

Seleção de carteiras com restrição das normas das posições: uma comparação empírica entre diferentes níveis de restrição de exposição para dados da BM&FBovespa

Paulo Ferreira Naibert^{a,1}, João F. Caldeira^b

^a*Departamento de Economia*

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

^b*Departamento de Economia, PPGA & PPGE*

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Abstract

This paper studies the problem of minimum variance portfolio selection based on a recent methodology for portfolio optimization restricting the allocation vector proposed by [Fan *et al.* \(2012\)](#). To achieve this, we consider different conditional and unconditional covariance matrix estimators. The great contribution of this paper is of empiric nature for the brazilian stock market. We evaluate out of sample performance indexes of the portfolios constructed for a set of 61 diferent sotcks traded in the São Paulo stock exchange (BM&FBovespa). The results show that the restrictions on the norms of the allocation vector generate substantial gains in relation to the no short-sale portfolio, raising the average return adjusted by the risk (bigger Sharpe Ratio) and lowering the portfolio turnover.

Resumo

Este trabalho estuda o problema de seleção de carteiras de variância mínima com base em uma recente metodologia para otimização de carteiras com restrições nas normas das exposições brutas proposta por [Fan *et al.* \(2012\)](#). Para esse propósito consideramos diferentes estimadores da matriz de covariâncias condicional e incondicional. A grande contribuição deste artigo é de natureza empírica para o mercado de ações brasileiro. Avaliam-se índices de desempenho fora da amostra das carteiras construídas para um conjunto de 61 ações negociadas na Bolsa de Valores de São

¹Autor correspondente. e-mail: paulo.naibert@gmail.com

Paulo (BM&FBovespa). Os resultados mostraram que as restrições nas normas das exposições geram ganhos substanciais em relação à carteiras restritas para venda a descoberto, aumentando o retorno médio ajustado pelo risco (maior índice de Sharpe) e diminuindo o *turnover* dos portfólios.

Keywords: norm constrained allocation vector, mean-variance, portfolio optimization, Performance Assessment

Palavras chave: restrição da norma do vetor de alocação, média-variância, otimização de carteiras, avaliação de desempenho

Área 8 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

JEL: C53, E43, G17

1. Introdução

Parece razoável imaginar que os investidores sempre preferiram elevar sua riqueza, minimizando os riscos associados a qualquer potencial de ganho. No entanto, o estudo científico e o desenvolvimento de algoritmos de otimização de carteiras de investimento são relativamente recentes, considerando como marco inicial os trabalhos de Markowitz (1952, 1959), os quais deram origem ao que hoje é popularmente conhecido como teoria moderna do portfólio e análise média-variância. Desde então, a seleção e otimização de carteiras é um problema fundamental em finanças, tanto do ponto de vista acadêmico como também para os praticantes de mercado. A teoria moderna do portfólio proposta por Markowitz é baseada na noção de que a diversificação de uma carteira de investimento gera portfólios com uma melhor relação entre risco e retorno.

Markowitz propôs para seleção de portfólios uma receita normativa sobre como os investidores devem agir. A ideia é que devemos formar uma carteira de investimentos diversificada de modo a maximizar o retorno esperado da carteira dado um nível de variância do retorno. Assim, transformou o processo de alocação de ativos em um problema de otimização com base no *trade-off* fundamental entre retorno esperado e risco. Todavia, o processo de otimização de portfólio proposto por Markowitz apresenta elevada sensibilidade à incerteza nas variáveis de interesse do problema. Isso foi observado por Best & Grauer (1991), que mostraram como as mudanças nas médias dos retornos esperados dos ativos alteram o retorno, a composição e o risco do portfólio, e por Chopra & Ziemba (1993), que examinaram o impacto relativo dos erros de estimação sobre as médias, variâncias e covariâncias das carteiras.

