

Modelo Nelson-Siegel com condições de não-arbitragem para previsão de inflação a partir do mercado de títulos brasileiro

Lucas Argentieri Mariani ¹

Marcio Poletti Laurini ²

Resumo

A *breakeven inflation* (BEI), diferenciais entre rendimentos dos títulos reais e nominais de mesma maturidade, é frequentemente usada como preditor da inflação futura. O modelo aqui apresentado faz uma decomposição desse diferencial de juros em prêmios de risco e inflação implícita usando um modelo paramétrico baseado em condições de não-arbitragem. Este modelo estima conjuntamente as duas curvas usando um modelo de 4 fatores da família Nelson-Siegel. Os resultados obtidos obtêm tem previsões melhores em erro quadrático médio que as previsões do Boletim Focus. As estimações de *breakeven inflation* e de inflação implícita do modelo se mostram estimadores não viesados da inflação futura para horizontes mais curtos e carregam informação para horizontes mais longos. Os resultados indicam também que há ganhos na imposição de não arbitragem.

Palavras-chaves:Inflação, prêmios de risco e mercado de títulos

Classificação JEL: C53, E43, G17

Classificação Anpec: Área 8 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças.

Abstract

The *breakeven inflation* (BEI), differential between nominal and real yields of bonds of the same maturity, is often used as a predictor of future inflation. The model presented here makes a decomposition of that interest rate differential in risk premiums and implied inflation using a parametric model based on no-arbitrage conditions. This model jointly estimates the two curves using a model of 4 factors of Nelson-Siegel family. The results obtained have better forecasts on average squared error than the Focus Bulletin forecasts. The estimations of *breakeven inflation* and implied inflation of the model are shown unbiased estimators of future inflation for shorter horizons and carry information for longer horizons. The results also indicate that there are gains in the imposition of no-arbitrage.

Keywords:Inflation, Risk Premium e Bond Markets

¹ Departamento de Economia, FEA-RP/USP

² Departamento de Economia, FEA-RP/USP

1 Introdução

Para gerir bem uma política monetária os Bancos Centrais estão interessados nas expectativas de inflação dos consumidores e empresários. Essas expectativas dos agentes são importantes na determinação da inflação futura. Em geral os dados de inflação futura vem de duas fontes principais: das pesquisas de expectativas (*surveys*) e das informações contidas em ativos no mercado financeiro. Dados provenientes de pesquisas tem uma frequência mais baixa, enquanto os dados do mercado de ativos transacionados tem frequência mais alta. Outra limitação das pesquisas é que temos expectativas de mercado somente para horizontes de 1 ano, o que faz com que não tenhamos acesso à inflação de longo prazo. Isso faz com que o Banco Central não possa verificar se as expectativas de mercado da inflação de longo prazo estão alinhadas com as metas da autoridade monetária.

Já no caso de preços do mercado financeiro, podem ser acessados diariamente ou até mesmo de forma *intra-day*, além de poderem gerar informação para uma variedade maior de horizontes. No caso brasileiro podemos estimar a inflação esperada de até 5 anos a frente. Além disso, como pondera Val, Barbedo e Maia (2011) as pesquisas refletem a opinião das instituições financeiras, mas não as apostas que elas fazem no mercado. Assim, quando analisamos as informações do mercado financeiro temos informações diariamente atualizadas, com horizontes diferentes e de forma que reflitam as expectativas futuras que foram diretamente precificadas pelos agentes.

Devido a estes problemas com as expectativas retiradas de *surveys*, diversas formas de extração de expectativas implícitas em ativos financeiros foram propostas. Um trabalho fundamental nesta literatura foi Svensson e Soderling (1997), que discute como extrair expectativas através de variações de preços de ativos. No nosso caso usamos diferenciais de juros entre os títulos nominais, que pagam um montante fixo de juros, e os títulos reais, que são indexados a índices de preços mais um juro nominal. Os títulos nominais tem embutidos neles a chamada inflação implícita. No presente trabalho, para estimarmos a inflação esperada utilizamos as Letras do Tesouro Nacional (ou LTN), que são um título nominal, e as Notas do Tesouro Nacional do tipo B (ou NTN-B), que são títulos indexados ao IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo). Utilizamos a NTN-B pois a inflação que serve de âncora para a tomada de decisão dos formuladores de política monetária para cumprimento das metas de inflação é o IPCA, além de ser o título de maior liquidez.

O diferencial de juros entre os títulos nominais e reais de mesma maturidade é conhecido como *breakeven inflation* (BEI). A BEI é um indicador da inflação esperada, porém, é um indicador imperfeito pelo fato de incluir prêmios de risco da inflação. O grande problema é que a estimação do prêmio de risco em geral depende da especificação de um modelo paramétrico, que define o prêmio de risco de mercado para a incerteza associada a inflação futura.

Diversos trabalhos foram feitos utilizando os títulos do governo para extrair a infla-

ção esperada para o mercado internacional (e.g. Woodward (1990) e Deacon e Derry (1994) para o mercado britânico, Shen e Corning (2001) para o mercado americano, Alonso, Blanco e Rio (2001) para o mercado francês). Christensen, Dion e Reid (2004) acham uma BEI *rate* consistentemente maior que as expectativas de mercado para o caso do mercado canadense. Concluem portanto que a pesquisa de mercado é a estimativa consistente das expectativas de inflação e que a BEI *rate* é uma estimativa viesada pela presença de prêmios de risco. O trabalho de Scholtes (2002) conclui, que para o caso inglês, a BEI *rate* possui uma performance empírica superior a das pesquisas a respeito das expectativas de inflação.

A decomposição da taxa BEI em prêmio de risco de inflação e expectativa de inflação usando um modelo paramétrico para o prêmio de risco pode ser feita através de um modelo livre de arbitragem (*arbitrage free*) afim, que é o mais usado para representar a estrutura a termo da taxa de juros na área de finanças. Esses modelos são normalmente especificados usando um conjunto de fatores latentes que capturam os movimentos nas curvas de juros no tempo. Duffie e Kan (1996) afirmam que esse modelo é popular porque faz com que as curvas de rendimento sejam uma função linear dos fatores latentes e das cargas, o que representa uma vantagem devido a existência de soluções analíticas e o fato que esta estrutura linear pode ser estimada usando o Filtro de Kalman. No entanto a forma canônica desse modelo sofre de dois problemas. O primeiro é que a estimação por máxima verossimilhança dessa classe de modelos é sujeita a um problema de máximos locais. Assim sendo podemos obter estimações com implicações econômicas diferentes. Além de ter uma performance empírica no ajuste do modelo às curvas observadas e na construção de previsões em geral bastante pobre, como discutido em Duffee (2002).

Outra linha de pesquisa paralela na modelagem da estrutura a termo é baseada em modelos estatísticos. Esses modelos são baseados em representações fatoriais sem nenhuma interpretação econômica direta, como decomposições de componentes principais e modelos baseados na parametrização de Nelson e Siegel (1987), em uma formulação dinâmica baseada em uma estrutura de fatores latentes proposta em Diebold e Li (2006). Estes modelos obtêm ajustes e previsões mais acuradas que os modelos afins, e por isso foram adotados intensivamente na modelagem de curvas de juros, como discutido em Diebold e Rudebusch (2011).

