

# Análise do Jogo Induzido pelo Mecanismo SiSU de Alocação de Estudantes em Universidades

Luis Abreu\*

José Raimundo Carvalho†

## Resumo

No Brasil, a busca pela redução das ineficiências observadas na alocação de vagas em instituições de ensino superior via o tradicional Vestibular levou à formulação e implantação de um mecanismo alternativo de seleção para admissão superior: o Sistema de Seleção Unificada (SiSU), criado em 2010. Apesar da importância do SiSU, a literatura econômica sobre suas especificidades é praticamente inexistente. O jogo induzido pelo SiSU possui interessantes características: inicia-se com uma fase “pré-jogo” de sinalização e atualização de crenças que se sucede por um jogo de matching que determina que vaga será ofertada a cada estudante. Na sequência, o SiSU apresenta ao estudante um jogo do tipo aceita-rejeita onde as vagas rejeitadas são reofertadas até gerar o matching final. Assim, como os mecanismos analisados por Haeringer e Klijn (2008) e Pathak e Sönmez (2013a), o SiSU utiliza um mecanismo de matching com restrições de anúncios de preferências. No entanto, nesse trabalho consideramos apenas o aspecto de informação incompleta do jogo. Fazendo uso dos resultados apresentados em Radner e Rosenthal (1982), mostramos a existência de equilíbrio em estratégias puras no jogo induzido pelo SiSU.

**Palavras-chave:** SiSU, Modelos de *Matching*, Mecanismo SOSM.

**ANPEC:** Área 8 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

## Abstract

In Brazil, the quest for reducing inefficiencies in the allocation of places in institutions of higher education by the traditional Vestibular led to the formulation and implementation of an alternative selection mechanism for higher admission: the Unified Selection System (SiSU), created in 2010. Despite SiSU's importance, the economic literature on its specificities is virtually nonexistent. The game induced by SiSU has interesting characteristics: it starts with a signaling and updating of beliefs “pre-game” followed by a matching game that determines which university's place will be offered to each student. Further, the SiSU presents to students an accept-reject type of game where non accepted vacancies are offered again to generate the final matching. Thus, similarly to mechanisms analyzed by Haeringer e Klijn (2008) and Pathak e Sönmez (2013a), the SiSU uses a matching mechanism with restrictions on submitted preferences. However, in our paper we consider only the aspect of incomplete information from the game. Making use of results presented by Radner e Rosenthal (1982), we show the existence of equilibrium in pure strategies in the game induced by SiSU.

**Keywords:** SiSU, Matching Models, SOSM Mechanism.

**JEL Classification:** C72, D82, I23.

---

\*Laboratório de Econometria e Otimização/CAEN/UFC.

†CAEN/UFC e Laboratório de Econometria e Otimização/CAEN/UFC. josecarv@ufc.br

## 1 Introdução

Os procedimentos utilizados na seleção de estudantes para ingresso no ensino superior, *processos de admissão*, variam amplamente de país a país. Helms (2008) descreve os principais formatos utilizados nos processos de admissão de diversos países ao redor do mundo. Os fatores apontados por Helms como mais comumente considerados no processo de admissão podem ser agrupados em quatro principais categorias: exames, preparação secundária, matérias de aplicação e fatores demográficos.

No Brasil, durante quase um século, o sistema de seleção utilizado foi predominantemente o Vestibular, sistema descentralizado de seleção que por vezes leva o concorrente a um *trade-off*: concorrer à vaga em seu curso de maior preferência ou a um curso menos preferível mas para o qual este dispunha de maiores chances de aprovação. Os males desse trade-off vão da alocação ineficiente das vagas a, conseqüentemente, maiores taxas de evasão. A ineficiência aqui apontada refere-se ao fato de que sendo o Vestibular um ambiente de incerteza e grande competitividade e, diante da restrição imposta aos estudantes quanto ao número de cursos a que se pode concorrer (a saber, um único), o estudante age muito provavelmente de modo estratégico e, de modo geral, o resultado será uma alocação instável.

Sob a ótica da teoria econômica, as instituições de ensino superior e os estudantes que buscam entrada no ensino superior são tratados como agentes possuindo preferências mútuas sobre os indivíduos do outro grupo. O problema de parear estudantes e vagas é chamado *Student Placement* (ou *School Choice*, ou ainda *College Admission*) e o processo pelo qual o pareamento é realizado de um *mecanismo de matching*. Desde os trabalhos seminais de Gale e Shapley (1962), Dubins e Freedman (1981), Balinski e Sönmez (1999) e Abdulkadiroğlu e Sönmez (2003a), essa área de pesquisa se desenvolveu enormemente.

Não é de hoje que são conhecidas as vantagens da utilização de um mecanismo de *matching* no pareamento de indivíduos, tampouco é exclusividade do sistema educacional. Mecanismos de *matching* têm sido utilizados nos mercados imobiliário (Hylland e Zeckhauser, 1979), de transplante de órgãos (Roth, Sönmez, e Ünver, 2004), de trabalho (Kelso Jr. e Crawford, 1982), etc. De uma maneira geral, essa literatura contribuiu decisivamente para diminuir os problemas encontrados em mecanismos de *matching* ineficientes.

No Brasil, a busca pela redução de certa ineficiência observada na alocação das vagas em instituições de ensino superior via Vestibular levou à formulação e implantação de um mecanismo alternativo de seleção para admissão superior. De fato, esse mecanismo buscou inicialmente introduzir uma métrica nacional de aferição da qualidade dos estudantes. Tendo início com a implantação, em 1998, de um exame nacional (Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM), aos poucos ajustado para servir como exame de seleção para o ensino superior. Sendo seguido em 2010 da implementação de um sistema de seleção unificado (SiSU), servindo de canal de oferta e demanda por vagas no ensino superior e responsável pela alocação das mesmas. Apesar da importância do SiSU, a literatura econômica sobre suas especificidades é praticamente inexistente. Nesse sentido, o presente trabalho buscou, sob a luz da teoria dos jogos, entender os incentivos induzidos pelo Sistema de Seleção Unificado (SiSU).

Com isso, modelamos o SiSU como um mecanismo de *matching*. Todavia, o SiSU possui características que o diferenciam dos mecanismos usualmente apresentados na literatura de *matching*. Apesar de apresentar-se como um mecanismo de grande complexidade, buscamos modelar o SiSU de forma a contemplar a variedade de aspectos que ele possui. Em nossa modelagem consideramos (i) seus aspectos dinâmicos, uma vez que os participantes do processo de seleção do SiSU são chamados a decidir suas ações em diferentes momentos; (ii) a presença de restrições no espaço de anúncios de preferências dos estudante, pois este está limitado a anunciar listas de preferências contendo, no máximo, dois cursos; e (iii) que as escolhas são realizadas em ambiente de informação incompleta.

Os resultados encontrados sinalizam para o fato de que fatores externos<sup>1</sup> sejam os únicos responsáveis pelos altos índices<sup>2</sup> de não matrícula em primeira chamada observados no SiSU e que o mecanismo do SiSU é menos manipulável que o mecanismo do Vestibular.

Além dessa seção introdutória, desenvolvemos os resultados em quatro seções adicionais.

Na seção 2, introduzimos os principais conceitos e definições utilizados no trabalho e descrevemos variados mecanismos de *matching* (Boston, SOSM, *Top Trading Cycles* e o Vestibular) analisando algumas propriedades destes. Na seção 3, fazemos uma descrição do SiSU, apontando seu uso do mecanismo SOSM durante suas etapas, suas características dinâmicas e de informação incompleta. Na seção 4, resolvemos por indução retroativa o jogo induzido pelo mecanismo do SiSU, caracterizamos um conjunto de estratégias não dominadas dos estudantes e determinamos a existência de equilíbrio em estratégias puras. Na seção 5, tecemos considerações finais. Demonstrações omitidas de nossas proposições são apresentadas no apêndice.

## 2 O modelo básico

Um *problema de student placement* (Balinski e Sönmez (1999)) constitui-se de dois conjuntos disjuntos: um conjunto de estudantes e um conjunto de cursos. Cada estudante possui preferências estritas em relação aos cursos e sua opção externa. Cada curso, segundo as características dos estudantes, atribui-lhes um ordenamento de prioridades estritas em relação uns aos outros (individualmente) e a opção de manter uma vaga desocupada além de uma quantidade fixa de vagas disponíveis.

Utilizaremos  $c_0$  para representar a opção externa dos estudantes. A opção externa dos estudantes representa, por exemplo, a opção do estudante de estudar em uma instituição não listada no problema ou trabalhar, dentre outras. Denotaremos por  $P_i$  a relação de preferências estritas do estudante  $i$ , por exemplo,  $P_i = c_1, c_2, c_0, c_3, \dots, c_m$  indica que o estudante  $i$  prefere (estritamente) estudar no curso  $c_1$  a estudar no curso  $c_2$ , prefere (estritamente) estudar no curso  $c_2$  à sua opção externa,  $c_0$ , e prefere (estritamente) sua opção externa a estudar em qualquer dos demais cursos (nos referiremos a esses últimos como cursos *inaceitáveis* ao estudante  $i$ , os demais cursos são denominados *aceitáveis*). Usualmente representaremos as preferências dos estudantes escrevendo somente o conjunto de cursos aceitáveis. Dessa forma, o exemplo anterior pode ser escrito como  $P_i = c_1, c_2$ , e no caso em que nenhum curso é aceitável escrevemos  $P_i = c_0$ . Todas as preferências consideradas são assumidas racionais.