A implementação prática da otimização de carteiras com base no critério média-variância enfrenta duas dificuldades: *i*) a primeira diz respeito à dificuldade de se obter estimações acuradas

dos retornos esperados dos ativos e da matriz de covariâncias dos retornos; *ii*) a segunda dificuldade está relacionada ao problema da dimensionalidade, dado que geralmente busca-se obter carteiras ótimas contendo um número muito grande de ativos. Em muitos casos as estimativas dos retornos esperados e matriz de covariâncias estão sujeitas a erros de estimação, o que pode resultar em alocações inadequadas em função da hipersensibilidade dos pesos ótimos da carteiras em relação aos *inputs* do problema prejudicando o desempenho da carteira otimizada com base nestes estimadores. Além disso, conforme destacaram Caldeira *et al.* (2013) e Jagannathan & Ma (2003), a estimação de retornos esperados está sujeita a um maior erro de estimação quando comparado com estimação de covariâncias, e o erro de estimação nos retornos esperados tem um impacto negativo maior no desempenho da carteira quando comparado ao impacto do erro de estimação nas covariâncias (Mendes & Leal, 2005; Ceria & Stubbs, 2006). Em consequência dessa hipersensibilidade das alocações ótimas aos erros de estimação do vetor de retornos esperados, grande parte da pesquisa acadêmica recente tem se dedicado a carteiras de variância mínima (DeMiguel *et al.*, 2009a), situação em que o investidor se preocupa apenas com a minimização do risco da carteira, sem levar em consideração seu retorno esperado.

Na tentativa de resolver o problema da sensibilidade da alocação resultante aos erros de estimação dos *inputs* (média e variância), foram feitos vários esforços para modificar o problema de média-variância de Markowitz. Chopra & Ziemba (1993) propuseram utilizar um estimador de James-Stein para o vetor de retornos esperados e Ledoit & Wolf (2003) propuseram uma técnica para encolhimento da matriz de covariância amostral. Fan *et al.* (2008), analisaram a estimação da matriz de covariância com base em um modelo de fatores e demonstraram que o vetor de alocação resultante supera significativamente o vetor de alocação baseado na covariância amostral. No entanto, Fan *et al.* (2012) argumentam que apesar dessas técnicas reduzirem a sensibilidade dos vetores de *inputs* na alocação por média-variância, são inadequadas para enfrentar os efeitos adversos decorrentes do acúmulo de erros de estimação, especialmente quando o número de ativos na carteira é grande. Jagannathan & Ma (2003) impuseram uma restrição à venda a descoberto no problema de otimização por média-variância de Markowitz e demonstraram os benefícios de tais restrições. Nesse contexto, Fan *et al.* (2012) alteraram o problema de maximização de utilidade através da introdução de uma restrição de exposição bruta sobre o vetor de alocação como uma alternativa promissora para contornar o problema da dimensionalidade e aliviar a carga do processo de estimação econométrica.

A solução proposta por Fan *et al.* (2012) consiste em modificar o problema de maximização de utilidade ao adicionar-se uma restrição da norma do vetor de alocação, a qual foi denominada como restrição sobre exposição bruta. A restrição proposta por Fan *et al.* (2012) não proíbe as posições vendidas completamente. Com isso, é possível generalizar a restrição sobre as posições vendidas e achar um meio do caminho entre a restrição total ($c = 1$) e a otimização irrestrita

das carteiras ($c = \infty$). Quanto mais a restrição sobre a norma do vetor de alocação for relaxada, mais perto do caso sem restrição a otimização se aproximará. A vantagem disso é que o investidor pode expressar uma visão negativa sobre um ativo sem a manifestação de posições extremas pela sensibilidade da otimização de Markowitz (Jacobs & Levy, 2006). Fan *et al.* (2012) mostram que, com essa restrição, os portfólios selecionados tem maior índice Sharpe, assim como menor *turnover* que os portfólios obtidos com a otimização tradicional sem essas restrições. Isso é demonstrado pelos autores ao criar um arcabouço teórico que conecta o trabalho de Markowitz (1952) com o de Jagannathan & Ma (2003).

Jagannathan & Ma (2003) explicaram porque a inclusão da restrição sobre posições vendidas ajuda a minimizar o risco em um portfólio ótimo de Markowitz, mesmo quando a restrição está errada (razão do título do seu trabalho). A ideia vem de Green & Hollifield (1992), os quais mostraram que a presença de um fator dominante pode resultar em pesos negativos extremos num arcabouço de um portfólio eficiente de média-variância, mesmo quando não há erros de estimação. Por causa disso, a restrição de posições negativas deveria piorar o portfólio, entretanto, a evidência empírica indica exatamente o contrário. Jagannathan & Ma (2003) mostraram que quando é imposta a restrição sobre posições vendidas, a matriz de covariância tem um desempenho comparável às estimativas baseadas em modelos de fatores, estimadores de encolhimento e dados diários. Além disso, mostraram que construir um portfólio usando a restrição de que os elementos do vetor de alocação eficiente resultante devem ser maiores ou iguais a zero é equivalente a construí-lo sem qualquer restrição no portfólio mas usando um estimador de matriz de covariância *shrinkage* de Ledoit & Wolf (2003) e Ledoit & Wolf (2004). Ou seja, mostraram que "sem querer", quando usamos a restrição sobre posições vendidas, estamos alterando a matriz de covariância amostral de forma a ficar parecida com uma matriz de covariância obtida com o estimador *shrinkage*. A inovação do trabalho de Fan *et al.* (2012) é que eles mostraram que as carteiras formadas utilizando a restrição sobre exposição bruta também podem ter essa interpretação de diminuição.