No entanto, a ausência de uma interpretação econômica completa, a imposição de condições de não-arbitragem e formas explícitas para prêmios de mercado para o risco impedem seu uso em aplicações que necessitem de uma interpretação estrutural dos resultados. Uma versão dos modelos Nelson-Siegel dinâmicos com a imposição de condições de não-arbitragem em uma formulação afim foi proposta em Christensen, Diebold e Rudebusch (2011), obtendo uma representação com bom poder de ajuste e consistência com não-arbitragem. Com isso conseguem decompor a BEI *rate* em inflação implícita e prêmio de risco. Os autores concluem que suas estimativas estão próximas das pesquisas

de mercado e os prêmios de risco variam em torno de zero. Além disso, sugerem que as expectativas de longo prazo estão bem ancoradas. Dizem também que essa abordagem usada por eles tem a vantagem de ser facilmente atualizada e reestimada pelo Filtro de Kalman, gerando a vantagem de se ter resultados em alta frequência o que é desejável para os formuladores de política monetária e profissionais do mercado financeiro.

Para o mercado brasileiro podemos citar o trabalho Val, Barbedo e Maia (2011) que aplica várias metodologias diferentes para estimar a inflação implícita e compará-la com as estimativas da *BEI rate*. Os autores encontram um prêmio de risco inflacionário relativamente baixo para o mercado brasileiro. Ainda dizem que as pesquisas de mercado embutem um prêmio de risco maior que os próprios títulos negociados. Outro ponto importante levantado pelos autores é que o mercado de títulos indexados só passou a ter participação importante a partir de 2006, com aumentos de liquidez e volume negociados.

No trabalho de Vicente e Guillen (2013) os autores testam se a *breakeven inflation* é uma boa medida da inflação futura. Com dados dos títulos do governo brasileiros os autores realizam dois testes, usando métodos de regressão univariadas. Realizam um teste para ver se essas *breakeven inflation* são um estimador não viesado das inflações futuras. Os autores acham evidências de que a *breakeven inflation* é um estimador não viesado para horizontes curtos (3 e 6 meses), já para horizontes de médio prazo (12 e 18 meses) essa variável tem pouco poder explicativo e em horizontes mais longos (24 e 30 meses) acham um resultado contraintuitivo de que há uma relação negativa entre a inflação futura e as *BEI rates*.

Caldeira e Furlani (2014) utilizam um modelo Svensson (1994) com quatro fatores latentes para os títulos nominais e quatro fatores para os títulos reais. A partir desse modelo acham a *BEI rate* pelo diferencial entre os rendimentos dos títulos. Em seguida adotam um teste semelhante ao utilizado por Vicente e Guillen (2013) mas além de fazer regressões simples também utilizam uma formulação em espaço de estado para realizar o teste. Com isso os autores acham que a *breakeven inflation* é um estimador não viesado para a inflação 3 meses a frente e que ela fornece informação somente para horizontes mais curtos. Além disso, comparam as previsões do modelo com as de um modelo VAR e das expectativas de mercado dos Top5 do Boletim Focus. As *BEI rates* se mostram superiores aos modelos VAR propostos pelos autores porém piores que as dos Top 5.

A grande contribuição do presente trabalho é comparar os resultados dos diferenciais de juros das curvas de juros nominais e reais com as de um modelo Nelson-Siegel com restrições de não arbitragem. Através deste modelo conseguimos então decompor a BEI em inflação esperada e prêmio de risco. Replicamos aqui essa abordagem visando comparar os modelos entre eles e com as previsões do Boletim Focus como *benchmark* para o mercado brasileiro.

O trabalho está dividido da seguinte forma: na seção a seguir descreveremos o modelo e como podemos decompor os diferenciais de juros dos títulos indexados e nominais

em inflação esperada e prêmio de risco. Posteriormente apresentaremos a metodologia utilizada, a escolha da especificação e os coeficientes encontrados na Seção 3. Na seção 4 apresentamos os principais resultados encontrados, o ajustamento do modelo e testaremos se nossa medida de inflação implícita é útil para previsão da inflação futura, comparando os resultados do modelo com as previsões do Boletim Focus. Para finalizar a Seção 5 apresenta as conclusões e os resultados mais relevantes do trabalho.

2 Modelo

Nesta seção descreveremos um Modelo Livre de Arbitragem Nelson-Siegel em dados diários retirados da BM&F/BOVESPA para os títulos prefixados e NTN-B zero cupom. Com esse modelo podemos decompor o diferencial de juros entre inflação esperada e um prêmio de risco. A seguir apresentaremos uma discussão teórica de como decompor os diferenciais de juros em inflação implícita e prêmios de risco e a abordagem empírica utilizada no trabalho.

2.1 Discussão teórica

Seguindo as abordagens de Cochrane (2005) e Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) faremos a decomposição do *spread* dos títulos nominais e reais em inflação implícita e prêmio de risco usando uma formulação em tempo contínuo. Definindo M_t^R e M_t^N como os fatores de desconto estocásticos para os títulos reais e nominais, respectivamente. Pelas condições de não-arbitragem temos que que:

$$P_t^i M_t^i = E_t^P \left[P_{t+\tau}^i M_{t+\tau}^i \right] \quad (1)$$

sendo $i = R, N$. Essa equação representa a tomada de decisão do agente abrindo mão de consumo presente para investir e consumir no futuro. A igualdade em 1 é derivada da condição de primeira ordem, para maiores detalhes consulte Cochrane (2005). Assim podemos normalizar o preço $P_{t+\tau}^i = 1$, ou seja, um *payoff* unitário no período τ e reescrever os preços como:

$$P(\tau)_t^i = E_t^P \left[\frac{M_{t+\tau}^i}{M_t^i} \right] \quad (2)$$

Além disso, a condição de não arbitragem exige que haja consistência entre os preços dos títulos reais e nominais. Assim podemos definir Q_t como o nível geral de preços, que nada mais é do que a relação entre os fatores de desconto estocásticos:

$$Q_t = \frac{M_t^R}{M_t^N} \quad (3)$$

Sob hipótese de que os fatores de desconto estocásticos tem a seguinte dinâmica:

$$\frac{dM_t^i}{M_t^i} = -r_t^i dt - \Gamma_t dW_t^P \quad (4)$$

ou seja, a parte de *drift* do processo é determinada pela taxa juros instantânea, que varia para cada um dos tipos de títulos, e uma parte de difusão de que depende Γ_t , que é o preço de mercado do risco que é constante entre os tipos de títulos e os choques do movimento browniano. A partir de 3, podemos então achar pelo Lemma de Itô a dinâmica do nível de preços:

$$dQ_t = (r_t^R - r_t^N)Q_t dt \quad (5)$$

portanto, na ausência de arbitragem a taxa instantânea de crescimento dos preços é determinada pelo diferencial das taxas instantâneas de juros entre os títulos nominais e reais, portanto a equação de Fisher se mantém para a taxa instantânea e não há prêmio de risco. Novamente utilizando o Lema de Itô, podemos ver que:

$$d\ln(Q_t) = \frac{1}{Q_t} dQ_t - \frac{1}{2} \frac{1}{Q_t} dQ_t^2 = \frac{1}{Q_t} dQ_t = (r_t^R - r_t^N) dt \quad (6)$$

integrando dos dois lados e tomando o exponencial, temos:

$$Q_{t+\tau} = Q_t e^{\int_t^{t+\tau} (r_t^R - r_t^N) dt} \quad (7)$$

Com isso podemos escrever o preço do título nominal em função do nível de preço e do preço dos títulos reais, assim:

$$P(\tau)_t^N = E_t^P \left[\frac{M_{t+\tau}^R}{M_t^R} \right] \times E_t^P \left[\frac{Q_t}{Q_{t+\tau}} \right] \times \left(1 + \frac{\text{cov}\left(\frac{M_{t+\tau}^R}{M_t^R}, \frac{Q_t}{Q_{t+\tau}}\right)}{E_t^P \left[\frac{M_{t+\tau}^R}{M_t^R} \right] \times E_t^P \left[\frac{Q_t}{Q_{t+\tau}} \right]} \right) \quad (8)$$

convertendo o preço dos ativos em *yield*:

$$P(\tau)_t^N = P_t^N e^{y_t^N \tau} \rightarrow y_t^N = -\frac{1}{\tau} \ln \left[P_t^N / P(\tau)_t^N \right] \quad (9)$$

podemos reescrever 8 como:

$$y_t^N(\tau) = y_t^R(\tau) + \pi_t^e(\tau) + \phi_t(\tau) \quad (10)$$

sendo $y_t^N(\tau)$ o rendimento dos títulos nominais para a maturidade τ , $y_t^R(\tau)$ o rendimento dos títulos reais para a mesma maturidade, $\pi_t^e(\tau)$ a inflação implícita do mercado de títulos no período t para o período $t + \tau$ e $\phi_t(\tau)$ o prêmio de risco de se manter um título nominal com rendimento em $t + \tau$. Podemos escrever a inflação implícita como:

$$\pi_t^e(\tau) = -\frac{1}{\tau} \ln [Q_t/Q_{t+\tau}] = -\frac{1}{\tau} \ln E_t^P \left[e^{-\int_t^{t+\tau} (r_t^R - r_t^N) dt} \right] \quad (11)$$

e o prêmio de risco como:

$$\phi_t(\tau) = -\frac{1}{\tau} \ln \left(1 + \frac{\text{cov}\left(\frac{M_{t+\tau}^R}{M_t^R}, \frac{Q_t}{Q_{t+\tau}}\right)}{E_t^P \left[\frac{M_{t+\tau}^R}{M_t^R} \right] \times E_t^P \left[\frac{Q_t}{Q_{t+\tau}} \right]} \right) \quad (12)$$

portanto o prêmio de risco em se manter um título nominal pode ser positivo ou negativo. O prêmio de risco só será positivo se a $\text{cov}\left(\frac{M_{t+\tau}^R}{M_t^R}, \frac{Q_t}{Q_{t+\tau}}\right) < 0$, ou seja, um aumento do nível de preços, que é um momento de perda de poder aquisitivo, tem efeito positivo sobre o preço dos títulos reais. Assim sendo, as pessoas preferem investir nesses títulos ao invés dos nominais e exigem um retorno extra para os títulos não-indexados. Isso está relacionado com as pessoas preferirem um consumo mais suave durante a vida, então os agentes preferem ativos que tenham covariância negativa com seu consumo.

Como definimos na primeira parte desse trabalho a BEI (*breakeven inflation*) para $t+\tau$ é o diferencial de juros entre os títulos nominais e reais para a maturidade τ . Conforme vimos na equação 10 podemos decompor a BEI em inflação implícita e prêmio de risco:

$$BEI(\tau)_t = y_t^N(\tau) - y_t^R(\tau) = \pi_t^e(\tau) + \phi_t(\tau) \quad (13)$$

2.2 Abordagem empírica

Para sabermos qual a melhor especificação para o modelo conjunto com os rendimentos dos títulos reais e nominais, precisamos determinar o número de fatores latentes para o modelo. Em geral os modelos para estrutura termo de taxa de juros utilizam três fatores: o de nível, o de inclinação e o de curvatura. Esses fatores geralmente são suficientes para explicar a variação *cross-section* dos títulos. O primeiro termo é o nível que determina os fatores de longo prazo. O segundo fator pode ser considerado a inclinação ou fator de curto prazo ou ainda o *spread* enquanto o terceiro fator é considerado a curvatura ou fator de médio prazo.

Para testarmos quantos fatores devemos utilizar usaremos a análise de componentes principal, analisando os dados de Janeiro de 2006 até Outubro de 2013 para os títulos nominais com maturidade de 1, 3, 6, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 42, 48 e 60 meses e para

os títulos indexados para as mesmas maturidades. Utilizamos esse período pois os títulos indexados ao IPCA parecem ter pouca liquidez para períodos anteriores a esse. Na Tabela 1 fazemos uma análise de componentes principais para vermos quantos componentes são suficientes para explicar as curvas, 4 fatores explicam mais de 99,2% das curvas. Assim propomos um modelo com: dois fatores de nível diferentes, um para cada tipo de título, um fator inclinação e um fator curvatura comuns.

Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) mostraram que o modelo Livre de Arbi-

Tabela 1 – Análise de componentes principais dos títulos indexados e nominais

Maturidade						
Indexados	1º PC	2º PC	3º PC	4º PC	5º PC	6º PC
1 mês	0.134553	0.467604	0.014705	0.78545	-0.27805	0.258406
3 meses	0.167591	0.357665	-0.04919	0.114176	0.344071	-0.6968
6 meses	0.179627	0.265103	-0.06309	-0.05793	0.038507	-0.29027
9 meses	0.184117	0.190391	-0.07081	-0.14773	-0.0671	-0.12424
12 meses	0.185925	0.142082	-0.08897	-0.17352	-0.13651	-0.02966
15 meses	0.187	0.102497	-0.11464	-0.16004	-0.16635	-0.01608
18 meses	0.187608	0.069742	-0.1429	-0.13853	-0.15875	0.002999
21 meses	0.187898	0.044778	-0.16131	-0.12077	-0.13889	0.036049
24 meses	0.188104	0.024581	-0.17109	-0.10158	-0.11191	0.06148
26 meses	0.188119	0.014526	-0.17766	-0.09155	-0.09786	0.07519
30 meses	0.188029	0.002117	-0.19071	-0.07273	-0.06763	0.095541
36 meses	0.187785	-0.01158	-0.20881	-0.0501	-0.01124	0.109623
42 meses	0.187566	-0.01581	-0.21758	-0.03581	0.040968	0.136009
48 meses	0.187261	-0.01559	-0.22502	-0.02648	0.096531	0.159568
60 meses	0.185982	-0.0109	-0.25463	-0.02256	0.192267	0.217021
Nominais						
1 mês	0.17434	0.24443	0.298763	-0.13154	0.433621	0.344089
3 meses	0.178917	0.184721	0.32384	-0.12935	0.265464	0.226057
6 meses	0.18341	0.087963	0.325201	-0.11281	0.041807	0.086815
9 meses	0.185225	0.013704	0.303282	-0.08272	-0.0904	0.003123
12 meses	0.18595	-0.04622	0.267105	-0.04997	-0.16666	-0.05446
15 meses	0.186054	-0.09489	0.225593	-0.01842	-0.19623	-0.08444
18 meses	0.185835	-0.13181	0.18619	0.012417	-0.19224	-0.08931
21 meses	0.18548	-0.16085	0.14918	0.040502	-0.16129	-0.08079
24 meses	0.185047	-0.18271	0.116719	0.06492	-0.1155	-0.07936
26 meses	0.184668	-0.19485	0.099642	0.081025	-0.08334	-0.07678
30 meses	0.183836	-0.21435	0.064917	0.114015	-0.02108	-0.06584
36 meses	0.182727	-0.2304	0.014199	0.154256	0.072478	-0.0617
42 meses	0.181714	-0.23768	-0.03153	0.179167	0.168997	-0.03893
48 meses	0.180514	-0.24503	-0.06206	0.196124	0.245654	-0.01913
60 meses	0.178209	-0.25433	-0.11583	0.223583	0.346699	0.008125
% explicada	0.9216	0.964	0.981	0.9922	0.9961	0.9986

tragem com Fatores Nelson-Siegel tem um bom grau de ajustamento para estrutura termo de taxa de juros além de gerar boas previsões fora da amostra. Para capturar possíveis diferenças de escala entre as inclinações dos títulos nominais e reais estimamos também o α , o que não foi feito em trabalhos anteriores.

