal,  $\hat{s}_T$  é a assimetria no período  $T$  e  $\hat{k}_T$  é a medida de curtose no período  $T$ .

### 3.4.5 Maximum Drawdown

O *maximum drawdown* computa a perda máxima percentual, partindo de um ponto máximo da série até o ponto mínimo, antes que seja atingido um novo máximo. O estimador do indicador passa por todos os períodos da amostra e calcula o retorno composto  $R$  para cada período. O *maximum drawdown* será o menor valor destes retornos compostos, calculado por

$$MDD(T) = \max_{\tau \in (0, T)} \left[ \max_{t \in (0, \tau)} R_t - R_\tau \right] \quad (19)$$

Esta seção expôs os dados utilizados no estudo, os métodos para estimação da matriz de covariância dos ativos, assim como as variadas métricas utilizadas para a avaliação da performance das carteiras formadas. A partir deste momento, ao referir-se sobre indicadores de retorno, risco e índice de Sharpe, assume-se a utilização na forma anualizada. A próxima seção apresenta a análise dos resultados.

## 4 RESULTADOS

A análise dos resultados foi feita comparando os indicadores de retorno, desvio padrão e índice de Sharpe, além de métricas de perda como o MVaR e *maximum drawdown*. A análise (Tabela 1) indicou superioridade dos retornos das carteiras de mínima variância estimadas pelo método de encolhimento e amostral (CMVL e CMVA) e baixa volatilidade (CBV), se comparadas ao IBOV e à CIP. A carteira de

melhor resultado foi a CBV, obtendo retorno de 23,72%, aproximadamente 57% maior que o IBOV, enquanto as carteiras CMVL e CMVA performaram 23,53% e 21,99%, respectivamente. O retorno do IBOV foi de 15,10% enquanto a CIP obteve retorno de 20,18%.

A observação do risco das carteiras CMVL e CMVA mostrou um desvio padrão de 19,75% e 20,58% respectivamente, aproximadamente 30% menores se comparados ao IBOV e à CIP, com 28,67% e 26,58% de risco. Este resultado era esperado, uma vez que as carteiras são otimizadas para apresentar o menor risco possível. A carteira CBV auferiu desvio padrão de 19,93%, apenas 0,9% superior que a CMVL e 3,1% inferior a CMVA, apesar de não passar pelo processo de otimização por mínima variância. Esse resultado demonstrou ser possível formar carteiras (CBV) com métodos mais simples e obter performance consistente, com menor risco e com facilidade de implementação.

Tabela 1 - Resumo dos resultados

INDICADOR	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
Retorno anualizado	15,10%	20,18%	23,53%	21,99%	23,72%
Desvio padrão anualizado	28,67%	26,58%	19,75%	20,58%	19,93%
IS anualizado	0,06	0,23	0,46	0,38	0,47

Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

Considerando a análise da razão de Sharpe, ficou ainda mais evidente a superioridade das carteiras de menor risco. As carteiras de mínima variância CMVL e CMVA apresentaram índice de Sharpe de 0,46 e 0,38 respectivamente, e a carteira de baixa volatilidade CBV conquistou um índice de Sharpe de 0,47. O IBOV gerou índice de Sharpe de 0,06 e a CIP de 0,23. Para fins comparativos, o índice de Sharpe da CBV foi quase oito vezes superior ao indicador do IBOV e o dobro do número apresentado pela CIP. O resumo das informações de retorno, desvio padrão e índice de Sharpe anualizado foram apresentados na Tabela 1.

Além disso, as carteiras formadas apresentaram alta correlação com o IBOV, compreensível pelo fato de serem calculadas através dos ativos que compõem o índice de mercado (Tabela 2). A CIP naturalmente apresentou a maior correlação, de 0,97, pois foi composta pelos mesmos ativos do IBOV, somente com diferente ponderação. As carteiras de mínima variância CMVL e CMVA manifestaram correlações de 0,85 e 0,87 respectivamente, enquanto que a carteira de baixa volatilidade CBV teve correlação de 0,82.

Tabela 2 – Estatísticas das carteiras vs. IBOV

ESTATÍSTICAS	CIP	CMVL	CMVA	CBV
Beta ( $\beta$ )	0,90160	0,58390	0,62670	0,57030
Correlação	0,97260	0,84790	0,87310	0,82050
p-valor (correlação)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