Formalmente, um *problema de student placement* com informação completa é uma sextupla  $(N, C, q, P, x, f)$  consistindo de

- i. Um conjunto de estudantes  $N = \{1, \dots, n\}$ ;
- ii. Um conjunto de cursos  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_m\}$ , onde  $c_0$  representa a opção externa dos estudantes;
- iii. Um vetor de capacidades  $q = (q_{c_0}, q_{c_1}, \dots, q_{c_m})$ , onde  $q_c$  é um número inteiro positivo indicando o número máximo de estudantes que podem ser admitidos no curso  $c$ , com  $\sum q_c \geq n$ ;
- iv. Uma lista de preferências dos estudantes  $P = (P_1, \dots, P_n)$ , onde  $P_i$  é a relação de preferências estritas do estudante  $i$  em relação aos cursos, incluindo a opção externa;
- v. Um perfil de características dos estudantes  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , onde  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$  é o vetor de características do estudante  $i$ ;

<sup>1</sup>Utilizamos o termo fatores externos para nos referir a fatores não incorporados ao modelo, afetando a utilidade da opção externa dos jogadores. A influência desses fatores é percebida pela observância, na prática, de comportamento estratégico dos jogadores não justificado pelo modelo teórico aqui apresentado.

<sup>2</sup>Embora não haja divulgação oficial do Ministério da Educação acerca do percentual de alunos que não realiza matrícula em primeira ou segunda chamadas, são frequentes notícias apontando para a grande magnitude destes valores. Ver, por exemplo, Ciegliński (2012) ou Universidade Federal do Ceará. (2013).

- vi. Uma lista de funções prioridades dos cursos  $f = (f_{c_0}, f_{c_1}, \dots, f_{c_m})$  onde  $f_c$  é um funcional do espaço de características dos estudantes. O estudante  $i$  tem maior prioridade do que o estudante  $j$  no curso  $c$  se, e somente se,  $f_c(x_i) > f_c(x_j)$ ;

Diremos que as prioridades em um problema de *student placement* são estritas se não existem  $i, j \in N$  e  $c \in C$  para os quais  $f_c(x_i) = f_c(x_j)$ .

Uma solução particular para um problema de *student placement* é um *matching* – uma alocação de estudantes aos cursos, onde cada estudante é designado a um único curso (ou sua opção externa) e a cada curso se designa um número de estudantes não superior ao seu número de vagas. Formalmente, temos

**Definição 1.** Um *matching*  $\mu$  é uma função de  $N$  em  $C$  satisfazendo  $|\mu^{-1}(c)| \leq q_c$  para todo  $c \in C$ . Onde  $|\mu^{-1}(c)|$  denota a cardinalidade do conjunto  $\{i \in N : \mu(i) = c\}$ .

Diremos que um estudante, digamos  $i$ , prefere o *matching*  $\mu$  ao *matching*  $\nu$  se e somente se ele prefere  $\mu(i)$  a  $\nu(i)$ . Isto é, assumimos que a todo estudante importa apenas a que curso este é alocado segundo o *matching*, não importando a alocação dos demais agentes.

No contexto de *student placement*, os seguintes conceitos são centrais: Considere um *matching*  $\mu$  que aloca o estudante  $i$  em um curso por este não *aceitável*. De modo que o estudante  $i$  prefere sua opção externa à alocação dada a este segundo  $\mu$ . Tal *matching*  $\mu$  é dito ser *bloqueado* pelo estudante descontente. Considere um *matching*  $\mu$  para o qual existe um par estudante-curso  $(i, c)$  tal que o estudante  $i$  prefere o curso  $c$  à sua alocação e tem maior prioridade neste do que algum dos estudantes em alocados no curso  $c$ . Diz-se que o par  $(i, c)$  *bloqueia* o *matching*  $\mu$ .

**Definição 2.** Um *matching* é *estável* se não é bloqueado por qualquer indivíduo ou par.

**Definição 3.** Em um *matching*  $\mu$  não há desperdício, se para todo par  $(i, c)$  caso o estudante  $i$  prefira o curso  $c$  ao curso especificado pelo *matching*,  $\mu(i)$ , então  $|\mu(c)^{-1}| = q_c$ .

**Definição 4.**

Para um dado mercado de *student placement*, diremos que um *matching*  $\mu$  é um *matching* *estável estudante-ótimo* (SOSM) se todo estudante prefere ser alocado segundo  $\mu$  do que ser alocado segundo qualquer outro *matching* *estável*. Similarmente, diremos que um *matching*  $\mu$  é um *matching* *estável curso-ótimo* se para todo curso tem-se que os estudantes alocados segundo  $\mu$  tem maior prioridade do que os estudantes alocados segundo qualquer outro *matching* *estável*. Denotaremos o *matching* *estudente-ótimo* e o *matching* *curso-ótimo* respectivamente por  $\mu_N$  e  $\mu_C$ .

O seguinte resultado clássico é fundamental para a análise que se segue:

**Teorema 1** (Gale e Shapley, 1962). *Para todo mercado de student placement existe um matching estável. Mais ainda, quando as preferências e prioridades são estritas, existe um matching estável estudante-ótimo e um matching estável curso-ótimo.*

## 2.1 O jogo induzido pelo mecanismo de matching

Dado um mercado de *student placement*,  $(N, C, q, P, x, f)$ , um mecanismo de *matching* induz um *mecanismo de revelação* uma vez que o *matching* resultante é determinado com base naquilo que os estudantes anunciam como sendo suas preferências. Cada estudante  $i$ , cujas preferências são  $P_i$ , joga escolhendo estrategicamente que ordenamento de preferências anunciar,  $a_i \in A_i$ . Onde  $A_i$  denota o espaço de preferências passíveis de serem anunciadas pelo estudante  $i$ . O perfil de preferências anunciadas será denotado por  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . O mecanismo produz um *matching*  $\mu = \varphi(a, x)$ , onde  $\varphi$  é a função que descreve o resultado do mecanismo para qualquer perfil  $a$  de preferências anunciadas. (Por questões práticas, explicitaremos o resultado

do mecanismo de matching como função das características dos estudantes.) Tal jogo é chamado o *jogo induzido pelo mecanismo*  $\varphi$ . Portanto, os mecanismos podem e devem ser analisados sob a ótica da teoria dos jogos. Nesse contexto, a expressão “jogar” o mecanismo possui uma adequação evidente.

Um mecanismo  $\varphi$  para o qual, quaisquer que sejam as preferências anunciadas  $\alpha$ , o matching  $\varphi(\alpha, x)$  é estável com relação às preferências anunciadas  $\alpha$ , é dito um *mecanismo de matching estável*. Se  $\varphi(\alpha, x)$  é o SOSM em relação às preferências anunciadas  $\alpha$ , então  $\varphi$  é dito o *mecanismo SOSM*. Se  $\varphi(\alpha, x)$  é sempre (Pareto) eficiente com respeito aos estudantes (i.e., se nenhum outro matching é capaz de fazer um estudante melhor sem fazer outro pior, relativamente às preferências  $\alpha$ ) então ele será dito um *mecanismo de matching (Pareto) eficiente*. Observe que estabilidade e eficiência do mecanismo são definidas em relação às preferências anunciadas,  $\alpha$ , e não às verdadeiras preferências dos estudantes,  $P_i$ . Deste modo, o matching só será efetivamente estável ou eficiente se os estudantes anunciarem suas verdadeiras preferências.

Uma estratégia  $\alpha_i^*$  é dita *dominante* para um estudante  $i$  se é uma melhor resposta a todos os possíveis conjuntos de estratégias  $\alpha_{-i}$  adotadas pelos demais estudantes, isto é,  $\varphi(\alpha_i^*, \alpha_{-i}, x) \succeq_i \varphi(\alpha_i, \alpha_{-i}, x)$  para todos  $\alpha_i \in A_i$  e  $\alpha_{-i} \in A_{-i}$ . E, um mecanismo de *matching*  $\varphi$  será dito *não manipulável* (ou *à prova de estratégia*) se para cada estudante é estratégia dominante anunciar suas verdadeiras preferências no jogo induzido pelo mecanismo  $\varphi$ .

**Teorema 2** (Roth, 1985). *O mecanismo SOSM é não manipulável.*

A respeito de estratégias de equilíbrio, temos os seguintes resultados:

**Teorema 3** (Roth, 1985). *Quando preferências e prioridades são estritas, seja  $\mu$  qualquer matching estável para  $(N, C, q, P, x, f)$ . Suponha que cada estudante  $s$  anuncie uma lista de preferência em que o único curso aceitável é  $\mu(i)$ . Este é um equilíbrio no jogo induzido pelo mecanismo SOSM (e  $\mu$  é o matching resultante).*

O core de um mercado de *student placement* é o conjunto de matchings que não são dominados por qualquer outro matching. O próximo resultado estabelece que

**Teorema 4** (Dubins e Freedman, 1981; Roth, 1982). *Seja  $P = (P_1, \dots, P_n)$  as verdadeiras preferências dos estudantes, e seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  preferências anunciadas que difiram de  $P$  em alguma coalizão de estudantes  $I \subseteq N$  que anunciam falsamente suas preferências. Então, não existe matching estável  $\mu$ , com respeito a  $\alpha$ , o qual é preferível a  $\mu_N$  por todos os membros de  $I$ .*

## 2.2 Algoritmos de mecanismos de matching

Nesta seção, descrevemos e analisamos alguns dos mecanismos de *matching* mais conhecidos (SOSM, Boston e *Top Trading Cycles*) e um mecanismo historicamente utilizado no Brasil, a saber, o Vestibular. Para traçarmos uma análise comparativa entre mecanismos tradicionais e o Vestibular e, posteriormente, deste com o SiSU, apresentamos seus algoritmos e apontamos a satisfação ou não de certas propriedades teóricas por cada um destes.