Brodie *et al.* (2008) também trataram do problema de otimização de carteiras com restrições sobre as normas das posições. Brodie *et al.* (2008) reformulam o problema de Markowitz como um problema de Mínimos Quadrados restritos. Os autores adicionam uma função de penalidade proporcional à soma dos valores absolutos dos pesos do portfólio. Foram construídos portfólios cujos desempenhos fora da amostra em termos de retorno ajustado pelo risco (medidos pelo Índice de Sharpe) é consistentemente e significativamente melhor que a diversificação ingênua (vetor de alocação com pesos iguais, ou seja $w_i = 1/N$ para todo i), que foi mostrada pela recente literatura (DeMiguel *et al.* (2009b)), ser uma referência difícil de superar.

Além dos trabalhos acima citados, DeMiguel *et al.* (2009a) forneceram um arcabouço geral para a construção de carteiras ótimas que apresentam bom desempenho fora da amostra na presença de erros de estimação. Isso é feito com a otimização média-variância tradicional de Markowitz mas

com a adição de uma restrição na norma do vetor de alocação de ativos. Essa restrição diz que a soma desses valores absolutos deve ser menor que um dado limiar. Os autores mostraram que o arcabouço que estabelecido insere-se como um caso especial das abordagens de encolhimento da matriz de covariância proposta por [Jagannathan & Ma \(2003\)](#), [Ledoit & Wolf \(2003\)](#) e [Ledoit & Wolf \(2004\)](#).

O presente trabalho insere-se no contexto de análise dos ganhos, em termos de desempenho fora da amostra de portfólios ótimos de mínima variância (PMV) utilizando as modificações no problema de seleção de carteiras de média-variância de Markowitz propostas por [Fan et al. \(2012\)](#). Vale observar que os PMV tem sido amplamente utilizados na literatura ([Ledoit & Wolf, 2004](#); [Engle & Sheppard, 2008](#); [DeMiguel et al. , 2009a](#); [Caldeira et al. , 2013](#)), em função da sua relevância prática e da disponibilidade de uma solução em forma fechada no caso em que vendas a descoberto sejam permitidas. São considerados diferentes níveis de restrição da norma do vetor de alocação, comparativamente aos portfólios irrestrito e totalmente restrito para venda a descoberto. Como forma de obter matrizes são utilizados diferentes estimadores da matriz de covariâncias, os quais abrangem a covariância amostral, modelo RiskMetrics e o modelo *variance targeting scalar VECH* (*scalar vt-VECH*).

Esses estimadores são aplicados na previsão fora da amostra para as matrizes de covariância dos retornos de 61 ações negociadas no mercado financeiro brasileiro durante o período amostral. Aplicamos o modelo proposto por [Fan et al. \(2012\)](#) e usamos as matrizes de covariâncias previstas para estimar PMV irrestritos e com diferentes níveis de restrição da norma do vetor de alocação, as quais são avaliadas através de indicadores de performance como retorno médio, variância, índice de Sharpe e *portfolio turnover*. Os resultados são, ainda, comparados àqueles obtidos pelo benchmark (portfólio restrito para a venda a descoberto e covariância amostral). O período analisado vai de Janeiro de 1999 a Dezembro de 2010, perfazendo um total de 2.970 observações diárias para cada ação. Em resumo, são avaliados diferentes estimadores, tanto com uma abordagem incondicional como condicional, na estimação das matrizes de covariância com foco na seleção de ativos com base na recente metodologia proposta por [Fan et al. \(2012\)](#). Neste sentido, ao realizar uma aplicação com motivação econômica definida, este artigo faz uma contribuição aos trabalhos empíricos que analisam o problema de seleção de carteiras de investimento.