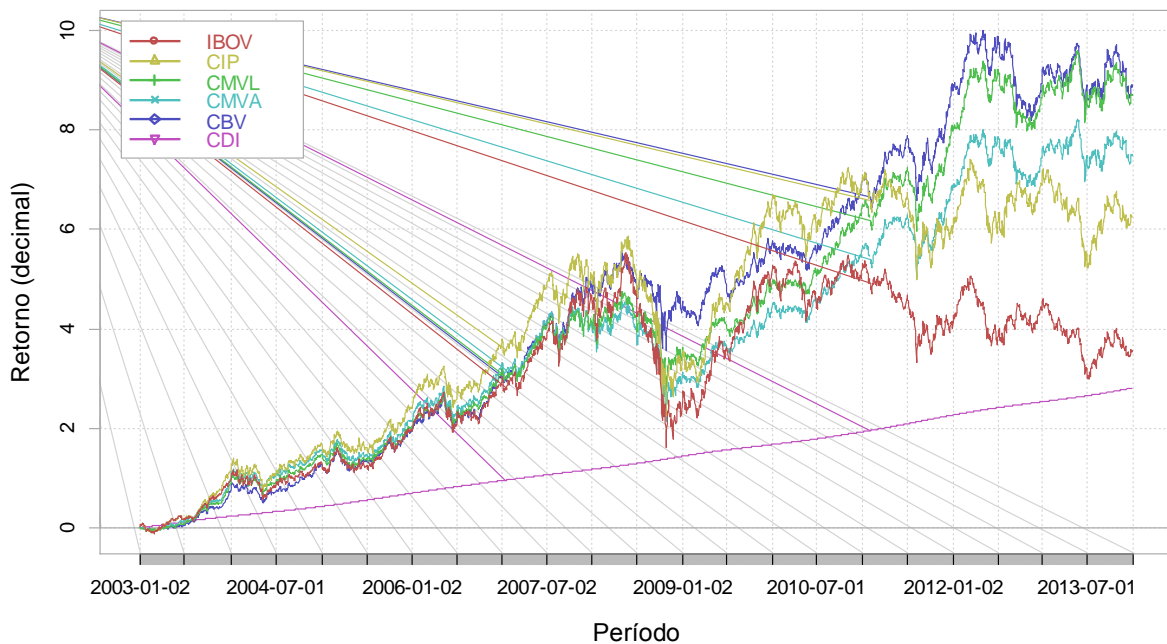
Apesar da alta correlação das carteiras com o IBOV, o  $\beta$  das carteiras de menor risco foi baixo (Tabela 2), sugerindo um movimento em menor magnitude do que o IBOV. A CIP apresentou  $\beta$  de 0,90, porém as carteiras CMVL, CMVA e CBV revelaram  $\beta$  de 0,58, 0,63 e 0,57, respectivamente. Como pode ser verificado no Gráfico 1, as carteiras se moveram na mesma direção do IBOV na maior parte do tempo, porém em menor grandeza (com exceção ao período de 2011) devido ao baixo valor do  $\beta$ .

Verificando os dados de risco, retorno e  $\beta$  das carteiras, constata-se que os resultados não seguem a tradicional abordagem do modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), onde o retorno esperado dos ativos é proporcional ao seu  $\beta$  ou desvio padrão, pois as carteiras com menor  $\beta$  e menor desvio padrão geraram um retorno superior ao índice de mercado. Essas constatações corroboram os estudos sobre a

relação entre risco e retorno. (Ver, por exemplo, BLACK; JENSEN; SCHOLES, 1972; FAMA; MACBETH, 1973; HAUGEN; HEINS, 1975; BLITZ; PANG; VAN VLIET, 2013).

Ademais, a carteira formada através da matriz de covariância estimada pelo método de encolhimento (CMVL) apresentou resultados ligeiramente melhores que a carteira criada através matriz de covariância amostral (CMVA). Esta superioridade corrobora estudos de estimação das matrizes de covariância (JOBSON; KORKIE, 1980, LEDOIT; WOLF, 2003, 2004a, 2004b) que explicitam a melhora que o método de encolhimento da matriz provoca na otimização de carteiras. Ledoit e Wolf (2004a) vão além e afirmam não haver mais razões para utilizar a matriz amostral.

Gráfico 1 - Comparativo de rentabilidade acumulada



Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

Pressupõe-se que a afirmação de Ledoit e Wolf (2004a) é válida e, com base nos resultados iniciais, a partir deste momento a análise foi feita com a carteira formada através da matriz de covariância encolhida (CMVL)<sup>5</sup>. Já a carteira igualmente ponderada (CIP), muitas vezes sugerida como uma alternativa de investimento simples, apresentou resultados gerais inferiores às carteiras de menor risco, contrariando o estudo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) amplamente discutido e analisado no meio acadêmico. O estudo destes autores sugere que a estratégia da carteira CIP supera qualquer estratégia baseada em otimização por mínima variância, o que não foi verificado para nosso mercado no período analisado. Apesar disto, a CIP teve resultado superior ao IBOV, seguindo de perto os movimentos do índice de mercado devido à alta correlação e  $\beta$ , com 8 dos 11 anos de melhor retorno que o IBOV, porém apenas 3 dos 11 anos de resultados melhores que a CBV, por exemplo.