### 2.2.1 SOSM (Gale-Shapley)

Em 1962 com o artigo “College Admission and the Stability of Marriage”, David Gale e Lloyd Shapley apresentaram o problema enfrentado por um curso que dispende de  $q$  vagas e  $n$  candidatos ( $n > q$ ) e suas respectivas qualificações deve decidir que candidatos admitir. Tendo em mente que nem todas as ofertas de admissão serão aceitas, o curso enfrenta o dilema de quantas admissões oferecer. Por outro lado, candidatos tendo também aplicado para outros cursos enfrentam o dilema de aceitar uma admissão já oferecida ou aguardar na esperança de ser admitido em um curso de maior preferência. Sem a pretensão de solucionar esses problemas, mas sim a de apresentar ideias úteis em certas fases do problema de admissão, Gale e Shapley propuseram o algoritmo SOSM.

## Algoritmo SOSM

*Etapa 1:* Cada estudante envia proposta a seu curso preferido. Cada curso considera seus proponentes, designando, *temporariamente*, vaga para estes um a um, seguindo a ordem de prioridade destes, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

*Etapa k,  $k \geq 2$ :* Cada estudante rejeitado na etapa anterior envia proposta a seu curso preferido dentre aqueles que não o rejeitaram ainda. Cada curso considera seus novos proponentes juntamente com os não rejeitados na etapa anterior, designando, *temporariamente*, vaga para estes um a um, seguindo a ordem de prioridade destes, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

O algoritmo termina quando nenhum estudante é rejeitado ou quando os rejeitados já propuseram a todos os cursos por eles desejáveis. As alocações finais passam de temporárias para definitivas. O mecanismo *deferred acceptance* com estudantes propondo é estável e, embora não seja eficiente é Pareto superior a qualquer outro mecanismo estável (Gale e Shapley, 1962). Uma outra importante propriedade desse mecanismo é sua não manipulabilidade (Dubins e Freedman, 1981; Roth, 1982).

### 2.2.2 Boston

Segundo Chen e Kesten (2011), é o mais comum mecanismo de *school choice* observado em prática. Nomeado devido a seu uso pela cidade de Boston, Massachusetts, realiza o *matching* segundo o seguinte algoritmo:<sup>3</sup>

### Algoritmo de Boston

*Etapa 1:* Cada estudante envia proposta à sua primeira escolha de curso. Cada curso considera seus proponentes e designa, *definitivamente*, vaga para estes um a um, seguindo a ordem de prioridade destes, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

*Etapa k,  $k \geq 2$ :* Cada estudante rejeitado na etapa anterior envia proposta à sua  $k$ -ésima escolha de curso. Cada curso com vagas remanescentes considera seus proponentes e designa, *definitivamente*, vaga para estes um a um, seguindo a ordem de prioridade destes, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

O algoritmo termina quando não houver mais vagas desocupadas nem propostas a serem atendidas. O mecanismo de Boston não é estável e é manipulável, todavia, sob a hipótese de não desperdício, é eficiente (Abdulkadiroğlu e Sönmez, 2003b).

### 2.2.3 Top Trading Cycles

Em seu artigo “On Cores and Indivisibility” Shapley e Scarf (1974) exploram a mais simples economia de trocas (cada indivíduo possuindo apenas um bem indivisível). Eles mostram a existência de um core para seu modelo e apresentam um algoritmo para alcançá-lo, o algoritmo *Top Trading Cycles*, o qual atribuem a David Gale. O algoritmo *Top Trading Cycles* tem sido utilizado

---

<sup>3</sup>O mecanismo a seguir definido foi utilizado de 1989 a 2005, para a alocação de estudantes em escolas de ensino primário e secundário. Nas escolas de Boston, os critérios utilizados para determinação das prioridades sofreram constantes modificações durante o período de adoção deste mecanismo, mas predominantemente foram os seguintes: escolha dos pais, estudantes em educação especial e bilíngue, irmãos concorrendo por vaga em mesma escola e proximidade da escola levando em consideração zonas na qual a cidade foi dividida (Boston Public Schools. 2012).

com enorme sucesso no mercado estadunidense de transplantes de rins e começa a ser utilizado também em problemas de *school choice*.<sup>4</sup>

Para a descrição do mecanismo *Top Trading Cycles* precisaremos estabelecer a definição de um ciclo. Um *ciclo* é uma lista ordenada de distintos cursos e estudantes da forma  $(c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_k, s_k)$ , onde  $c_1$  escolhe  $s_1$ ,  $s_1$  escolhe  $c_2$ ,  $c_2$  escolhe  $s_2$ ,  $\dots$ ,  $c_k$  escolhe  $s_k$  e  $s_k$  escolhe  $c_1$ .

## Algoritmo *Top Trading Cycles*

### Primeira rodada

*Etapa 1:* Admite-se que cada estudante deseja algum curso e vice-versa. Designe um contador para cada curso (informando a quantidade de vagas disponíveis no curso). Seu valor inicial é a capacidade do curso.

*Etapa 2:* Cada estudante remanescente “aponta” para seu curso preferido e cada curso remanescente “aponta” para o estudante de maior prioridade. Existe pelo menos um ciclo. Cada estudante em um ciclo é designado a uma vaga no curso “apontado” e removido do processo. O contador de cada curso em um ciclo é reduzido em um, e se este se torna zero (isto é, se o curso teve todas as suas vagas ocupadas), o curso também é removido do processo. Contadores dos demais cursos mantêm-se inalterados.

### k-ésima rodada, $k \geq 2$

*Etapa 1:* Estudantes/cursos que não desejam qualquer dos cursos/estudantes remanescentes são sistematicamente removidos do processo, recebendo sua opção externa/mantendo as vagas restantes desocupadas, até que cada estudante que deseje algum dos cursos restantes e vice-versa.

*Etapa 2:* Cada estudante remanescente “aponta” para seu curso preferido dentre os cursos remanescentes e cada curso remanescente “aponta” para o estudante de maior prioridade dentre os estudantes remanescentes. Existe pelo menos um ciclo. Cada estudante em um ciclo é designado a uma vaga no curso “apontado” e removido do processo. O contador de cada curso em um ciclo é reduzido em um, e se este se torna zero, o curso também é removido do processo. Contadores dos demais cursos mantêm-se inalterados.

O algoritmo termina quando não há mais estudantes ou cursos remanescentes. O mecanismo *Top Trading Cycles* é eficiente e não manipulável (Abdulkadiroğlu e Sönmez, 2003b). Entretanto, não é estável.

## 2.2.4 Vestibular

No Brasil, ao longo dos anos se estabeleceram diversas formas de exames de admissão, mas o Vestibular tradicional, o mais frequente, é realizado em sua grande maioria em duas etapas. Na UFC, a primeira etapa é composta por questões objetivas de múltipla escolha, comuns a todos os candidatos de todos os cursos e a segunda etapa é composta por questões discursivas relacionadas à área do curso escolhido.

Diferentemente dos mecanismos até então abordados, o mecanismo Vestibular é “descenralizado” no sentido de que ele ocorre no âmbito de uma única instituição. Assim, apesar de agregar uma série de cursos e sua modelagem (no âmbito institucional) ser análoga à modelagem até então abordada (modelagem de mecanismos centralizados) devemos ter em mente

---

<sup>4</sup>Apesar de ter sido recomendado pela Força-Tarefa de Alocação Estudantil das Escolas Públicas de Boston (BPS Student Assignment Task Force) como mecanismo para substituição do mecanismo de Boston, o mecanismo *Top Trading Cycles* passou a ser utilizado na alocação estudantil apenas em 2012, pela cidade de Nova Orleães, Luisiana. (Sönmez 2012)

que o estudante é passível de participação em diferentes mecanismos de Vestibular, e muito embora os algoritmos de *matching* destes sejam independentes, a efetivação dos *matchings* (isto é, a aceitação por parte do estudante do *matching* resultante de um algoritmo de Vestibular) é claramente afetada pelo *matching* que lhe é proposto por distintos mecanismos de Vestibular no qual este participe.

Uma distinção desse modelo faz-se presente, então, na opção externa do indivíduo. Relembramos que a opção externa foi definida como *trade-offs* enfrentados pelo estudante ao encarar a oportunidade de estudar em um dos cursos, tais como, estudar em uma instituição não listada no problema, trabalhar, etc. Deste modo, a opção externa se traduz como um valor esperado do estudante “de tudo o que é alheio ao problema modelado”. Portanto, o conjunto de cursos aceitáveis deixa de ser estático, isto é, ao participar de um Vestibular, se o estudante escolhe um curso que é *ex-ante* preferível a sua opção externa, a aprovação do estudante nesse curso não significa a aceitação do mesmo pelo referido estudante, uma vez que *ex-post* este curso pode não ser preferível à sua opção externa se o estudante participou de um diferente mecanismo de Vestibular e foi aceito em um curso melhor. Apesar disso, optaremos por continuar a expressar a opção externa do estudante como algo estático. Uma modelagem que leva em consideração a participação de estudantes em distintos mecanismos de Vestibular pode ser encontrada em Gon-tijo (2008). Outra característica do vestibular que o distingue dos anteriormente apresentados é que ele impõe restrição a anúncios de listas de preferências de, no máximo, um único curso.

### Algoritmo Vestibular

*Etapa única:* Cada estudante envia proposta à sua (única) escolha de curso. Cada curso considera seus proponentes e designa, *definitivamente*, vaga para estes um a um, seguindo a ordem de prioridade destes, até que não haja mais vagas desocupadas ou propostas a serem atendidas.

O algoritmo termina.