A dinâmica Q dos fatores Nelson-Siegel para os títulos nominais é dada pelas seguintes equações diferenciais estocásticas:

$$\begin{pmatrix} dL_t^N \\ dS_t \\ dC_t \\ dL_t^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1}^N - \theta_1^{P,J} \\ S_{t-1} - \theta_2^{P,J} \\ C_{t-1} - \theta_3^{P,J} \\ L_{t-1}^R - \theta_4^{P,J} \end{pmatrix} dt + \Sigma^j \begin{pmatrix} DW^{L_t^N, P} \\ DW^{S, P} \\ DW^{C, P} \\ DW^{L_t^R, P} \end{pmatrix} \quad (14)$$

e a dinâmica P é dada por:

$$\begin{pmatrix} dL_t^N \\ dS_t \\ dC_t \\ dL_t^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{P,J} & K_{12}^{P,J} & K_{13}^{P,J} & K_{14}^{P,J} \\ K_{21}^{P,J} & K_{22}^{P,J} & K_{23}^{P,J} & K_{24}^{P,J} \\ K_{31}^{P,J} & K_{32}^{P,J} & K_{33}^{P,J} & K_{34}^{P,J} \\ K_{41}^{P,J} & K_{42}^{P,J} & K_{43}^{P,J} & K_{44}^{P,J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1}^N - \theta_1^{P,J} \\ S_{t-1} - \theta_2^{P,J} \\ C_{t-1} - \theta_3^{P,J} \\ L_{t-1}^R - \theta_4^{P,J} \end{pmatrix} dt + \Sigma^j \begin{pmatrix} DW^{L_t^N, P} \\ DW^{S, P} \\ DW^{C, P} \\ DW^{L_t^R, P} \end{pmatrix} \quad (15)$$

com Σ^j diagonal. Como vimos na seção anterior a dinâmica P é muito importante para decompor a BEI em inflação implícita e prêmio de risco. As *yield curves* são:

$$y(\tau)^N = L_t^N + S_t((1 - e^{-\lambda\tau})/\lambda\tau) + C_t((1 - e^{-\lambda\tau})/\lambda\tau - e^{-\lambda\tau}) + \epsilon_{N,\tau} \quad (16)$$

$$y(\tau)^R = L_t^R + \alpha S_t((1 - e^{-\lambda\tau})/\lambda\tau) + \alpha C_t((1 - e^{-\lambda\tau})/\lambda\tau - e^{-\lambda\tau}) + \epsilon_{R,\tau} \quad (17)$$

sendo L_t^N e L_t^R os fatores de nível dos títulos nominais e reais, respectivamente, S_t o fator de inclinação e C_t , o fator de curvatura e α um termo de ajuste para os títulos reais.

Por facilitar a estimação faremos uma discretização desse processo como Mouabbi (2013), sendo $X_t = (L_t^N, S_t, C_t, L_t^R)$ podemos reescrever a equação 15 como:

$$X_T = [I - e^{K^P(T-t)}]\theta^P + e^{K^P(T-t)}X_t + \eta_t \quad (18)$$

desse modo a equação de transição pode ser estimada em tempo discreto como sendo um VAR(1). Esse procedimento de estimação já foi utilizado em Christensen, Lopez e Rudebusch (2012), e nesse trabalho juntamente com o pressuposto de erros Gaussianos mostra-se que podemos realizar esta estimação por quasi-máxima verossimilhança usando o filtro de Kalman. Essa transformação nos permite estimar e recuperar os parâmetros da dinâmica P da equação 15. No trabalho de Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) os autores demonstram que para uma abordagem gaussiana podemos reescrever a equação:

$$E_t^P \left[e^{-\int_t^{t+\tau} (r_t^R - r_t^N) dt} \right] = \exp[B^\pi(\tau)X_t + A^\pi(\tau)] \quad (19)$$

sendo $B^\pi(\tau)$ e $A^\pi(\tau)$ soluções das equações diferenciais resolvidas pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. A partir disso podemos calcular a inflação implícita e os prêmios de risco.

3 Estimação

As estimações feitas nesse trabalho utilizaram a metodologia do Filtro de Kalman, seguindo Christensen, Lopez e Rudebusch (2012). As equações de medida 16 e 17 podem

ser reescritas como:

$$y_t = BX_t + \epsilon_t \quad (20)$$

sendo que ϵ_t representam os erros das equações de medida que são por hipótese independentes e identicamente distribuídos (iid) para cada maturidade. A equação de estado dos fatores é dada pela Equação 18, pode ser reescrita como:

$$X_t = \Theta + \Phi X_{t-1} + \eta_t \quad (21)$$

com estrutura do erro dada por:

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix} \sim N \begin{pmatrix} 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix} \quad (22)$$

onde $R = \text{diag}(\sigma_i^2)$ (4×4) e as equações de medida tem a mesma variância com $Q = \text{diag}(\sigma^2)$. Além disso, pela otimalidade do Filtro de Kalman necessitamos que os erros sejam ortogonais à variável de estado: $E(X_t \eta_t) = 0$ e $E(X_t \epsilon_t) = 0$.

Uma estimação deve ser ao mesmo tempo flexível e parcimoniosa. Por isso é importante que o modelo esteja bem especificado. Além disso, para decompor a *BEI rate* é muito importante que nossa dinâmica P esteja correta. Para tanto conduzimos testes estatísticos de critério de informação para escolha da melhor especificação, saindo do modelo irrestrito e indo até o modelo com 12 restrições. Os resultados destes testes estão presentes na tabela 2 . Para analisar as especificações mostramos na tabela o valor do logaritmo da máxima verossimilhança, o número de parâmetros estimados, e os critérios de informação de Akaike (AIC), Bayesian (BIC) e Hannan-Quinn. Usamos como critério de escolha os três últimos testes citados e todos eles indicam que a melhor especificação é a do modelo diagonal.

Tabela 2 – Testes de Especificação

	Testes				
	logL	Parâmetros	AIC	BIC	Hannan-Quinn
Irrestrito	-32612.9	27	34.10648	34.18487	34.13533
1 Restrição	-32853.9	26	34.33927	34.41473	34.36704
2 Restrições	-32836.5	25	34.32009	34.39264	34.34679
3 Restrições	-32546.7	24	34.01634	34.08599	34.04197
4 Restrições	-32569	23	34.03865	34.1054	34.06321
5 Restrições	-32393.3	22	33.85406	33.9179	33.87755
6 Restrições	-32339	21	33.79632	33.85726	33.81875
7 Restrições	-32338.1	20	33.79432	33.85236	33.81568
8 Restrições	-32339.5	19	33.79479	33.84993	33.81508
9 Restrições	-32159.1	18	33.60533	33.65757	33.62456
10 Restrições	-32161.2	17	33.60646	33.65579	33.62461
11 Restrições	-31986.1	16	33.42252	33.46895	33.43961
Diagonal	-31972.2	15	33.40701	33.45054	33.42303

Nota - Impusemos que o parâmetro menos significativo fosse igual a zero em cada restrição.³

Tabela 3 – Parâmetros Estimados do modelo escolhido

	$\phi, 1$	$\phi, 2$	$\phi, 3$	$\phi, 4$	θ	α	λ
$\phi 1,$	0.995 (0.001184)				-0.016 (0.009498)	0.972 (0.00000689)	0.193 (0.000000759)
$\phi 2,$		0.878 (0.002268)			0.264 (0.007128)		
$\phi 3,$			0.972 (0.003295)		0.060 (0.017272)		
$\phi 4,$				1.000 (0.000119)	-0.007 (0.00000968)		

A tabela 3 apresenta os valores estimados para o modelo escolhido. Nessa tabela apresentamos os parâmetros estimados para a matriz ϕ , os θ , os Σ além do fator de decaimento da equação de medida (λ) e do α para os títulos reais. Podemos ver que estimamos um fator de decaimento de 0.19, valor próximo de outros trabalhos aplicados ao Brasil. O parâmetro α estimado foi de 0.97, o trabalho de Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) acha um valor de 0.92, por exemplo.