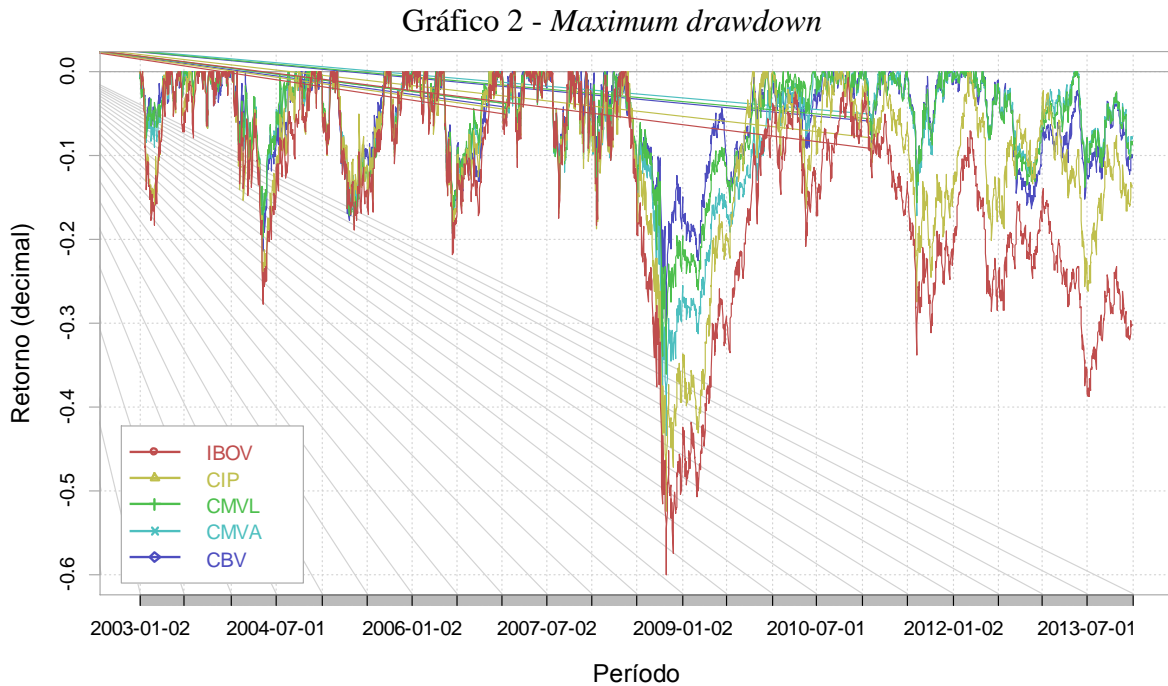
Tabela 3 - MVaR diário e *maximum drawdown*

INDICADOR	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
MVaR	-2,64%	-2,39%	-1,72%	-1,78%	-1,77%
Maximum drawdown	-59,96%	-52,46%	-36,00%	-43,43%	-30,41%

Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

<sup>5</sup> A carteira CMVA foi mantida nas tabelas e nos gráficos.

A análise do desvio padrão e índice de Sharpe permitiu comparar as carteiras em termos de risco e rentabilidade, porém não são suficientes para estimar o risco absoluto de perda da carteira. Portanto, considerou-se na análise outros indicadores utilizados no mercado financeiro, focados em estimar o risco inerente dos portfólios, buscando confirmar o menor risco das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade. Um destes indicadores é o *Value-at-Risk* (VaR). A CMVL, por exemplo, apresentou MVaR de -1,72%, aproximadamente 34% inferior ao reportado pelo IBOV (-2,64%). Os dados estão sumarizados na Tabela 3.



Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

Além do MVaR, foi utilizado o indicador *maximum drawdown* para medir a perda máxima das carteiras estimadas. Novamente, a carteira de mínima variância e a carteira de baixa volatilidade apresentaram resultados melhores que o IBOV (Tabela 3). A maior perda registrada pelas carteiras CMVL e CBV foi de 36% e 30,41%, respectivamente. O IBOV apresentou uma perda máxima de 59,96% do topo até o ponto mínimo, representando aproximadamente o dobro da maior perda da CBV. A CIP teve a maior perda de 52,46%. Essas perdas ocorreram no período da crise de 2008, mais precisamente a partir do pico no dia 06 de maio de 2008 (21 de maio de 2008 para o IBOV e 02 de junho de 2008 para a CIP) chegando ao fundo no dia 27 de outubro de 2008, como pode ser visualizado no Gráfico 2.

Além do mais, ao analisar as estatísticas descritivas das séries na Tabela 4, é possível notar uma característica desejável em todas as carteiras, que é a *skewness* (assimetria) positiva. No caso da assimetria positiva, a cauda do lado direito (positivo) da distribuição dos retornos é mais longa, ou tem maior peso. Isso indica que a carteira apresenta mais resultados extremos positivos do que resultados extremos negativos. A preferência dos investidores é por uma carteira com assimetria positiva, apesar de ser uma característica difícil de ser encontrada no mercado financeiro (KRAUS; LITZENBERGER, 1976).