**Proposição 1.** *O mecanismo de Vestibular tem as seguintes propriedades:*

- (i) *é estável.*
- (ii) *é eficiente.*

É notável que se impusermos aos jogadores uma restrição sobre o anúncio de preferências, anunciar não mais do que um único curso, os mecanismos SOSM e Boston coincidem com o mecanismo do Vestibular. Discutiremos adiante o efeito de restrições sobre o anúncio de preferências no mecanismo SOSM, mas é evidente que a inclusão de restrições sobre os anúncios, de modo geral, impede o estudante de anunciar suas verdadeiras preferências, exigindo que ajam de modo estratégico. Assim, embora o mecanismo do Vestibular seja estável e, sob a hipótese de não desperdício, eficiente, estas propriedades são definidas em relação às preferências anunciadas e estas diferirão, em geral, das verdadeiras. Deste modo, não se pode considerar o *matching* decorrente do mecanismo do Vestibular efetivamente (isto é, em relação às verdadeiras preferências) estável ou eficiente. Apresentamos na Tabela 1 os mecanismos discutidos nessa seção apontando as propriedades atendidas por cada um destes.

### 3 O Sistema de Seleção Unificada – SiSU

No Brasil, o sistema de seleção para entrada no ensino superior foi predominantemente o Vestibular, desde a sua regulamentação oficial em 1911 até recentemente, onde passou a dividir esse papel com o Sistema de Seleção Unificada (SiSU). A mudança no processo brasileiro



Tabela 1: Propriedades dos Mecanismos

Mecanismo	Estável	Eficiente	Não-manipulável
SOSM	Sim	Não	Sim
Boston	Não	Sim*	Não
Top Trading Cycles	Não	Sim	Sim
Vestibular	Sim	Sim*	-

Fonte: Elaboração própria.

Nota: \* Sob a hipótese de não desperdício.

de admissão ao ensino superior tem início em 1998 com a implantação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)<sup>5</sup> seguida da implantação do SiSU, em 2010, que oferece às instituições de educação superior uma alternativa de realização de exame seletivo de entrada utilizando as notas do ENEM. Além disso, o SiSU oferece ao sistema federal de ensino superior, e às demais instituições que aderirem a este, significativos ganhos operacionais e de custos, e busca reforçar a influência do modelo de avaliação do ENEM sobre as matrizes curriculares e práticas pedagógicas aplicadas no ensino médio. O SiSU também amplia as possibilidades dos estudantes egressos do ensino médio de candidatar-se às vagas oferecidas por instituições públicas de todo o país, permitindo maior mobilidade acadêmica e maior equidade no acesso à disputa das vagas ofertadas.

### 3.1 O procedimento do SiSU

No SiSU, o conjunto de jogadores é constituído pelos participantes do último ENEM. Devido à Lei de Cotas, instituída em 2012, ao disputar uma vaga, os jogadores se auto-selecionam em um dos seguintes grupos:

- Ampla concorrência;
- Estudantes que tenham cursado integralmente o ensino médio em escolas públicas;
- Estudantes que tenham cursado integralmente o ensino médio em escolas públicas e autodeclarados pretos, pardos ou indígenas;
- Estudantes que tenham cursado integralmente o ensino médio em escolas públicas, oriundos de famílias com renda igual ou inferior a 1,5 salário-mínimo per capita;
- Estudantes que tenham cursado integralmente o ensino médio em escolas públicas, oriundos de famílias com renda igual ou inferior a 1,5 salário-mínimo per capita e autodeclarados pretos, pardos ou indígenas.

Cada curso reserva dado percentual de suas vagas para cada um desses grupos. O estudante declara a que vagas deseja concorrer, mas perde direito à vaga aquele que não comprovar o atendimento aos requisitos de acordo com os critérios da instituição para a qual foi selecionado.

*Hipótese 1.* Nenhum jogador concorre a vagas destinadas a grupos distintos.

O processo seletivo do SiSU se divide em várias etapas com diferentes características e, nesse sentido, não se adequa totalmente a nenhum dos sistemas analisados anteriormente. A seguir descrevemos suas etapas de acordo com suas características.

<sup>5</sup>O exame foi criado com a finalidade de ser uma modalidade alternativa ou complementar de acesso aos cursos profissionalizantes, pós-médio e ao ensino superior.

**Part 1: Jogo de sinalização.** A primeira etapa é denominada *período de inscrição* e constitui um jogo de sinalização. O período de inscrição compreende um intervalo de cinco dias durante o qual o estudante pode a qualquer momento acessar a plataforma do sistema (usualmente no site [sisu.mec.gov.br](http://sisu.mec.gov.br)) e escolher, em ordem de preferência, até duas opções dentre as ofertadas pelas instituições participantes do processo, isto é, o estudante pode anunciar uma lista de preferências de, no máximo, dois cursos.<sup>6</sup>

A partir do segundo dia, à 0h o sistema faz uso das opções correntes de cada estudante, computando o *matching* que seria ofertado aos estudantes na etapa seguinte – primeira chamada – se nenhum estudante alterasse suas opções desde então. A partir das 2hs, ao acessar a plataforma do sistema, o estudante recebe informações do *matching* computado. Mediante essa simulação o estudante observa se seria, em primeira chamada, chamado a matricular-se em sua primeira opção, em sua segunda opção ou não seria chamado a matricular-se em quaisquer das duas opções, observando também, para cada uma de suas opções, sua nota, a nota do último classificado – nota de corte – e sua posição no ranking (ver Figura 1).

Figura 1: Representação do layout da página do SiSU apresentado ao estudante durante a etapa de inscrição.

<p><b>ECONOMIA</b></p> <p>UFC - UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS DE FORTALEZA (FORTALEZA, CE)</p> <p><b>35 vagas de ampla concorrência</b></p> <p>Sua nota nesta modalidade é <b>626,42</b> A nota de corte nesta modalidade era <b>616,24 em 10/01/2013 à 0h.</b></p> <p><input type="button" value="Cancelar opção X"/> <input type="button" value="Escolher outro curso B"/></p>	<p><b>MATEMÁTICA</b></p> <p>UFC - UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS DE FORTALEZA (FORTALEZA, CE)</p> <p><b>35 vagas de ampla concorrência</b></p> <p>Sua nota nesta modalidade é <b>621,12</b> A nota de corte nesta modalidade era <b>589,13 em 10/01/2013 à 0h.</b></p> <p><input type="button" value="Cancelar opção X"/> <input type="button" value="Escolher outro curso B"/></p>
<p>... A próxima <b>classificação parcial</b> será divulgada em 11/01/2013 a partir de 2h....</p>	
<p><b>Classificação parcial</b></p> <p>Sua situação na 1ª opção em 10/01/2013 à 0h era:</p> <p>ECONOMIA</p> <p>UFC - UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS DE FORTALEZA (Fortaleza)</p> <p>Sua nota nesta modalidade é <b>626,42.</b> Em 10/01/2012 à 0h a nota de corte nesta modalidade era <b>616,24</b> e você ocupava a <b>21ª posição de 35 vagas.</b></p> <p><small>Para calcular a nota de corte dos cursos por modalidade de concorrência, o Sisu considera a quantidade de vagas disponíveis e o número de inscritos no dia anterior. A nota de corte é, portanto, apenas uma referência e não assegura a classificação final.</small></p>	<p><b>Classificação parcial</b></p> <p>Sua situação na 2ª opção em 10/01/2013 à 0h era:</p> <p>MATEMÁTICA</p> <p>UFC - UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ CAMPUS DE FORTALEZA (Fortaleza)</p> <p>Você concorria a 35 vagas em Ampla concorrência. Sua nota nesta modalidade é <b>621,12.</b> Em 10/01/2012 à 0h a nota de corte nesta modalidade era <b>589,13.</b> Sua posição não foi considerada pois você estava temporariamente classificado em sua primeira opção.</p> <p><small>Para calcular a nota de corte dos cursos por modalidade de concorrência, o Sisu considera a quantidade de vagas disponíveis e o número de inscritos no dia anterior. A nota de corte é, portanto, apenas uma referência e não assegura a classificação final.</small></p>

Fonte: Elaboração própria.

Além das informações ilustradas na Figura 1, o sítio do SiSU disponibiliza uma ferramenta onde o estudante pode consultar a nota de corte de qualquer curso participante do processo de seleção. Vale observar que o sistema deixa claro ao estudante que as informações apresentadas se referem a um ponto do tempo, especificamente à 0h do atual dia, de modo que as mesmas não representam a atual situação do estudante uma vez que mudanças nas escolhas dos estudantes podem ter ocorrido desde então. A computação desses *matchings* ocorre quatro vezes, i.e., iniciando o período de inscrição numa segunda-feira, o estudante recebe sinalização das escolhas dos adversários diariamente de terça-feira a sexta-feira, último dia do período de inscrição.

**Part 2: Procedimento de matching.** No último dia do período de inscrição, cada estudante anuncia a que vagas irá *efetivamente* concorrer. Ao fim do período de inscrição o sistema computa

<sup>6</sup>Durante o período de inscrição, o estudante pode alterar quantas vezes desejar suas opções de inscrição, sendo considerada para fins de ocupação de vaga apenas a última inscrição realizada.

um matching com base na última lista de preferências anunciada por cada estudante e, com base nesse matching, realiza ofertas aos estudantes. Assim, seja  $\mu$  o matching computado, cada estudante  $i$  recebe oferta de vaga no curso  $\mu(i)$ . Esta etapa é denominada *primeira chamada*.

No regulamento do SiSU consta que, encerrado o período de inscrição, os candidatos são classificados na ordem decrescente das notas nas opções de vagas para as quais se inscreveram, observado o limite de vagas disponíveis na instituição participante do SiSU e a ordem das opções. Ainda, caso o candidato possua nota para ser classificado em suas duas opções de vaga, será selecionado exclusivamente em sua primeira opção. (Brasil, 2010).