4 Resultados

Nessa seção apresentaremos primeiramente os valores encontrados para os fatores latentes, assim como as projeções para os títulos analisados. Posteriormente mostraremos os valores encontrados para a inflação implícita e para os prêmios de risco para o mercado nacional.

4.1 Fatores Latentes e ajustamento dos títulos

As Figuras 1 e 2 mostram os fatores de nível e inclinação estimados para os títulos nominais e reais para o período analisado. A correlação entre esses dois fatores de nível é de 91,71% e podemos notar que tanto o fator nível real quanto o nominal apresentam um aumento para 2008, período da crise do Lehmann Brothers. Isso mostra que a crise influenciou tanto os títulos reais quanto nominais provavelmente pelo canal macroeconômico. No trabalho de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) os autores indicam que a inflação presente influencia o fator nível. Isso pode explicar o aumento desse fator tanto para 2008 quanto para 2013. Já os fatores nível e inclinação são bem menos voláteis que os de nível seguindo a literatura, como Diebold e Li (2006).

³ Modelo com 1 restrição: $\phi_{1,4} = 0$. Modelo com 2 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = 0$. Modelo com 3 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = 0$. Modelo com 4 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = 0$. Modelo com 5 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = 0$. Modelo com 6 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = \phi_{3,1} = 0$. Modelo com 7 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = \phi_{3,1} = \phi_{4,2} = 0$. Modelo com 8 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = \phi_{3,1} = \phi_{4,2} = \phi_{1,3} = 0$. Modelo com 9 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = \phi_{3,1} = \phi_{4,2} = \phi_{1,3} = \phi_{2,1} = 0$. Modelo com 10 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = \phi_{3,1} = \phi_{4,2} = \phi_{1,3} = \phi_{2,1} = \phi_{1,2} = 0$. Modelo com 11 restrições: $\phi_{1,4} = \phi_{4,1} = \phi_{4,3} = \phi_{3,4} = \phi_{2,4} = \phi_{3,1} = \phi_{4,2} = \phi_{1,3} = \phi_{2,1} = \phi_{1,2} = \phi_{3,2} = 0$.

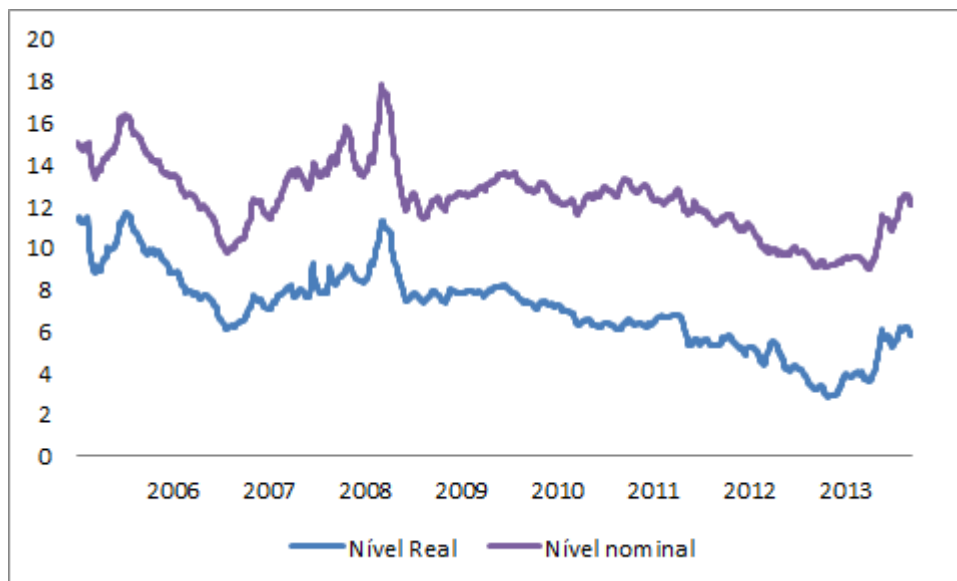


Figura 1 – Fatores de nível estimados

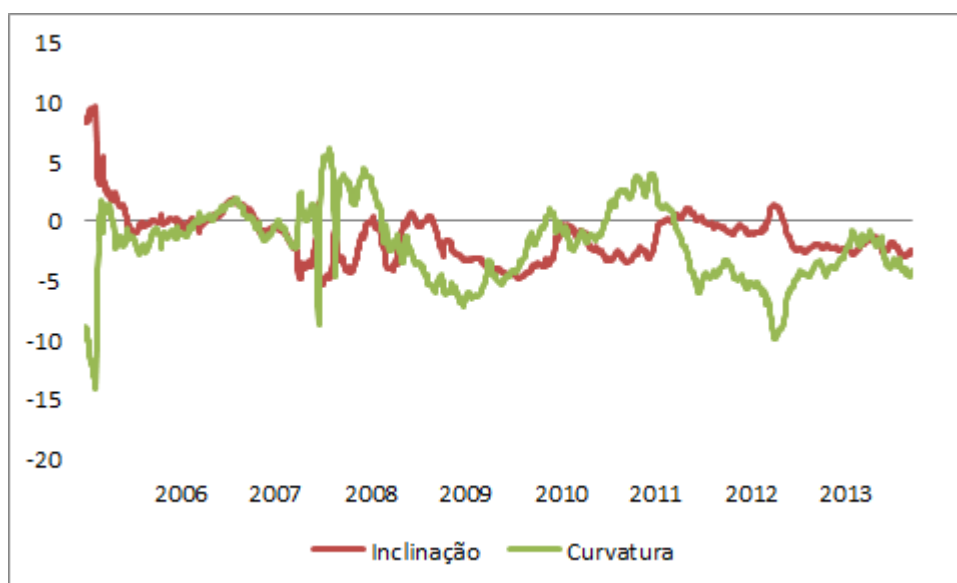


Figura 2 – Fatores inclinação e curvatura estimados

A Tabela 4 mostra como medidas de ajustamento do modelo para as diversas maturidades dos títulos o Erro Médio e o Erro Quadrático Médio. Essas medidas mostram que o modelo em geral oferece um bom grau de ajustamento, especialmente para os títulos reais, como poder ser observado pelo menor os Erros Quadráticos para estas séries.

4.2 Inflação Implícita e Prêmios de Risco

A partir da equação 19 podemos calcular a inflação implícita do nosso modelo. Como discutimos na seção 2 a *BEI rate* pode ser decomposta em inflação implícita e

Tabela 4 – Medidas de ajustamento

	Erro Médio	Erro Quadrático Médio
Reais		
Maturidade 1 mês	-0.095609	2.798753
Maturidade 3 meses	0.05489	0.57199
Maturidade 6 meses	-0.015383	0.195772
Maturidade 9 meses	-0.007725	0.113417
Maturidade 12 meses	0.001921	0.086818
Maturidade 15 meses	-0.001644	0.07728
Maturidade 18 meses	-0.00026	0.074582
Maturidade 21 meses	-0.002758	0.077102
Maturidade 24 meses	-0.007826	0.079358
Maturidade 26 meses	-0.009574	0.081415
Maturidade 30 meses	-0.007437	0.083792
Maturidade 36 meses	0.01013	0.085904
Maturidade 42 meses	0.036823	0.09254
Maturidade 48 meses	0.063338	0.100567
Maturidade 60 meses	0.128385	0.139267
Nominais		
Maturidade 1 mês	0.042264	0.876392
Maturidade 3 meses	0.02634	0.40592
Maturidade 6 meses	0.028155	0.224233
Maturidade 9 meses	0.046288	0.199712
Maturidade 12 meses	0.047124	0.203884
Maturidade 15 meses	0.028979	0.209178
Maturidade 18 meses	0.009476	0.210486
Maturidade 21 meses	-0.007772	0.204806
Maturidade 24 meses	-0.023365	0.197345
Maturidade 26 meses	-0.032977	0.19443
Maturidade 30 meses	-0.040021	0.193084
Maturidade 36 meses	-0.04179	0.196226
Maturidade 42 meses	-0.049769	0.203946
Maturidade 48 meses	-0.053981	0.211662
Maturidade 60 meses	-0.049313	0.235099

prêmio de risco. A partir da equação 13 e tomando a inflação implícita como descrito anteriormente podemos calcular os prêmio de risco para cada maturidade.