Tabela 4 - Estatísticas descritivas

ESTATÍSTICAS	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
Observações	2724	2724	2724	2724	2724

Retorno mínimo	-11,39%	-10,66%	-7,49%	-7,87%	-6,68%
Retorno médio	0,11%	0,11%	0,09%	0,08%	0,09%
Retorno máximo	14,66%	14,27%	12,34%	12,64%	12,27%
Variância	0,030%	0,030%	0,020%	0,020%	0,020%
Desvio padrão	1,81%	1,67%	1,24%	1,30%	1,26%
Assimetria	0,11	0,16	0,18	0,19	0,18
Curtose	5,56	6,01	6,60	7,40	5,45

Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

Outro fato a ser considerado é o pior retorno apresentado pelas carteiras em um único dia (Tabela 4). O IBOV registrou um dia de retorno negativo de 11,39%, queda 52% maior que a CMVL e 70% maior que a CBV, enquanto estas carteiras apresentaram, em seus piores dias, retornos negativos de 7,49% e 6,68%, respectivamente. A CIP teve no pior dia, retorno de -10,66%. Por outro lado, o IBOV entregou o maior retorno positivo em um dia, com 14,66%, em torno de 20% melhor que as carteiras CMVL e CBV, que obtiveram retorno diário máximo de 12,34% e 12,27% na ordem, enquanto a CIP teve no melhor dia retorno de 14,27% (Tabela 4). Estas diferenças apareceram em decorrência da maior volatilidade do índice IBOVESPA e CIP em comparação às carteiras de mínima variância e baixa volatilidade, confirmando um fato estilizado já bastante discutido em estudos acadêmicos que trata da assimetria da volatilidade. Isso significa dizer que informações negativas no mercado tem um impacto maior na volatilidade do que informações positivas, fazendo com que o resultado negativo seja maior que o resultado positivo em termos absolutos (BLACK, 1976; DA SILVA; DA SILVA, 2013; MÓL, DOS SANTOS FELIPE; JÚNIOR, 2014).

#### 4.1 Análise por períodos

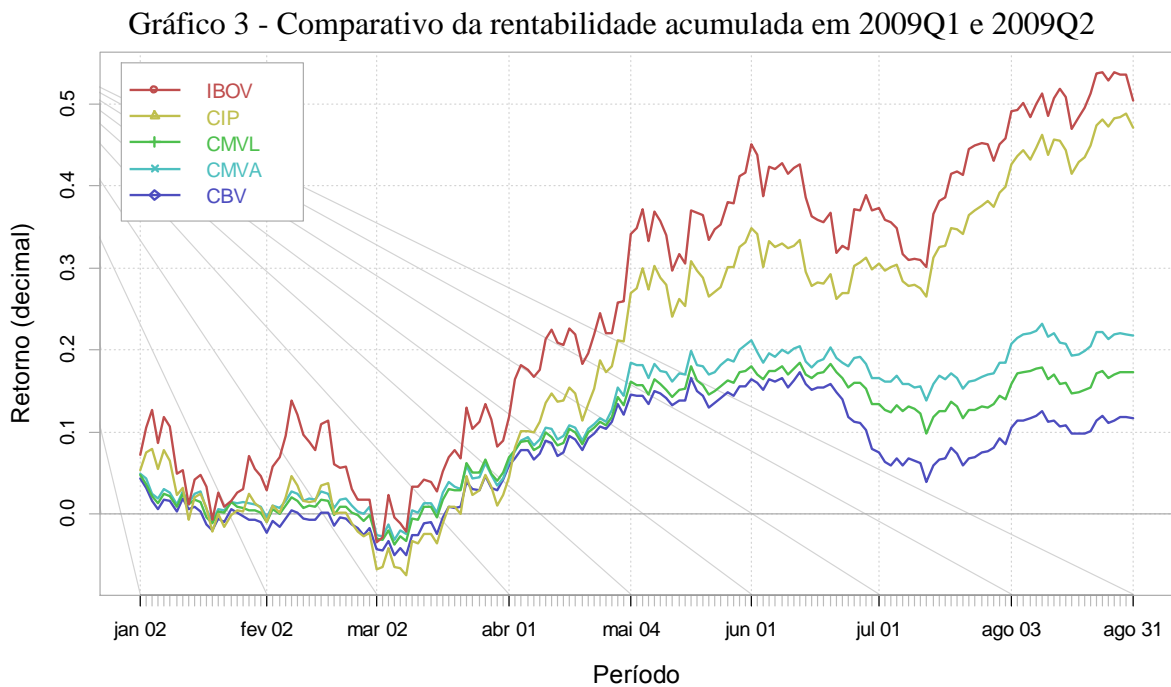
A análise da amostra por anos das carteiras CMVL e CBV apresentou retorno superior ao IBOV em 7 dos 11 anos analisados. Conforme comentando anteriormente, a CIP foi melhor que o IBOV em 8 dos 11 anos. Além disto, foi observada a superioridade dos retornos das carteiras sobre o IBOV na maior parte do tempo, confirmada pela consistência do índice de Sharpe. As carteiras CMVL e CBV apresentaram índice de Sharpe superior em 7 de 11 e em 9 de 11 anos, respectivamente, ficando ainda mais evidente a eficiência das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade na alocação do risco. A CIP teve índice de Sharpe melhor que o IBOV em 9 dos 11 anos do estudo.

O ano de 2009 foi um dos períodos em que o IBOV e a CIP superaram com grande margem as carteiras de menor risco e apresentaram retorno excepcional de 85,36% e 81,12%, enquanto CMVL e CBV entregaram 33,66% e 25,31%, na ordem. Esse resultado do IBOV foi muito forte, a ponto de apresentar um índice de Sharpe melhor que das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade, mesmo com praticamente o dobro de desvio padrão se comparado ao risco das carteiras de menor risco. Este período foi marcado pela rápida recuperação do mercado após a crise de 2008, fazendo com que os ativos apresentassem muita volatilidade. Neste caso, os ativos que elevaram o patamar do índice ficaram de fora das carteiras de menor risco, fazendo com que o retorno destas fosse inferior ao mercado.