Portanto, se estabelecem os seguintes critérios para o resultado da seleção: (i) o estudante é aprovado em, no máximo, uma de suas opções e, em qualquer curso não se classificam mais estudantes do que vagas ofertadas; (ii) se o estudante não é aprovado em seu curso de primeira opção, sua pontuação é inferior à pontuação de qualquer estudante aprovado neste curso; (iii) se o estudante não é aprovado em seu curso de segunda opção, sua pontuação é inferior à pontuação de qualquer estudante aprovado neste curso ou o estudante foi aprovado em sua primeira opção; e (iv) cada candidato concorre inicialmente apenas em sua primeira opção, passando a concorrer em sua segunda opção apenas no caso em que este não consegue vaga na primeira.

O primeiro critério estabelece, como dito anteriormente, que o resultado da seleção é um *matching* entre estudantes e cursos. Os critérios seguintes, caracterizam que o mecanismo de *matching* utilizado para gerar as ofertas de primeira chamada do SiSU é o mecanismo SOSM sob restrições de anúncio a listas de preferências com, no máximo dois cursos.

Cada estudante que recebe oferta de vaga decide por aceitar, assegurando sua vaga, ou rejeitar essa oferta disponibilizando a vaga para ser reofertada em etapa posterior. Estudantes que não recebem oferta de vaga esperam por eventuais ofertas em etapas posteriores.

**Part 3: Ajuste de matching.** Inicia-se um processo de reoferta das vagas rejeitadas através de duas etapas: *segunda chamada e lista de espera*.

Na *segunda chamada*, cada curso que teve ofertas rejeitadas, em primeira chamada, realiza reoferta dessas vagas aos estudantes com maiores prioridades dentre aqueles que indicaram o referido curso como uma de suas opções e não receberam, em etapa anterior, oferta de vaga deste curso ou de curso anunciadamente preferível a este.<sup>7</sup> Logo, estudantes que, em primeira chamada, receberam oferta de sua primeira opção (aceitando ou rejeitando), não recebem nova oferta e, estudantes que, em primeira chamada, receberam oferta de sua primeira opção (aceitando ou rejeitando), podem receber oferta apenas de sua primeira opção. Ressaltamos que aceitar ou rejeitar a oferta recebida, em primeira chamada, não afeta diretamente as chances de receber oferta em segunda chamada.

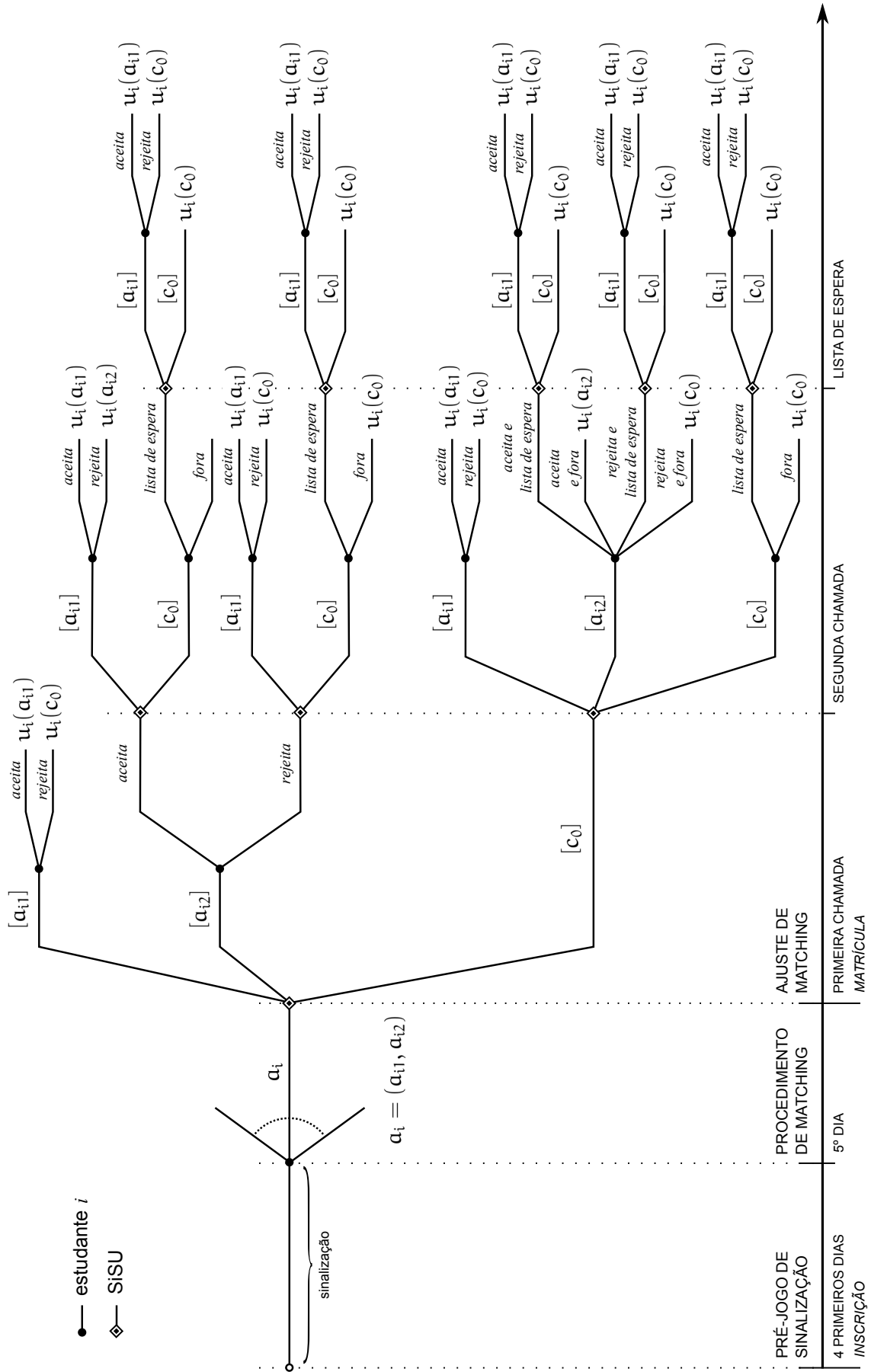
Novamente, estudantes que recebem oferta de vaga, decidem por aceitar ou rejeitar a oferta. Vagas rejeitadas são reofertadas em etapa posterior. Caso o estudante tenha recebido e aceitado oferta em primeira chamada e, novamente, receba e aceite oferta em segunda chamada, o mesmo perde a vaga antes assegurada em primeira chamada e esta é reofertada em etapa posterior.

Todo estudante que não tenha, até então, recebido oferta em sua primeira opção de curso decide por participar ou não da etapa seguinte, *lista de espera*. Os inscritos na lista de espera concorrem exclusivamente à sua primeira opção. Na lista de espera, cada curso que teve ofertas rejeitadas, em segunda chamada, realiza reoferta dessas vagas aos estudantes por ordem de prioridade até que todas as ofertas sejam aceitas ou não haja mais estudantes a serem ofertados (na prática, como o número de candidatos por curso é muito grande, essa é uma possibilidade extremamente improvável). A Figura 2 ilustra, através de uma representação temporal do SiSU, todas as possíveis decisões que um estudante pode ser chamado a realizar durante o processo de realização de matching.

---

<sup>7</sup>Se, seguindo esse processo, dois cursos realizam oferta a um mesmo estudante, o curso menos preferível por

Figura 2: Fluxograma de decisão individual do SiSU.



## 4 O jogo do SiSU

Pelo exposto na seção anterior, observa-se que o jogo induzido pelo SiSU – jogo do SiSU – possui grande complexidade, constituindo-se de um jogo de sinalização seguido de um mecanismo de matching dinâmico com informação incompleta e restrição no espaço de anúncios de preferências. Pode-se conjecturar que a possibilidade dos jogadores comunicarem-se anteriormente à escolha de uma ação, emitindo sinalizações que (potencialmente) reduzam a incerteza presente no jogo, facilitaria a seleção de um desejado resultado. Todavia, jogos de sinalização são notoriamente difíceis de se modelar. Diante dessa dificuldade, optamos por focar em resultados nos quais não há sinalização dos jogadores. No entanto, lembramos que todo equilíbrio para o jogo sem sinalização corresponde a um equilíbrio para o jogo com sinalização.<sup>8</sup> Nessa seção, faremos uso de um teorema de Radner e Rosenthal (1982) para demonstrar que o jogo do SiSU possui equilíbrio (sem sinalização) em estratégias puras.

Usaremos *indução retroativa*, iniciando por analisar o subjogo da fase de *ajuste de matching*, mostrando que sua existência apenas se justifica devido a uma possível variação na utilidade da opção externa dos estudantes no decorrer do jogo, isto é, sob a hipótese de que, para todo estudante, a utilidade da opção externa é estática, não há *ajuste de matching*. Apesar disso, evitaremos maiores complicações e admitiremos a opção externa do estudante como algo estático.

*Hipótese 2.* A utilidade da opção externa do jogador é constante no tempo.

Como justificaremos a seguir, no mecanismo SOSM sob restrições de anúncio de preferências, toda estratégia na qual o anúncio do jogador contém cursos não aceitáveis, é dominada. Assim, admitiremos também a seguinte hipótese:

*Hipótese 3.* Estudantes realizam anúncios contendo apenas cursos aceitáveis.

Sob essas hipóteses, no subjogo da fase de *ajuste de matching*, o perfil de estratégias onde todo jogador, ao receber oferta, joga “aceita”, claramente constitui um equilíbrio. Mais do que isso, a proposição seguinte declara que, sob a hipótese 2, esse equilíbrio pertence ao *core*. A seguir, enunciaremos o nosso resultado fundamental em relação ao subjogo induzido pela etapa de *ajuste de matching* do jogo do SiSU.