Utilizando a mesma abordagem de Christensen, Lopez e Rudebusch (2010), comparamos nossos resultados com as previsões de mercado. No presente trabalho usamos como benchmark as previsões médias das expectativas de mercado publicadas no Boletim Focus. Os resultados do modelo se aproximam das previsões do Boletim Focus com o passar do tempo. Isso pode ser resultado de um mercado mais eficiente de títulos ou da perda de credibilidade do BC na condução da política monetária levando os agentes a reportarem previsões menos conservadoras.

Podemos ver na Figuras 3 e 4 que a inflação implícita do modelo parece ser melhor do que as previsões do Focus tanto para o horizonte de 6 quanto de 12 meses. Quando realizamos novamente os testes de medida de ajuste vemos que tanto o erro médio quanto o erro quadrático médio são menores do que os das previsões do Focus, como podemos ver na Tabela 5. Quando comparamos as *BEI rates* com a inflação implícita também vemos que a inflação implícita parece ser um preditor superior.

Já a Figura 5 apresenta os prêmios de risco do modelo para as maturidades de: 6, 12, 24 e 60 meses. Vemos que prêmios de risco são maiores para horizontes mais curtos. A dinâmica dos prêmios de risco parece ser igual entre os títulos de até 24 meses, apresentando apenas uma diferença de nível. Já para horizontes mais longos (60 meses) os

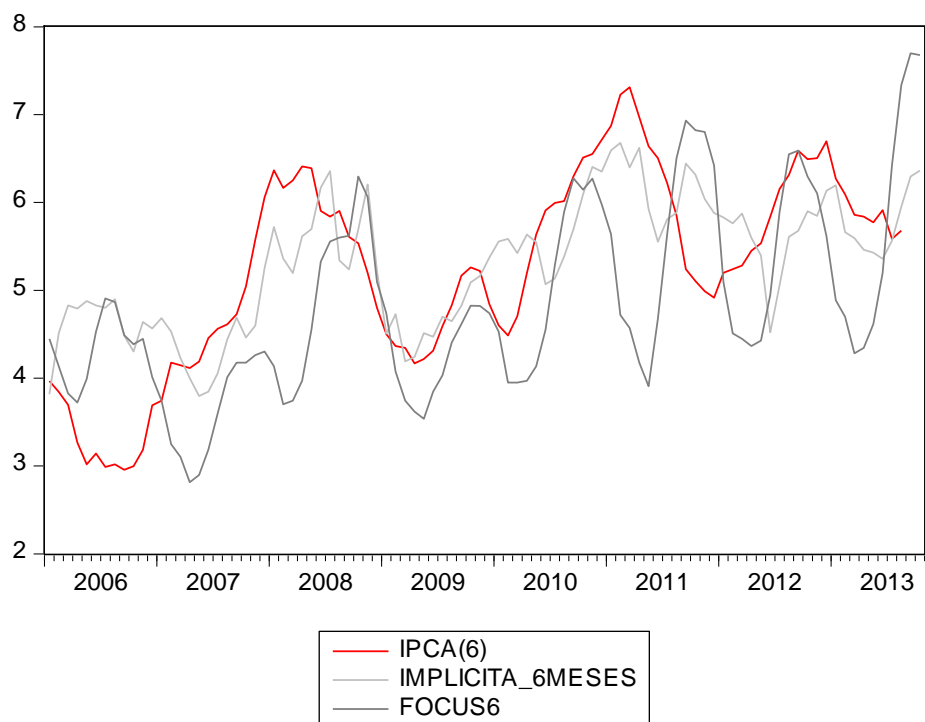


Figura 3 – Boletim Focus, Inflação Esperada do Modelo e IPCA realizado 6 meses a frente

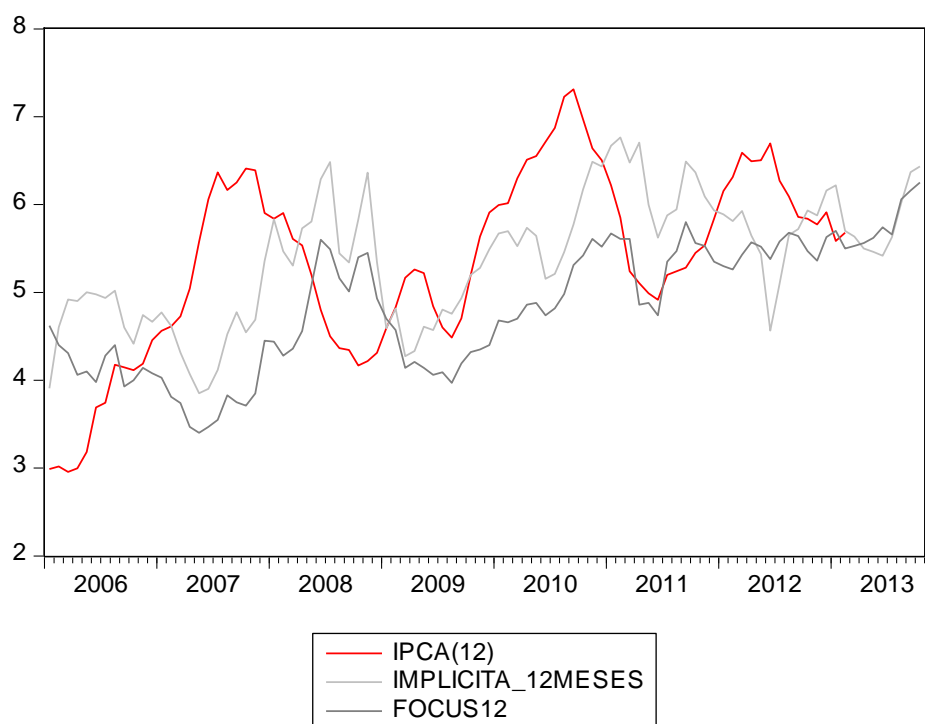


Figura 4 – Boletim Focus, Inflação Esperada do Modelo e IPCA realizado 12 meses a frente

agentes podem ancorar suas expectativas na inflação de longo prazo o que pode explicar a dinâmica diferente para esses títulos. Outro ponto interessante do presente trabalho é que os prêmios de risco parecem ser variantes tanto no tempo quanto na maturidade.