Da mesma forma, ao investigarmos os dados pelo período de rebalanceamento das carteiras, que ocorre a cada quadrimestre, a CBV continuou apresentando retornos superiores na maior parte dos períodos (20 dos 33 quadrimestres da amostra) e melhor índice de Sharpe em 18 dos 33 períodos. A carteira CMVL obteve retorno superior ao IBOV em 18 quadrimestres, porém o índice de Sharpe foi melhor em somente 16 quadrimestres. A CIP teve melhor retorno que o IBOV em 23 dos 33 períodos e índice de Sharpe superior em 24 quadrimestres. Em um primeiro momento da análise, a CIP teve o melhor desempenho por quadrimestre na comparação com o IBOV, porém o retorno da CBV foi superior ao da CIP em 20 períodos e o índice de Sharpe foi melhor em 18 dos 33 quadrimestres. A CIP de fato foi superior ao IBOV na análise por quadrimestres, tendo mais períodos de ganho sobre o índice de mercado do que as carteiras de menor risco, devido a maior correlação com IBOV e maior  $\beta$ , se comparado a

CMVL e CBV. Portanto, quando o IBOV estava em um período de alta, a CIP também estava, além de ter apresentado maiores ganhos na maior parte do tempo. De outra forma, como o  $\beta$  e a correlação das carteiras CMVL e CBV com o IBOV apresentou um valor menor, em alguns momentos o movimento não seguiu a mesma direção e magnitude da CIP.

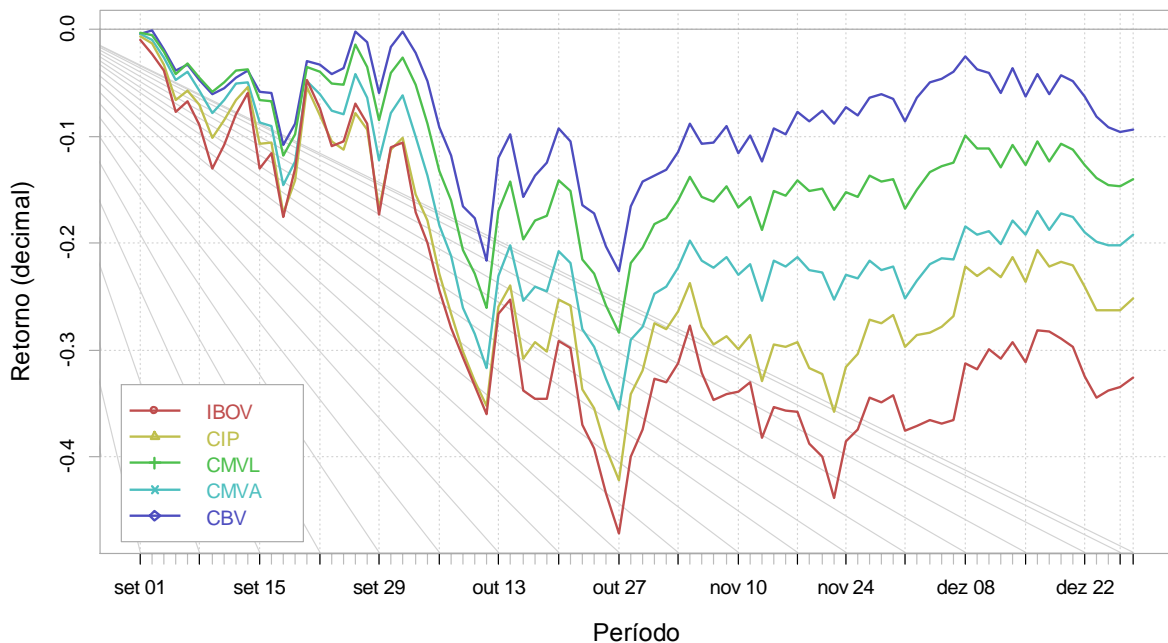
A diferença mais expressiva em favor da alta volatilidade do IBOV ocorreu em 2009, no auge da recuperação da crise do ano anterior (Gráfico 3). No primeiro quadrimestre de 2009, o retorno do IBOV foi de 104,92% e o desvio padrão de 39,77%, o mais alto em um único quadrimestre com o mercado em ascensão. Neste mesmo período, CIP, CMVL e CBV obtiveram retorno (desvio padrão) de 81,38% (31,42%), 47,60% (20,04%) e 43,03% (19,51%), respectivamente.



Fonte: Elaborado pelos autores no *software R*

No segundo quadrimestre de 2009 o IBOV teve um retorno de 70,45%, enquanto CMVL e CBV apresentaram 10,95% e -1,17%, respectivamente. A CIP teve um retorno maior que o IBOV neste período, com 79,20%. Novamente, o desvio padrão de 24,98% do IBOV neste período foi aproximadamente o dobro do risco das carteiras de menor volatilidade, porém o retorno explosivo fez com que o índice de Sharpe fosse superior.