De uma forma geral, os resultados indicam ganhos na utilização da metodologia proposta por [Fan et al. \(2012\)](#). Os resultados obtidos nesse trabalho apontam no sentido de que as carteiras com restrições sobre as normas das posições tiveram um um Índice e Sharpe maior, e um menor *turnover* associado a carteira. Isso quer dizer que as carteiras otimizadas com restrições das normas obtém um melhor retorno médio para cada unidade de variância que elas sofrem e tem menores custos de transação que as carteiras irrestritas, o que no final nos permite ficar com os ganhos associados à carteira sem incorrerem em custos maiores de rebalanceamento com ela. Além disso, é importante

ênfatizar que as vantagens da restrição sobre exposição bruta apontadas acima independem do estimador. Ou seja, a simples adição da restrição das normas melhora o desempenho da carteira não importando qual estimador de matriz de covariância que se está usando.

Este trabalho tem 3 seções além dessa introdução. Na seção 2, apresentamos os diferentes estimadores de matriz de covariância que utilizaremos ao longo do trabalho, descrevemos o problema da seleção de carteira e falamos como a restrição das normas podem ajudar nesse problema, além de apresentar a conexão entre esse novo método de estimação e o estimador *shrinkage*. Na seção 3 fazemos o estudo empírico e mostramos os resultados. Na seção 4, mostramos nossas conclusões.

2. O problema de otimização de portfólio com restrição das normas

Nesta seção vamos detalhar matematicamente o problema de otimização de carteiras, e como ele muda ao adicionarmos a restrição sobre a norma do vetor de alocação, além de esclarecermos como essa restrição influencia a escolha dos pesos dos ativos. Apresentaremos, também os estimadores de matriz de covariância que usaremos ao longo desse trabalho.

2.1. Estimadores da matriz de covariâncias

Como dissemos anteriormente, uma das maneiras de se resolver o problema de sensibilidade dos vetores de alocação aos vetores de *input*  usar um estimador diferente de matriz de covariância. Nessa subseção vamos mostrar os diferentes estimadores de matriz de covariância que usaremos ao longo desse trabalho.

2.1.1. Matriz de Covariância Amostral

A matriz de covariâncias amostral para a construção da previsão da covariância dos retornos é dada por

$$H_t^1 = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T \left(R_{t-k} - \bar{R} \right)' \left(R_{t-k} - \bar{R} \right), \quad (1)$$

onde R_{t-k}  o vetor de retornos $1 \times i$ no dia $t-k$. \bar{R} é a média dos retornos dentro da amostra e T é o tamanho da janela de estimação.

2.1.2. Estimador Shrinkage

Proposto no trabalho de [Ledoit & Wolf \(2003\)](#), o estimador *shrinkage* assume um modelo de mercado² como gerador do retorno j no dia t :

²Modelo de mercado com fator único (ndice de mercado).

$$r_{j,t} = \alpha_j + \beta_j r_{M,t} + \varepsilon_{j,t}, \quad (2)$$

onde $r_{M,t}$ é o retorno do índice de mercado no dia t e $\varepsilon_{j,t}$ é o resíduo. Considerando $r_{M,t}$ e $\varepsilon_{j,t}$ não correlacionados, assim como, os retornos residuais, o estimador da matriz de covariâncias dos retornos em um conjunto de ações é dado por F_t :

$$F_t = s_{m,t}^2 BB' + D_t, \quad (3)$$

onde B é o vetor de β 's, $s_{m,t}^2$ é a variância amostral de $r_{M,t}$ e D_t é a matriz diagonal das variâncias dos resíduos amostrais.

O estimador *shrinkage* é uma média ponderada de dois estimadores: a matriz de covariâncias amostral e a matriz de covariâncias baseada no modelo de mercado, sendo descrito por

$$H_t^2 = \frac{\gamma_t}{T} F_t + \left(1 - \frac{\gamma_t}{T}\right) H_t^1, \quad (4)$$

onde o estimador *shrinkage* é obtido através de uma função perda quadrática que mede a distância entre a matriz de covariâncias verdadeira e a estimada:

$$\gamma_t = \frac{\pi_t - \rho_t}{\lambda_t}, \quad (5)$$

onde γ_t é o parâmetro que determina a intensidade de *shrinkage* estimado no tempo t com tamanho amostral de T . Além disso, π_t denota a soma das variâncias assintóticas das entradas de H_t^1 escalonadas por \sqrt{T} , ρ_t denota a soma das covariâncias assintóticas das entradas de F_t com as entradas de H_t^1 escalonadas por \sqrt{T} e λ_t é uma medida quadrática da distância entre a matriz de covariâncias verdadeira e a estimada baseada na norma de Frobenius. Ainda, γ_t varia com a janela de estimação.