**Proposição 2.** *No SiSU, sob as hipóteses 2 e 3, toda coalizão de estudantes visando melhorar seu matching através de rejeição de ofertas, prejudica algum de seus membros.*

Da proposição 2, segue que, sob as hipóteses 2 e 3, em primeira chamada todos os jogadores aceitariam suas ofertas, não havendo, portanto, segunda chamada e lista de espera. Logo, uma vez que a hipótese 3 é teoricamente justificada, ao observarmos, na prática, rejeições de oferta, podemos atribuir tais rejeições a uma variação na utilidade da opção externa dos jogadores excluindo-se a possibilidade de um comportamento estratégico visando obter melhor oferta em etapas posteriores.

Agora, procedemos para a fase do *procedimento de matching* do jogo do SiSU.

### 4.1 O mecanismo SOSM restrito

Na prática é comum a imposição de restrições no anúncio de preferências dos estudantes em mercados de *student placement*. Existem sérias implicações decorrentes de tais restrições, uma delas é que a desejada propriedade de não manipulabilidade do mecanismo SOSM é perdida

---

este estudante desfaz sua oferta, reofertando vaga ao próximo estudante por ordem de prioridade.

<sup>8</sup>Estratégias em que os jogadores enviam sinais aleatórios e estes sinais são ignorados, constituem um equilíbrio onde os sinais são irrelevantes.

e, conseqüentemente, a estabilidade do *matching* resultante (ver, por exemplo, Haeringer e Klijn (2008) ou Pathak e Sönmez (2013b)).

Haeringer e Klijn (2008), além de ressaltar a manipulabilidade do mecanismo SOSM quando há restrições de anúncio de preferências, apontam que não existem estratégias (fracamente) dominantes no mesmo e destacam um conjunto de estratégias não dominadas descritas a seguir.

**Teorema 5** (Haeringer e Klijn, 2008). *Para o mecanismo SOSM sob restrições de anúncio a listas de preferências com, no máximo,  $l$  cursos,*

- (i) *Se um estudante tem no máximo  $l$  cursos aceitáveis, então ele não pode ter resultado melhor do que anunciando suas verdadeiras preferências;*
- (ii) *Se um estudante tem mais de  $l$  cursos aceitáveis, ele não pode fazer melhor do que empregar uma estratégia de anunciar  $l$  cursos aceitáveis, ranqueando-os em sua verdadeira ordem de preferências.*

Assim, se as verdadeiras preferências do estudante são  $P_i = c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  e a este é permitido o anúncio de três cursos, o anúncio  $a_i = c_2, c_4, c_5$  domina (fracamente) qualquer anúncio distinto que contenha (apenas) os mesmos cursos, por exemplo,  $a'_i = c_5, c_2, c_4$ . Como resalta Haeringer e Klijn (2008), a mensagem é que um estudante não perde (podendo inclusive ganhar) por submeter o mesmo conjunto de cursos em sua verdadeira ordem de preferência.

Formalizaremos a descrição do jogo induzido pela fase de *procedimento de matching*, declarando a existência de um equilíbrio em estratégias puras.

#### 4.2 Mecanismo de matching restrito com informação incompleta sobre preferências e prioridades dos demais estudantes

Note que o SiSU, portanto, induz um jogo com restrição no espaço de anúncio de preferências e informação incompleta. Dessa forma, consideremos um modelo no qual os agentes não conhecem as preferências ou características dos demais, conhecendo somente a distribuição de probabilidade segundo a qual estas são desenhadas. Como lidaremos com probabilidades, necessitaremos considerar não somente o ordenamento de preferências dos jogadores mas também a sua função de utilidade esperada. Nos referiremos ao par formado pela função utilidade e vetor de características do jogador  $i$  como seu tipo. Os agentes enfrentam ainda uma restrição no espaço de anúncios de preferências.

Um *jogo de matching  $l$ -restrito com informação incompleta* será dado por um conjunto  $N$  finito de jogadores, consistindo dos estudantes participantes do processo. Cada jogador  $i$  observa a realização do seu tipo – uma variável aleatória de conhecimento privado,  $T_i$  – e então escolhe uma ação,  $a_i$  de um conjunto finito  $A_i = \{1, \dots, K\}$  de todos os possíveis anúncios de preferências com “tamanho” menor ou igual a  $l$  (i.e., listas de preferências com, no máximo,  $l$  cursos aceitáveis), onde  $l$  é um inteiro positivo. O payoff do jogador  $i$ , resultante de uma combinação de ações  $a = (a_i)$  quando as características dos demais são dadas por  $x_{-i} = (x_j)_{j \neq i}$  e seu tipo é  $t_i$ , será denotado por  $v_i(a, x_{-i}; t_i) := u_i(\varphi(a, x))$ , onde  $x = (x_i, x_{-i})$  e  $\varphi$  é um mecanismo de matching.

Formalmente, para cada  $i$ , seja  $(\mathbf{U}_i, \mathcal{U}_i)$  e  $(\mathbf{X}_i, \mathcal{X}_i)$  espaços mensuráveis onde  $\mathcal{U}_i$  e  $\mathcal{X}_i$  são sigma-álgebras de subconjuntos mensuráveis, respectivamente, de  $\mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{X}_i$ . Denote por  $\Omega$  o produto cartesiano dos conjuntos  $\mathbf{U}_1, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{U}_n, \mathbf{X}_n$  com a correspondente sigma-álgebra produto  $\mathcal{F}$ , e seja  $\tau$  uma medida de probabilidade sobre  $\mathcal{F}$ . Para um ponto  $\omega = (u_1, x_1, \dots, u_n, x_n)$  em  $\Omega$ , defina as seguintes projeções de coordenadas

$$U_i(\omega) = u_i, \quad T_i(\omega) = (u_i, x_i) \quad \text{e} \quad X_{-i}(\omega) = (x_j)_{j \neq i}.$$

(Na linguagem de teoria da probabilidade, essas projeções são denotadas *variáveis aleatórias*. Assim, escreveremos, por exemplo, apenas  $U_i$  ao invés de  $U_i(\omega)$ .)

Em cada evento, cada jogador  $i$  conhece seu próprio tipo  $t_i$  e, portanto, pode restringir o conjunto universo  $\Omega$  para  $\Omega_i = \{\omega \in \Omega : T_i(\omega) = t_i\}$  e computar uma medida de probabilidade condicional  $\tau_i(\omega) = \tau(\omega \cap \Omega_i)/\tau(\Omega_i)$ .

Uma *estratégia pura* para o jogador  $i$  é uma função mensurável, digamos  $g_i$ , de  $(U_i, X_i)$  para  $A_i$ . Se os jogadores usam a combinação de estratégias  $g_1, \dots, g_n$ , a utilidade esperada do jogador  $i$  será

$$\mathbb{E} v_i(g(T), X_{-i}; t_i) := \int_{\Omega} v_i(g_1(T_1(\omega)), \dots, g_i(T_i(\omega)), X_{-i}(\omega); t_i) d\tau_i(\omega), \quad (1)$$

onde  $g(T) = (g_1(T_1), \dots, g_n(T_n))$ .

Para que (1) esteja bem definida para toda combinação de estratégias puras, devemos ter que, para todo  $a \in A := \times_i A_i$ ,  $v_i(a, X_{-i}(\cdot); t_i)$  seja uma função  $\tau_i$ -integrável em  $\Omega$ . (Isto será o caso quando, por exemplo, para todo  $a \in A$ ,  $\varphi(a, x_i, \cdot)$  for uma função mensurável em  $X_{-i} := \times_{j \neq i} X_j$ .)

Denotemos por  $\Delta A_i$  o espaço de estratégias mistas do jogador  $i$ .<sup>9</sup> Uma *estratégia comportamental* para o jogador  $i$  é uma função mensurável, digamos  $b_i$ , de  $(U_i, X_i)$  em  $\Delta A_i$ . Interpretamos a  $k$ -ésima coordenada de  $b_{ik}(t_i)$  como a probabilidade do jogador anunciar  $k$  dado que seu tipo é  $t_i$ . Dizemos que a estratégia  $b_i$  é *pura* se  $b_i(t_i)$  é um vetor unitário para quase todo  $t_i$ . Denote por  $B_i$  o conjunto de estratégias comportamentais do jogador  $i$ .

Para um dado perfil de estratégias mistas  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , com  $\sigma_i \in \Delta A_i$  para todo  $i$ , e um perfil de anúncios  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , com  $a_i \in A_i$  para todo  $i$ , denotamos a probabilidade do perfil de anúncios  $a$  ocorrer em  $\sigma$  por  $\pi(a, \sigma)$ . Assim,

$$v_i(\sigma, x_{-i}; t_i) = \sum_{a \in A} v_i(a, x_{-i}; t_i) \cdot \pi(a, \sigma)$$

Se, para todo  $i$ , o jogador  $i$  utiliza a estratégia comportamental  $b_i$ , e se denotamos por  $b = (b_1, \dots, b_n)$  e  $b(T) = (b_1(T_1), \dots, b_n(T_n))$ , podemos expressar a utilidade esperada do jogador  $i$  como

$$V_i(b) = \mathbb{E} v_i(b(T), X_{-i}; t_i).$$

Um *equilíbrio* (de Nash) em estratégias comportamentais é dado por um perfil de estratégias  $b^* = (b_1^*, b_2^*)$  tal que para todo  $i$  e todo  $b_i \in B_i$  tem-se que  $V_i(b_i^*, b_{-i}^*) \geq V_i(b_i, b_{-i}^*)$ . Se  $b^*$  e  $\hat{b}$  são equilíbrios, dizemos que  $\hat{b}$  é uma *purificação* de  $b^*$  se, para todo jogador  $i$ ,  $\hat{b}_i$  é pura, e  $V_i(\hat{b}) = V_i(b^*)$ .