Tabela 5 – Grau de ajustamento

	6 meses		12 meses	
	EM	EQM	EM	EQM
Implícita	-0.04912	0.592281	0.006084	1.127463
BEIR	0.043947	0.75811	0.195837	1.247082
FOCUS	0.454405	1.471076	0.619568	1.456684

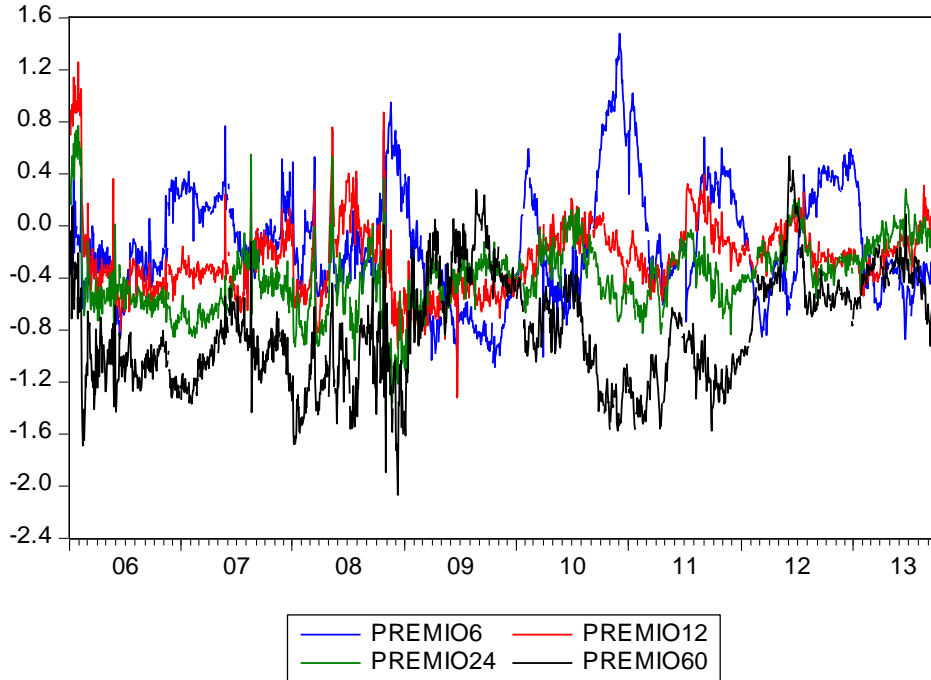


Figura 5 – Prêmios de risco para 6, 12, 24 e 60 meses de maturidade

4.3 Inflação implícita como preditor da inflação futura

Os trabalhos de Vicente e Guillen (2013) e Caldeira e Furlani (2014) propõem uma metodologia para testar o poder preditivo da inflação implícita sobre a inflação futura. Definindo $h(1)_t$ como a taxa anual de juros continuamente composta, podemos definir a inflação acumulada entre o período t e $t + \tau$ como: $h(\tau)_t = \frac{1}{\tau} \sum_{j=t}^{j=t+\tau} h_j(1)$. Podemos testar se a inflação implícita tem poder preditivo sobre a inflação utilizando uma regressão com a seguinte forma funcional:

$$h(\tau)_t = c_0 + c_1 \pi_t^e(\tau) + \epsilon_{t+\tau} \quad (23)$$

a equação 23 mostra que se o termo c_1 for significativo, então a inflação implícita fornece alguma informação sobre a inflação futura, e se $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ a inflação implícita é um estimador não viesado da inflação futura. Assim como Vicente e Guillen (2013), estimamos primeiramente a equação 23 pelo Método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS). Posteriormente para evitarmos possíveis problemas de endogeneidade faremos uma estimação por Mínimos Quadrados em dois estágios (TSLS) com a primeira defasagem

da inflação implícita como instrumento e uma estimação pelo Método dos Momentos generalizado (GMM) com as três primeiras defasagens como instrumentos. Os autores propõem uma estimação por TSLS e GMM pois a inflação futura deve ser influenciada pelas expectativas de inflação assim como as expectativas são contaminadas pela inflação realizada, gerando endogeneidade. Com isso testaremos a significância de c_1 e se $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ através de um teste de Wald. Outro ponto que merece ser notado é que Vicente e Guillen (2013) afirmam que suas estimativas só estarão corretas sob a hipótese de que os prêmios de risco são constantes no tempo, o que não parece ser verdade para o caso brasileiro.

Nas tabelas 6, 7 e 8 temos os testes utilizando as estimações propostas por Vicente e Guillen (2013). Podemos ver que em geral os testes são robustos e indicam os mesmos resultados. Podemos ver pela estimação por OLS que a inflação implícita extraída pelo modelo parece ser estimador não viesado para horizontes de até 9 meses. Já utilizando as estimações por TSLS e GMM os resultados indicam que elas são estimadores não viesados da inflação realizada para os horizontes de 6, 9 e 36 meses. Apesar de o horizonte de 48 meses apresentar um resultado contraintuitivo, parece que a inflação implícita fornece informação relevante sobre a inflação realizada para os horizontes 3, 6, 9, 36 e 60 meses.

Já para as *BEI rates* os resultados não são tão robustos, indicando resultados

Tabela 6 – OLS das inflações implícitas do modelo

	Maturidade							
	3	6	9	12	24	36	48	60
c_0	1.15	1.10	0.83	0.43	0.10	0.65	-0.53	0.40
	0.00	0.00	0.00	0.07	0.60	0.00	0.00	0.03
c_1	-0.01	-0.01	0.01	0.03	0.05	0.02	0.09	0.04
	0.24	0.53	0.44	0.02	0.00	0.02	0.00	0.00
R^2	56.2%	50.9%	29.3%	8.1%	-0.4%	34.2%	22.7%	21.6%
F-test	0.30	0.82	0.62	0.04	0.00	0.06	0.00	0.00

Os valores abaixo dos coeficientes são do P-valor dos coeficientes

Tabela 7 – TSLS das inflações implícitas do modelo

	Maturidade							
	3	6	9	12	24	36	48	60
c_0	1.35	1.18	0.84	0.37	0.16	0.84	-0.72	0.50
	0.00	0.00	0.00	0.18	0.52	0.00	0.00	0.02
c_1	-0.02	-0.01	0.01	0.03	0.05	0.01	0.10	0.03
	0.04	0.39	0.53	0.03	0.00	0.41	0.00	0.01
R^2	56.3%	50.1%	27.1%	5.8%	-1.7%	34.8%	29.3%	21.2%
F-test	0.08	0.68	0.71	0.06	0.00	0.42	0.00	0.01

Os valores abaixo dos coeficientes são do P-valor dos coeficientes

diferentes dependendo de qual método de estimação estamos usando. Podemos ver que em geral os testes são robustos e indicam os mesmos resultados. Podemos ver tanto pela estimação por OLS quanto por TSLS que a *BEI rate* parece ser estimador não viesado

Tabela 8 – GMM das inflações implícitas do modelo

	Maturidade							
	3	6	9	12	24	36	48	60
c_0	1.20	1.05	0.76	0.27	-0.02	0.70	-0.70	0.40
	0.00	0.00	0.00	0.17	0.93	0.00	0.00	0.04
c_1	-0.01	0.00	0.01	0.04	0.06	0.02	0.10	0.04
	0.16	0.78	0.25	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00
R^2	55.2%	49.3%	25.9%	4.2%	-2.9%	33.1%	32.8%	20.5%
F-test	0.02	0.96	0.45	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00

Os valores abaixo dos coeficientes são do P-valor dos coeficientes

para horizontes de 6 e 9 meses. Já utilizando a estimação por GMM os resultados não indicam as *BEI rates* são estimadores não viesados da inflação realizada. Apesar disso, parece que as *BEI rates* fornecem informação relevante sobre a inflação realizada para os horizontes mais curtos(até 9 meses) e para os horizontes de 24 e 60 meses, apresentando c_0 contraintuitivo para o horizonte de 48 meses.