2.1.3. Estimador Variance targeting scalar VECH

O método de estimação usando *variance targeting* tem como objetivo contornar dificuldades encontradas na aplicação de quase-máxima verossimilhança (QML) nos modelos GARCH, utilizando, para isso, um procedimento em dois passos (Francq *et al.*, 2011). Em primeiro lugar, a equação de volatilidade é reparametrizada de forma que o intercepto é substituído pela variância não condicional dos retornos. A variância não condicional é estimada e, condicionalmente a essa medida, no segundo passo, os parâmetros remanescentes são estimados por QML. Nesse caso, as condições para que a matriz de covariâncias condicional seja positiva definida são simplificadas.

Seguindo Engle & Sheppard (2008), a especificação *Variance targeting Scalar VECH (scalar vt-VECH)* é definida por

$$H_t^3 = C + \alpha R_t R_t' + \beta H_{t-1}, \quad (6)$$

onde α e β são escalares. Sendo C positiva definida e α e β não negativos, a covariância condicional será positiva definida. Assumindo covariância estacionária com o objetivo de contornar o problema de *curse of dimensionality* e sendo $\bar{H} = E[R_t R_t']$ a covariância não condicional do retornos, temos

$$E[H_t^3] = C + \alpha \odot E[R_{t-1} R_{t-1}'] + \beta \odot E[H_{t-1}], \quad (7)$$

$$\bar{H} = CC + \alpha \odot \bar{H} + \beta \odot \bar{H}, \quad (8)$$

$$C = (\iota' - \alpha - \beta) \odot \bar{H}, \quad (9)$$

onde ι é um vetor de uns $N \times 1$. Portanto, C não está ligado a H_t^4 e pode ser substituído pela estimativa em 9.

2.1.4. RiskMetrics

O modelo RiskMetrics consiste em um modelo de média móvel ponderada exponencialmente para modelar as covariâncias condicionais. Neste modelo, a matriz de covariância condicional é dada por

$$H_t^4 = (1 - \lambda) R_{t-1} R_{t-1}' + \lambda H_{t-1}$$

com o valor recomendado para o parâmetro em estimações com dados diários sendo $\lambda = 0.94$.

2.2. Seleção de Carteiras

Originalmente, o problema de otimização de portfólio de [Markowitz \(1952\)](#) é maximizar o retorno esperado dos ativos com restrição sobre a variância do portfólio. Uma mudança nesse problema para levar em conta a utilidade marginal decrescente da renda é tentar maximizar uma função de utilidade esperada do retorno sujeito a uma variância máxima da carteira que estamos dispostos a nos sujeitar. Dessa maneira, o problema fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\mathbf{w}} \quad & E[U(\mathbf{w}^T \mathbf{R})] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ & \frac{\mathbf{w}^T \hat{\Sigma} \mathbf{w}}{2} = V_{alvo} \end{aligned}$$

onde \mathbf{w} é o vetor de alocação do investidor onde cada componente w_i é o percentual do total investido em cada ativo i , \mathbf{R} é o vetor dos retornos dos ativos, $\mathbf{1}$ é um vetor que cada componente

é o número 1 e Σ é a matriz de covariância entre os ativos.

Entretanto, como as estimativas sobre a matriz de covariância são melhores que as estimativas sobre as médias dos retorno dos ativos, além de erros de mensuração nessas medidas afetarem menos o resultado final da seleção de ativos para o portfólio como mostra [Chopra & Ziemba \(1993\)](#), seria melhor o investidor resolver o problema de minimização de variância. Dessa forma, mudamos o foco da otimização para o minimização do Risco, ou seja, não precisamos nos preocupar com as médias dos retornos dos ativos.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \frac{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}{2} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \tag{10}$$

[Caldeira et al. \(2013\)](#) falam que a resolução desse problema é análoga a solução do seguinte problema:

$$\text{Min}_{\mathbf{w}} \quad \frac{\mathbf{w}^T \hat{\Sigma} \mathbf{w}}{2} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{w}^T \mathbf{1}$$

onde λ é o coeficiente de aversão ao risco do investidor e, em (10), λ tende ao infinito ($\lambda \rightarrow \infty$).