Portanto, uma purificação de um equilíbrio  $b^*$  é um equilíbrio que dá a cada jogador a mesma utilidade esperada que  $b^*$ . O teorema a seguir apresenta hipóteses sob as quais existirá um equilíbrio e todo equilíbrio terá uma purificação. Mais ainda, a purificação  $\hat{b}$  de  $b^*$  pode ser escolhida de modo a, para todo  $i$ ,  $\mathbb{E} \hat{b}_i(T_i) = \mathbb{E} b_i^*(T_i)$ . de fato, o mesmo método de prova gera a conclusão mais forte de que toda combinação de estratégias  $b' = (b'_i)$  tal que, para todo  $i$ ,  $b'_i$  é igual a  $\hat{b}_i$  ou  $b_i^*$ , é também um equilíbrio.

**Teorema 6** (Radner e Rosenthal, 1982). *Se, para cada jogador  $i$ ,*

(a) *a distribuição de  $U_i$  é não-atômica,*

(b) *o conjunto  $X_i$  é finito, e*

(c) *as variáveis aleatórias  $\{U_j : j \neq i\}$  juntamente com a variável  $Y_i := (T_i, X_{-i})$  são mutuamente independentes,*

*então,*

*i. existe um equilíbrio,*

*ii. todo equilíbrio tem uma purificação, e*

*iii. se um equilíbrio pertence ao core do jogo, sua purificação também pertence.*

<sup>9</sup>Espaço de distribuições de probabilidade sobre  $A_i$ .

De posse desse resultado, podemos estabelecer o seguinte importante resultado acerca do jogo induzido pelo mecanismo do SiSU.

**Proposição 3.** *O jogo induzido pelo mecanismo do SiSU possui um equilíbrio (sem sinalização) em estratégias puras, onde o estudante anuncia dois cursos aceitáveis, ranqueando-os em sua verdadeira ordem de preferências e, caso receba qualquer oferta, aceita.*

Antes de encerrarmos a seção é interessante indagar sobre as propriedades do SiSU *vis-a-vis* o Vestibular. Na subseção 2.2 fizemos uma análise de variados mecanismos observando suas características quanto a não manipulabilidade, eficiência e estabilidade. No entanto, a introdução de restrições sobre o anúncio das preferências a qualquer destes tem impactos sobre suas propriedades usuais, o que levanta a seguinte questão: sendo o mecanismo do SiSU (mecanismo SOSM sob restrições de anúncio a listas de preferências com, no máximo, dois cursos) manipulável, o que o tornaria mais desejável do que, por exemplo, o mecanismo de Vestibular (o qual pode ser visto como um mecanismo SOSM sob restrições de anúncio a listas de preferências com, no máximo, um curso)?

Pathak e Sönmez (2013b) propõem uma comparação da manipulabilidade de mecanismos com a seguinte definição: Um mecanismo  $\psi$  é *pelo menos tão manipulável quanto* um mecanismo  $\varphi$  se todo problema de *student placement* que é vulnerável à manipulação sob  $\varphi$  é também vulnerável à manipulação sob  $\psi$ , e este é *mais manipulável* se, em adição, existe pelo menos um problema de *student placement* que é vulnerável à manipulação sob  $\psi$  mas não sob  $\varphi$ .

Com base nessa medida de manipulabilidade apresentam o seguinte resultado

**Teorema 7** (Pathak e Sönmez, 2013b). *Seja  $l > k > 0$  e suponha que existem pelo menos  $l$  cursos. Então o mecanismo SOSM com possibilidade de anúncio de  $k$  opções de cursos é mais manipulável que o mecanismo deferred acceptance com possibilidade de anúncio de  $l$  opções de cursos.*

O que nos permite concluir que o mecanismo do SiSU produz matchings menos manipuláveis do que o mecanismo do Vestibular e conjecturar que permitir anúncio de maior número de cursos leve a um mecanismo ainda menos manipulável.

Ainda, Chen e Kesten (2011) definem, de maneira análoga, uma medida de grau de estabilidade e (Pareto) eficiência. Um mecanismo  $\psi$  é *pelo menos tão estável quanto* (pelo menos tão eficiente quanto) um mecanismo  $\varphi$  se todo problema de *school choice* que é estável (eficiente) sob  $\varphi$  é também estável (eficiente) sob  $\psi$ , e este é *mais estável* (*mais eficiente*) se, em adição, existe pelo menos um problema de *school choice* que é estável (eficiente) sob  $\psi$  mas não sob  $\varphi$ .

Nesse sentido, seria o mecanismo SiSU mais estável ou eficiente que o mecanismo do Vestibular? Embora não tenhamos resposta a essa pergunta, somos levados a crer que o SiSU produza sim *matchings* tanto mais estáveis quanto mais eficientes do que o Vestibular.

## 5 Considerações finais

Este trabalho objetivou fornecer uma análise, no âmbito da teoria dos jogos, do recentemente implantado mecanismo brasileiro de acesso universitário, o Sistema de Seleção Unificada (SiSU).

Desde sua implantação, o SiSU vem apresentando uma crescente participação tanto de estudantes que buscam acesso ao ensino superior, quanto de cursos, que passam a utilizá-lo no lugar do tradicional Vestibular. Diante desses fatos faz-se essencial um melhor entendimento das “qualidades” da alocação gerada pelo SiSU. No entanto, o SiSU tem sido um tema ausente na literatura econômica brasileira. Dessa forma, este trabalho vem preencher esta lacuna, esperando fomentar outras pesquisas acerca do tema, bem como contribuir através da inclusão de uma perspectiva econômica à discussão já existente acerca do SiSU em outros campos do conhecimento.



Alicerçados na teoria introduzida por Gale e Shapley (1962), iniciamos o trabalho de descrição do SiSU como um mecanismo de matching. As características do SiSU levou-nos a desenvolver o trabalho dentro de um contexto de *student placement*. Nesse contexto, a teoria descreve um mecanismo de matching como um processo que, partindo de preferências anunciadas pelos estudantes e das verdadeiras preferências dos cursos, gera um matching entre os mesmos.<sup>10</sup> Todavia, o SiSU se desenvolve em diversas etapas, ou seja, o sistema possui aspectos sequenciais (ou dinâmicos). Inicialmente, estudantes participam de um “pré-jogo” de sinalização, seguidos de um jogo dinâmico de matching composto de um jogo de matching restrito com informação incompleta sobre preferências e prioridades dos demais estudantes e de um jogo de ajuste de matching no estilo aceita-rejeita.

Embora a fase de sinalização desempenhe papel crucial no conjunto informacional dos jogadores nos restringimos a analisar equilíbrios sem sinalizações. Ainda assim, foi possível a constatação de valiosas características do SiSU.

Por exemplo, é notório que grande parte das matrículas ofertadas na primeira chamada do SiSU são rejeitadas, gerando a necessidade da realização de novas propostas de matching (Ver, por exemplo, Cieglinski (2012) ou Universidade Federal do Ceará. (2013)). Isto prolonga o tempo demandado pelo processo de seleção aumentando os custos de participação para os estudantes e, principalmente, para as instituições de ensino superior. Os resultados encontrados demonstram que (i) fatores externos ao mecanismo do SiSU parecem ser os únicos responsáveis pelo alto índice de não matrícula em primeira chamada e que (ii) o mecanismo do SiSU é menos manipulável que o mecanismo do Vestibular.

Apesar dos resultados encontrados parecerem promissores é importante salientar algumas omissões:

- a) Não modelamos o jogo de sinalização que antecede a submissão (em definitivo) das listas de preferências dos estudantes;
- b) Em nossa comparação do mecanismo do SiSU em relação ao mecanismo do Vestibular não conseguimos avaliar se algum desses é, segundo Chen e Kesten (2011), mais estável ou mais eficiente;
- c) O trabalho não considera o possível comportamento estratégico dos cursos via a escolha de suas capacidades e ou na decisão de realizar sua seleção via Vestibular ou via SISU (Considerações do possível comportamento estratégico dos cursos via capacidades são feitas em Sönmez (1997) e, mais recentemente, em Kesten (2012) no contexto de *school choice*).

Por fim, sugerimos para trabalhos futuros a modelagem computacional do mecanismo do SISU bem como a análise qualitativa dos *matchings* resultantes deste para os casos em que outros mecanismos que não o SOSM são utilizados para a geração do *matching* proposto em primeira chamada e a modelagem do jogo de sinalização do *período de inscrição*.

## Referências

Abdulkadiroğlu, A., e T. Sönmez (2003a): “School Choice: A Mechanism Design Approach,” *The American Economic Review*, 93(3), 729 – 747.

——— (2003b): “School Choice: A Mechanism Design Approach,” Working Paper 0203-18, Department of Economics. Columbia University.

Abreu, L., e J. R. Carvalho (2013): “Mecanismos de Seleção de Gale-Shapley Dinâmicos em Universidades Brasileiras: SISU,  $SISU_{\alpha}$ ,  $SISU_{\beta}$ ,” *Série Estudos Econômicos* n. 8, Departamento de Economia/CAEN. Universidade Federal do Ceará.

<sup>10</sup>Formalmente, um *matching* pode ser visto como uma função do conjunto de estudantes no conjunto de cursos, satisfazendo a condição de que a um curso não estejam associados um número de estudantes superior a seu número de vagas.