Gráfico 4 - Comparativo da rentabilidade acumulada em 2008Q3



Fonte: Elaborado pelos autores no *Software R*

Assim, a alta volatilidade beneficiou o IBOV nos períodos de alta, mas o penalizou fortemente em períodos de queda. O terceiro quadrimestre de 2008, apresentado no Gráfico 4, demonstra este efeito quando o mercado está em baixa. Neste período o IBOV teve a maior queda registrada na amostra do estudo. Com um retorno (desvio padrão) de -69,33% (78,73%), o IBOV perdeu em termos absolutos aproximadamente 1/3 do valor de mercado neste único quadrimestre e este número não foi maior graças ao período de outubro a dezembro, onde se iniciou a recuperação da crise. As carteiras CIP, CMVL e CBV também apresentaram retorno negativo de 58,17%, 36,45 e 25,66%, respectivamente. A perda de valor absoluto da CBV, por exemplo, foi de apenas 9,41%, apesar de também ter recuperado boa parte das perdas do período a partir de outubro. Além de uma perda muito menor que o IBOV, as carteiras de menor risco apresentaram desvio padrão menor, perto de 2/3 do risco da carteira de mercado.

Portanto, o IBOV é fortemente impulsionado pela grande volatilidade nos períodos de alta, como a recuperação da crise em 2009, porém é muito prejudicado pela alta volatilidade nos períodos de baixa do mercado, como a crise ocorrida em 2008. O grande incremento na volatilidade do IBOV no período da crise é mais um sinal de que a assimetria da volatilidade é verificada no mercado de ações brasileiro.

#### 4.2 Restrições de pesos e quantidade de ativos

No período analisado, o IBOV e a CIP apresentaram em média 62 ativos na carteira, variando entre 53 e 73. A CMVL teve em média 19 ativos, com a composição variando entre 15 e 24. A CMVA foi formada em média por 22 ativos, tendo uma variação entre 18 e 26, enquanto a CBV teve em média 11 ações, variando entre 10 e 13, representando a carteira menos diversificada entre as analisadas. As carteiras CIP e CBV podem ser facilmente formadas sem a utilização de softwares estatísticos, pois não passaram pelo processo de otimização da carteira, podendo ser utilizada uma simples planilha eletrônica. Já as carteiras CMVL e CMVA passaram pelo processo de minimização da variância global, necessitando de software específico para sua implementação. Além disso, a quantidade de ativos da CBV foi muito menor que nas demais carteiras, podendo reduzir o custo de implementação da estratégia e facilitando a utilização por investidores individuais.

Os resultados das carteiras otimizadas CMVL e CMVA foram obtidos restringindo os pesos dos ativos em 8% e 6%, respectivamente. A carteira de baixa volatilidade CBV foi calculada utilizando 18% dos ativos de menor desvio padrão anualizado, dentre os componentes do IBOV. Um detalhe importante



a destacar é o fato de que a imposição de uma restrição que assuma menores pesos para os ativos das carteiras otimizadas CMVL e CMVA mostrou ser benéfica.

Foram testados limites de pesos variando de 5% a 20%, 30% e 50% por ativo e foi observado que quanto menor é este limite, maior é o retorno e o desvio padrão da carteira, com exceção da CMVL a 5% e 6%, onde o retorno diminui em comparação a restrição de 7%. Neste caso, analisar isoladamente os dados de retorno e desvio padrão não é o suficiente para compreender qual a melhor restrição para a carteira, pois o risco e o retorno aumentam à medida que se impõe uma restrição mais rígida. Porém, ao analisar a razão de Sharpe, nota-se que o maior retorno verificado compensa o ligeiro aumento do risco, resultando em um maior índice de Sharpe. Como as carteiras com limite de peso de 8% (CMVL) e 6% (CMVA) foram as que apresentaram o melhor resultado ajustado ao risco, estas foram utilizadas para o estudo comparativo.

Estas considerações sobre o limite de pesos da carteira vão ao encontro do trabalho de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011), mas divergem do trabalho apresentado por Rubesam e Beltrame (2013), onde os autores utilizaram uma restrição de 15% para os pesos dos ativos e reportaram que a utilização de uma restrição de 10% piorou ligeiramente o índice de Sharpe da carteira. Ao utilizar uma restrição de 30%, os autores citam um índice de Sharpe maior que no caso da restrição de 15%, porém não consideram relevantes estas diferenças. Então, Rubesam e Beltrame (2013, p.26) concluem que “[...] a alocação máxima não é um fator crucial para o desempenho [...]”. Estas variações do índice de Sharpe seguem movimento contrário ao verificado neste trabalho, onde, quanto menor é o percentual que os ativos podem assumir na carteira, maior é o índice de Sharpe apresentado. Assumir um limite de 30% para o peso dos ativos, como testado no estudo de Rubesam e Beltrame (2013), fez com que CMVL e CMVA apresentassem retorno 1/3 pior do que com a restrição de 8% e 6%, respectivamente, permitindo se presumir que a alocação máxima é sim um fator muito importante para o desempenho das carteiras de mínima variância, conforme já apontou Jagannathan e Ma (2003).