Os resultados encontrados nessa seção mostram que tanto a inflação implícita

Tabela 9 – OLS para as *BEI rates*

	Maturidade							
	3	6	9	12	24	36	48	60
c_0	0.53	0.75	0.71	0.38	0.06	0.76	-0.44	0.41
	0.00	0.00	0.00	0.05	0.74	0.00	0.02	0.08
c_1	0.02	0.01	0.02	0.03	0.05	0.02	0.08	0.04
	0.00	0.08	0.10	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00
R^2	30.3%	41.0%	29.7%	8.3%	-1.1%	37.8%	12.0%	16.4%
F-test	0.00	0.17	0.26	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Os valores abaixo dos coeficientes são do P-valor dos coeficientes

Tabela 10 – TSLS para as *BEI rates*

	Maturidade							
	3	6	9	12	24	36	48	60
c_0	0.73	0.83	0.71	0.31	0.09	0.92	-0.61	0.51
	0.00	0.00	0.00	0.14	0.69	0.00	0.00	0.05
c_1	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.01	0.09	0.04
	0.04	0.33	0.13	0.00	0.00	0.37	0.00	0.01
R^2	28.5%	39.6%	29.5%	8.1%	-1.3%	37.0%	13.4%	15.0%
F-test	0.04	0.61	0.31	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Os valores abaixo dos coeficientes são do P-valor dos coeficientes

quanto as *BEI rates* parecem ser estimadores não viesados para até 9 meses, mostrando-se resultados superiores aos encontrados nos trabalhos de Vicente e Guillen (2013) e Caldeira e Furlani (2014). os resultados também corroboram que para o médio prazo (de 24 a 48 meses) os títulos não parece fornecer boas informações. Os resultados para inflação implícita para 36 meses indicam que ele é estimador não viesado da inflação realizada. Para o longo prazo (60 meses) tanto a inflação implícita quanto as *BEI rates* parecem fornecer informações explicando mais de 20% e de 15% da variação da inflação,

Tabela 11 – GMM para as *BEI rates*

	Maturidade							
	3	6	9	12	24	36	48	60
c_0	0.56	0.63	0.66	0.34	-0.02	0.84	-0.47	0.42
	0.00	0.00	0.00	0.07	0.90	0.00	0.01	0.06
c_1	0.02	0.02	0.02	0.04	0.06	0.01	0.08	0.04
	0.00	0.01	0.04	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00
R^2	30.3%	37.9%	29.7%	8.1%	-3.1%	36.1%	18.2%	15.5%
F-test	0.00	0.04	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Os valores abaixo dos coeficientes são do P-valor dos coeficientes

respectivamente. Os resultados quanto a superioridade de uma das medidas indicam que temos ganhos ao impor de restrições de não-arbitragem nas previsões da inflação.

5 Conclusão

O objetivo do presente trabalho foi utilizar o mercado de títulos pré-fixados e indexados e estimar a inflação a partir deles. Para isso utilizamos de títulos nominais e das Notas do Tesouro Nacional do tipo B. Utilizamos a metodologia de fatores latentes proposta por Nelson e Siegel (1987) na sua forma dinâmica, baseando-se no trabalho de Christensen, Lopez e Rudebusch (2010) estimamos um modelo livre de arbitragem que usa 4 fatores: 2 diferentes para o fator nível e 2 comuns para os fatores inclinação e curvatura. A partir de critérios de escolha de especificação escolhemos o modelo mais parcimonioso. Esse modelo com quatro fatores na sua forma diagonal mostrou bom ajuste aos valores dos rendimentos dos títulos nominais e indexados.

Os resultados apresentados aqui tanto para a inflação implícita quanto das *BEI rates* se mostram superiores nas previsões para 6 e 12 meses a frente se comparados com a média das previsões de mercado apresentadas no Boletim Focus. Os resultados do teste proposto por Vicente e Guillen (2013) mostram que a imposição de restrições de não-arbitragem aumentam o poder preditivo do modelo. Além disso, o teste parece não ser consistente para as *BEI rates*, pois tem por hipótese de que os prêmios de risco não são variantes no tempo (nosso modelo apresentou prêmios de risco variantes no tempo). Esse teste indica que para horizontes mais curtos as duas previsões são estimador não viesado da inflação futura para horizontes de até 9 meses. Já para horizontes de médio prazo e longo prazo os resultados não são conclusivos, como já mostrado em outros trabalhos aplicados ao mercado brasileiro. Esse trabalho fecha um *gap* na literatura do uso de títulos públicos para previsão de inflação com restrições de arbitragem para o mercado brasileiro.

Referências

- ALONSO, F.; BLANCO, R.; RIO, A. del. *Estimating inflation expectations using French government inflation-indexed bonds*. [S.l.]: Banco de Espana, Servicio de Estudios, 2001.
- CALDEIRA, J. F.; FURLANI, L. Inflação implícita eo prêmio pelo risco: Uma alternativa aos modelos var na previsão para o ipca. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, v. 43, n. 4, 2014.
- CHRISTENSEN, I.; DION, F.; REID, C. *Real Return Bonds, Inflation Expectations, and the Break-Even Inflation Rate*. [S.l.]: Bank of Canada, 2004.
- CHRISTENSEN, J. H.; DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. *Journal of Econometrics*, v. 164, n. 1, p. 4 – 20, 2011. Annals Issue on Forecasting.
- CHRISTENSEN, J. H.; LOPEZ, J. A.; RUDEBUSCH, G. D. Inflation expectations and risk premiums in an arbitrage-free model of nominal and real bond yields. *Journal of Money, Credit and Banking*, Wiley Online Library, v. 42, n. s1, p. 143–178, 2010.
- CHRISTENSEN, J. H. E.; LOPEZ, J. a.; RUDEBUSCH, G. D. Can Spanned Term Structure Factors Drive Stochastic Yield Volatility? *SSRN Electronic Journal*, 2012. ISSN 1556-5068. Disponível em: <<http://www.ssrn.com/abstract=2023715>>.
- COCHRANE, J. H. *Asset pricing*. [S.l.]: Princeton university press Princeton, 2005.
- DEACON, M.; DERRY, A. Estimating market interest rate and inflation expectations from the prices of uk government bonds. *Bank of England Quarterly Bulletin*, v. 34, n. 3, p. 232–240, 1994.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006.
- DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. *Yield Curve Modeling and Forecasting The Dynamic Nelson-Siegel Approach*. 2011.
- DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D.; ARUOBA, S. B. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 131, n. 1, p. 309–338, 2006.
- DUFFEE, G. R. Term premia and interest rate forecasts in affine models. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 57, n. 1, p. 405–443, 2002.
- DUFFIE, D.; KAN, R. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical finance*, Wiley Online Library, v. 6, n. 4, p. 379–406, 1996.
- MOUABBI, S. An arbitrage-free nelson-siegel term structure model with stochastic volatility for determination of risk premia. 2013. Job Market Paper - Queen Mary, University of London - November, 2013.
- NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, JSTOR, p. 473–489, 1987.

- SCHOLTES, C. On market-based measures of inflation expectations. *Bank of England Quarterly Bulletin*, Spring, 2002.
- SHEN, P.; CORNING, J. Can tips help identify long-term inflation expectations? *Economic Review-Federal Reserve Bank of Kansas City*, Federal Reserve Bank of Kansas City, v. 86, n. 4, p. 61–87, 2001.
- SVENSSON, L.; SODERLING, P. New techniques to extract market expectations from financial instruments. *Journal of Monetary Economics*, v. 40, p. 383–429, 1997.
- SVENSSON, L. E. *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. [S.l.], 1994.
- VAL, F. de F.; BARBEDO, C. H. da S.; MAIA, M. V. Expectativas inflacionárias e inflação implícita: será que pesquisas de mercado fornecem medidas precisas? *BBR-Brazilian Business Review*, FUCAPE Business School, n. 3, p. 88–107, 2011.
- VICENTE, J. V. M.; GUILLEN, O. T. d. C. Do inflation-linked bonds contain information about future inflation? *Revista Brasileira de Economia*, SciELO Brasil, v. 67, n. 2, p. 277–286, 2013.