- Balinski, M., e T. Sönmez (1999): “A Tale of Two Mechanisms: Student Placement,” *Journal of Economic Theory*, 84, 73 – 94.
- Bierens, H. J. (2004): *Introduction to the Mathematical and Statistical Foundations of Econometrics*, Themes in Modern Econometrics. Cambridge University Press.
- Boston Public Schools. (2012): “**A Brief History of BPS Student Assignment**,” Disponível em: <[http://www.bostonpublicschools.org/files/studentassignfacts\\_rev\\_12-0306\\_0.pdf](http://www.bostonpublicschools.org/files/studentassignfacts_rev_12-0306_0.pdf)>. Acesso em: 02 out. 2012.
- Brasil (2010): “Portaria normativa MEC nº 13, de 17 de maio de 2010. Altera a Portaria Normativa MEC nº 2, de 26 de janeiro de 2010, que institui e regulamenta o Sistema de Seleção Unificada - SiSU,” **Diário Oficial da União**. Ministério da Educação. Brasília, DF, 18 mai., Disponível em: <<http://www.in.gov.br/imprensa/visualiza/index.jsp?jornal=1 &pagina=9&data=18/05/2010>>. Acesso em: 10 set. 2012.
- Chen, Y., e O. Kesten (2011): “**From Boston to Shanghai to Deferred Acceptance: Theory and Experiments on A Family of School Choice Mechanisms**. Working Paper,” Disponível em: <[http://yanchen.people.si.umich.edu/papers/mod\\_boston\\_20110131.pdf](http://yanchen.people.si.umich.edu/papers/mod_boston_20110131.pdf)>. Acesso em: 29 out. 2012.
- Cieglinski, A. (2012): “Mais da metade das vagas do SiSU sobram na primeira chamada,” **Agência Brasil**. Disponível em: <<http://agenciabrasil.ebc.com.br/noticia/2012-01-26/mais-da-metade-das-vagas-do-sisu-sobram-na-primeira-chamada>>. Acesso em: 27 mar. 2013.
- Dubins, L. E., e D. A. Freedman (1981): “Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm,” *The American Mathematical Monthly*, 88(7), 485 – 494.
- Gale, D., e L. S. Shapley (1962): “College Admissions and the Stability of Marriage,” *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 9 – 15.
- Gontijo, M. F. (2008): “Uma Aplicação da Teoria dos Jogos ao Mercado do Vestibular Brasileiro,” Dissertação (mestrado em economia) - faculdade de economia, administração e contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Haeringer, G., e F. Klijn (2008): “**Constrained School Choice**. Barcelona GSE Working Paper n. 294,” Disponível em: <[http://research.barcelonagse.eu/tmp/working\\_papers/294\(revised\).pdf](http://research.barcelonagse.eu/tmp/working_papers/294(revised).pdf)>. Acesso em: 4 dez. 2012.
- He, Y. (2012): “Gaming the Boston School Choice Mechanism in Beijing,” TSE Working Papers 12-345, Toulouse School of Economics (TSE).
- Helms, R. M. (2008): “**University Admission Worldwide**. Education Working Paper Series n. 15. Washington, DC: World Bank,” Disponível em: <<http://documents.worldbank.org/curated/en/2008/07/9799885/university-admission-worldwide>>. Acesso em: 26 nov. 2012.
- Hylland, A., e R. Zeckhauser (1979): “The Efficient Allocation of Individuals to Positions,” *Journal of Political Economy*, 87(2), 293 – 314.
- Kelso Jr., A. S., e V. P. Crawford (1982): “Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes,” *Econometrica*, 50(6), 1483 – 1504.
- Kesten, O. (2012): “On Two Kinds of Manipulation for School Choice Problems,” *Economic Theory*, 51, 677 – 693.

- Pathak, P. A., e T. Sönmez (2013a): “School Admissions Reform in Chicago and England: Comparing Mechanisms by Their Vulnerability to Manipulation,” *American Economic Review*, 103(1), 80 – 106.
- (2013b): “School Admissions Reform in Chicago and England: Comparing Mechanisms by Their Vulnerability to Manipulation,” *American Economic Review*, 103(1), 80 – 106.
- Radner, R., e R. W. Rosenthal (1982): “Private Information and Pure-Strategy Equilibria,” *Mathematics of Operations Research*, 7(3), 401 – 409.
- Roth, A. E. (1982): “The Economics of Matching: Stability and Incentives,” *Mathematics of Operations Research*, 7(4), 617 – 628.
- (1985): “The College Admissions Problem Is Not Equivalent to the Marriage Problem,” *Journal of Economic Theory*, 36(2), 277 – 288.
- (1989): “Two-sided matching with incomplete information about others’ preferences,” *Games and Economic Behavior*, 1(2), 191 – 209.
- (2007): “**Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions.** NBER Working Paper n. 13225,” Disponível em: <<http://www.nber.org/papers/w13225.pdf>>. Acesso em: 3 out. 2012.
- Roth, A. E., T. Sönmez, e M. U. Ünver (2004): “Kidney Exchange,” *The Quarterly Journal of Economics*, 119(3), 457 – 488.
- Roth, A. E., e M. Sotomayor (1990): *Two-Sided Matching: A Study on Game-Theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monographs. Cambridge University Press.
- Shapley, L., e H. Scarf (1974): “On Cores and Indivisibility,” *Journal of Mathematical Economics*, 1, 23–28.
- Sönmez, T. (1997): “Manipulation via Capacities in Two-Sided Matching Markets,” *Journal of Economic Theory*, 77(1), 197 – 204.
- (2012): Disponível em: <<https://www2.bc.edu/~sonmezt/>>. Acesso em: 22 nov. 2012.
- Sönmez, T., e M. U. Ünver (2011): “Matching, Allocation, and Exchange of Discrete Resources,” in *Handbook of Social Economics*, ed. by J. Benhabib, M. O. Jackson, e A. Bisin, vol. 1A, pp. 781 – 852. North-Holland.
- Universidade Federal do Ceará. (2013): “UFC preenche 58% das vagas na primeira chamada do SiSU 2013,” Disponível em: <<http://www.ufc.br/noticias/noticias-de-2013/3242-ufc-preenche-58-das-vagas-na-primeira-chamada-do-sisu-2013>>. Acesso em: 28 jan. 2013.

## APÊNDICE

### Demonstração da Proposição 1.

*Demonstração do item (i).* Claramente o matching produzido não é bloqueado por qualquer indivíduo. Resta-nos mostrar que ele não é bloqueado por qualquer par. Suponha que o estudante  $i$  prefere o curso  $c$ , segundo as preferências anunciadas, àquele que lhe é designado pelo mecanismo. Como as preferências anunciadas constituem-se de apenas um único curso, então, no algoritmo do Vestibular, o estudante  $i$  enviou proposta ao curso  $c$  e não foi aceito, o que significa que nenhum dos  $q_c$  estudantes alocados em  $c$  é menos preferível a  $i$ .  $\square$

*Demonstração do item (ii).* Qualquer estudante alocado tem seu curso mais preferido (único) e, portanto, não pode ser melhorado.  $\square$

### Demonstração da Proposição 2.

*Demonstração.* Denotemos por  $I$  uma coalizão de estudantes e por  $N_0$ ,  $N_1$  e  $N_2$  os conjuntos de estudantes que em primeira chamada receberam oferta de, respectivamente, nenhum curso, sua primeira opção e sua segunda opção. Claramente, os conjuntos  $N_0$ ,  $N_1$  e  $N_2$  formam uma partição do conjunto de estudantes  $N$ .

*Afirmção 1.* Se  $I \cap N_0 \neq \emptyset$ , algum estudante em  $I$  é prejudicado.

*Afirmção 2.* Se  $I \cap N_1 \neq \emptyset$ , todo estudante em  $I \cap N_1$  é prejudicado.

*Afirmção 3.* Se  $I \subset N_2$ , algum estudante em  $I$  é prejudicado.

Das Afirmções 1, 2 e 3, segue o resultado.  $\square$

*Demonstração da afirmação 1.* Seja  $A$  o conjunto de estudantes que rejeitam oferta em primeira chamada. Portanto,  $A \subset I$  e  $A \cap N_0 \neq \emptyset$ . Se  $I \cap N_0 \neq \emptyset$ , tem-se que  $|I| > |A|$ . Daí, como teremos  $|I|$  estudantes da coalizão e apenas  $|A|$  vagas em segunda chamada a serem realocadas, inevitavelmente algum estudante em  $I$  receberá sua opção externa. O que pelas hipóteses 2 e 3 é, para o estudante, um resultado menos preferível.  $\square$

*Demonstração da afirmação 2.* Imediato. Uma vez que, todo estudante, ao rejeitar oferta de sua primeira opção o estudante recebe sua opção externa. O que pelas hipóteses 2 e 3 é, para o estudante, um resultado menos preferível. Sob a hipótese de não desperdício, qualquer estudante não alocado, teve todas as vagas de seu curso mais preferido (único) preenchidas.  $\square$

*Demonstração da afirmação 3.* Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  o perfil de preferências anunciadas originalmente, onde cada  $\alpha_i$  é uma lista de preferências consistindo de no máximo dois cursos, isto é,  $\alpha_i = [c_0]$  ou  $\alpha_i = (a_{i1})$  ou  $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2})$ . Seja  $\mu$  o matching ofertado em primeira chamada. Pelo algoritmo do SiSU, cada curso que teve ofertas rejeitadas, em primeira chamada, realiza reoferta dessas vagas aos estudantes com maiores prioridades dentre aqueles que indicaram o referido curso como uma de suas opções e não receberam, em etapa anterior, oferta de vaga deste curso ou de curso anunciadamente preferível a este. Isso equivale a aplicação do mecanismo SOSM fosse o perfil de anúncios  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ , onde  $\alpha'_i = \alpha_i$  se  $i \notin I$  e, para  $i \in I$ ,  $\alpha'_i = (a_{i1})$ . Seja  $\nu$  o matching final. Pode-se averiguar que  $\nu$  é estável em relação às preferências anunciadas originalmente,  $\alpha$ . Mas, pelo teorema 4, existe um estudante  $i \in I$  que prefere  $\mu$  a  $\nu$ , ou seja, tal estudante foi prejudicado.  $\square$

### Demonstração da Proposição 3.

*Demonstração.* O resultado segue imediatamente da aplicação do teorema 6.  $\square$