Vale ressaltar que Rubesam e Beltrame (2013) utilizam um universo de ativos muito maior, considerando elegíveis todos os ativos listados em bolsa, enquanto neste estudo são utilizados somente os ativos que compuseram o IBOV no período da carteira analisada. Esta diferença de quantidade de ativos disponíveis para a formação da carteira poderia explicar a diferença no resultado. O IBOV tem uma quantidade limitada de ações e estas, tem quantidade e volume de negociação muito maior que os ativos que não compõem o índice, possibilitando que as ações apresentem maior volatilidade do que as ações fora do índice. No presente estudo, restringir o peso máximo dos ativos para baixo, de forma a diversificar e diluir o risco pode fazer com que a carteira apresente possivelmente um maior índice de Sharpe.

A carteira CBV foi formada através de um percentual do total de ações que compuseram o IBOV. As ações foram classificadas por ordem crescente de desvio padrão e, após isto, foi feita a seleção do percentual de ações menos voláteis e ponderação dos pesos. Esse percentual foi testado variando de 10% a 20%, 30% e 50% das ações de menor risco. Neste caso, não houve uma definição muito clara para a relação entre percentual de ativos e retorno da carteira. Por outro lado, o comportamento do desvio padrão sugeriu uma tendência crescente à medida que aumenta a quantidade de ativos nesta carteira. O melhor retorno por unidade de risco foi obtido com a carteira configurada com 18% dos ativos menos voláteis do IBOV, portanto esta carteira foi utilizada na análise comparativa.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo mostrou que as carteiras formadas por estratégias de baixa volatilidade apresentaram performance média superior ao índice de mercado, tanto em termos de retorno absoluto, quanto em termos de retorno por unidade de risco medido pelo índice de Sharpe. Além disso, as carteiras apresentaram indicadores de risco relativamente menores, baixo  $\beta$ , desempenho superior em períodos com mercado em baixa e inferior em períodos de alta expressiva. Os resultados foram consistentes com os alcançados recentemente por Rubesam e Beltrame (2013) no Brasil, além de corroborar o trabalho

pioneiro de Haugen e Heins (1975) e tantos outros que foram realizados nas últimas décadas, revisados neste estudo.

Além disso, analisando o período específico da crise de 2008, verificou-se um comportamento “anti-bolha” nas carteiras de menor risco. Os eventos que precederam a crise geraram grande stress no mercado, fazendo com que a volatilidade dos principais ativos da bolsa (*blue chips*) se elevasse. Os ativos mais voláteis não satisfizeram os critérios de seleção das carteiras de menor risco. Logo, no momento da ruptura da bolha essas carteiras estavam compostas pelas ações menos voláteis, tendo uma queda de menor magnitude.

Portanto, os portfólios calculados com base no risco e que não dependem da estimação de retorno esperado, como as carteiras de mínima variância e baixa volatilidade, são promissores para investidores que buscam minimizar os riscos globais sem comprometer o retorno. Isso porque as carteiras de menor risco apresentaram, em média, um terço a menos de risco do que a carteira de mercado e retorno aproximadamente 50% superior.

Apesar de não ser o objetivo deste trabalho, ficou clara a melhora na estimação da matriz de covariância quando utilizado o método de encolhimento da matriz amostral proposto por Ledoit e Wolf (2003), corroborando os estudos destes autores. Complementarmente, a determinação dos pesos dos ativos nas carteiras de mínima variância foi um aspecto importante verificado neste trabalho. Enquanto o estudo mais recente de Rubesam e Beltrame (2013) não considera a determinação de pesos um fator crucial, o presente estudo verificou grande importância para os pesos dos ativos a ponto de determinar se desempenho da carteira seria superior ou inferior ao mercado e à carteira igualmente ponderada.

Logo, um estudo específico sobre a ponderação de pesos nas carteiras de mínima variância poderia trazer respostas para esta diferença constatada entre este e aquele trabalho. Esta diferença pode ser atribuída ao maior universo de ativos elegíveis no estudo daqueles autores, mas esta é uma consideração que deve ser apurada.

Da mesma forma, uma análise aprofundada do “efeito volatilidade” seria interessante para compreender qual o motivo deste comportamento que leva as ações de menor risco a apresentar maior retorno. Além disso, se fosse verificada a composição do índice *S&P 500 Low Volatility*, utilizado como modelo para a carteira de baixa volatilidade neste trabalho, seria perceptível a diminuição da exposição do índice ao setor bancário, onde foi originada a crise de 2008. Portanto, o poder preditivo de crises das carteiras de baixa volatilidade mostra-se um bom tema para estudos futuros.

Por fim, foi possível notar que as estratégias de menor risco recaem sobre carteiras com poucos ativos, sendo facilmente replicáveis por investidores individuais. A carteira de baixa volatilidade foi construída através de um método muito simples, porém ainda não havia sido explorada nos estudos realizados no Brasil e surpreendeu ao apresentar os melhores resultados.

## REFERÊNCIAS

- ANG, Andrew et al. The cross-section of volatility and expected returns. **The Journal of Finance**, v. 61, n. 1, p. 259-299, 2006.
- BLACK, Fischer. Beta and return: announcements of the ‘death of beta’ seem premature. **Journal of Portfolio Management**, p. 11-18, 1993.
- BLACK, Fischer; JENSEN, Michael C.; SCHOLLES, Myron S. The capital asset pricing model: Some empirical tests. 1972.
- BLITZ, David C.; VAN VLIET, Pim. **The volatility effect: Lower risk without lower return**. ERIM Report Series Research in Management, 2007.
- BUFFETT, Mary; CLARK, David. **O Tao de Warren Buffett**. Rio de Janeiro: Sextante, 2007.
- CHRISTENSEN, Morten Mosegaard. On the history of the Growth Optimal Portfolio. **Preprint, University of Southern Denmark**, v. 389, 2005.
- CLARKE, Roger G.; DE SILVA, Harindra; THORLEY, Steven. Minimum-variance portfolios in the US equity market. **The journal of portfolio management**, v. 33, n. 1, p. 10-24, 2006.

- CONNOR, Gregory; KORAJCZYK, Robert A. Risk and return in an equilibrium APT: Application of a new test methodology. **Journal of Financial Economics**, v. 21, n. 2, p. 255-289, 1988.
- CORNISH, Edmund A.; FISHER, Ronald A. Moments and cumulants in the specification of distributions. **Revue de l'Institut international de Statistique**, p. 307-320, 1938.
- DEMIGUEL, Victor et al. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. **Management Science**, v. 55, n. 5, p. 798-812, 2009.
- FALKENSTEIN, Eric G. **Mutual funds, idiosyncratic variance, and asset returns**. 1994. 129 f. Tese (Doutorado em Filosofia). – Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Área de Economia, Northwestern University, Evanston, 1994.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The cross-section of expected stock returns. **The Journal of Finance**, v. 47, n. 2, p. 427-465, 1992.
- HAUGEN, Robert A.; BAKER, Nardin L. The efficient market inefficiency of capitalization-weighted stock portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, v. 17, n. 3, p. 35-40, 1991.
- JAGANNATHAN, Ravi; MA, Tongshu. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. **The Journal of Finance**, v. 58, n. 4, p. 1651-1684, 2003.
- JOBSON, J. David; KORKIE, Bob. Estimation for Markowitz efficient portfolios. **Journal of the American Statistical Association**, v. 75, n. 371, p. 544-554, 1980.
- JUBERT, Roberto Wagner et al. Um estudo do padrão de volatilidade dos principais índices financeiros do Bovespa: uma aplicação de modelos ARCH. **Contabilidade, Gestão e Governança**, v. 11, n. 1-2, 2009.
- KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. Prospect theory: An analysis of decision under risk. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 263-291, 1979.
- KRAUS, Alan; LITZENBERGER, Robert H. Skewness preference and the valuation of risk assets\*. **The Journal of Finance**, v. 31, n. 4, p. 1085-1100, 1976.
- KRITZMAN, Mark; PAGE, Sébastien; TURKINGTON, David. In defense of optimization: the fallacy of 1/N. **Financial Analysts Journal**, p. 31-39, 2010.
- LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. **Journal of multivariate analysis**, v. 88, n. 2, p. 365-411, 2004b.
- MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection\*. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MERTON, Robert C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v. 8, n. 4, p. 323-361, 1980.
- PETERSON, Brian G.; CARL, Peter. Carl. **PerformanceAnalytics**: Econometric tools for performance and risk analysis. R package version 1.4.3541, 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=PerformanceAnalytics2014>>. Acesso em: 15 set. 2014.
- ROSENBERG, Barr. Extra-market components of covariance in security returns. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 9, n. 02, p. 263-274, 1974.
- ROUSSEUW, Peter J. Least median of squares regression. **Journal of the American statistical association**, v. 79, n. 388, p. 871-880, 1984.
- ROWE, Brian Lee Yung. **tawny**: Provides various portfolio optimization strategies including random matrix theory and shrinkage estimators. R package version 2.1.2, 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=tawny>>. Acesso em: 15 set. 2014.
- RUBESAM, Alexandre; BELTRAME, André Lomonaco. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 11, n. 1, p. 81-118, 2013.
- RYAN, Jeffrey A.; ULRICH, Joshua M. **xts**: eXtensible Time Series. R package version 0.9-7, 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=xts>>. Acesso em: 15 set. 2014.
- SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk\*. **The journal of finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.
- THOMÉ NETO, César; LEAL, Ricardo Pereira Câmara; ALMEIDA, Vinício de Souza. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. **Economia Aplicada**, v. 15, n. 4, p. 535-557, 2011.

TURLACH, Berwin A; WEINGESSEL, Andreas. **quadprog**: Functions to solve Quadratic Programming Problems. R package version 1.5-5, 2013. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=quadprog>>. Acesso em: 15 set. 2014.

ZANGARI, Peter. An improved methodology for measuring VaR. **RiskMetrics Monitor**, v. 2, n. 1, p. 7-25, 1996.