2.3. Seleção de Carteiras com Restrição da Norma do Vetor de Alocação

A solução proposta pelos autores de [Fan et al. \(2012\)](#) é de utilizar o problema de maximização de utilidade com uma restrição da norma do vetor de alocação. Dessa forma, o problema de otimização de carteiras fica:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \frac{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}{2} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \end{aligned} \tag{11}$$

onde $\|\mathbf{w}\|_1 = \sum_{i=1}^N |w_i|$. Portanto $\|\mathbf{w}\|_1 \leq c$ nos dá: $\sum_{i=1}^N |w_i| \leq c$.

A Restrição sobre as normas impõem restrições das posições vendidas e compradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w^+ &= \frac{\|\mathbf{w}\|_1 + 1}{2} \\ w^- &= \frac{\|\mathbf{w}\|_1 - 1}{2} \\ w^+ - w^- &= 1 \\ w^+ + w^- &= \|\mathbf{w}\|_1 \end{aligned}$$

onde w^- é a soma das posições vendidas e w^+ é a soma das posições compradas. Portanto, com uma restrição de $c = 1.6$ temos uma posição vendida máxima de $w^- = 0.3$ e posição comprada máxima de $w^+ = 1.3$. Um portfólio com a restrição $c = 1.6$ é conhecido com um portfólio 130/30, o qual é amplamente utilizado por participantes do mercado com evidenciado em [Lo & Patel \(2008\)](#) e [Gastineau \(2008\)](#). Se tivermos $c = 1$, quer dizer que posições vendidas não são permitidas. E com $c = \infty$ quer dizer que não há restrições sobre posições vendidas, ou seja a solução é a mesma que a da carteira irrestrita.

Como essas restrições diminuem o conjunto em que podemos fazer a minimização da variância, as alocações achadas por esse problema resultam, no máximo a carteira de mínima variância. No entanto, a restrição sobre exposição bruta ao impedir a carteira de assumir posições muito extremas, ajuda a controlar o *turnover* da carteira. Assim, ela tem um duplo papel, o de diminuir o risco associado à carteira e o de diminuir os custos de transação dela.

Conexão entre a Restrição da Norma do Vetor de Alocação com o Estimador de Shrinkage

Aqui, falaremos sobre como a restrição da norma do vetor de alocação se conecta com o estimador de *Shrinkage*. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, o problema (11) fica:

$$\frac{\mathbf{w}^T \hat{\Sigma} \mathbf{w}}{2} + \lambda_1 (\|\mathbf{w}\|_1 - c) + \lambda_2 (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1})$$

definindo \mathbf{g} como o vetor subgradiente da função $\|\mathbf{w}\|_1$, cujo elemento i é -1 ou 1 ou qualquer elemento entre $[-1, 1]$ dependendo se w_i é positivo, negativo ou zero. Então as condições Karush-Kuhn-Tucker para a otimização (11) são:

$$\hat{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda_1 \mathbf{g} - \lambda_2 \mathbf{1} = 0 \tag{12}$$

$$\lambda_1 (\|\mathbf{w}\|_1 - c) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \tag{13}$$

Então, [Fan et al. \(2012\)](#) em seu Teorema 4 dizem que a otimização de portfólio (11) é equivalente ao problema de média-variância:

$$\text{Min}_{\mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1} \mathbf{w}^T \tilde{\Sigma}_c \mathbf{w}$$

com a matriz de covariância regularizada

$$\tilde{\Sigma}_c = \hat{\Sigma} + \lambda_1 (\tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{1} + \mathbf{1} \tilde{\mathbf{g}}^T)$$

quando $\tilde{\mathbf{g}}$ é o subgradiente avaliado em $\tilde{\mathbf{w}}$ e λ_1 é o multiplicador de Lagrange definido em (12) e (13). [Fan et al. \(2012\)](#) fala que esse resultado é similar aos de [Jagannathan & Ma \(2003\)](#) e

DeMiguel *et al.* (2009a). Ou seja, com a restrição sobre exposição bruta, estamos "diminuindo" a matriz de covariância (usamos a palavra diminuir no sentido do estimador da equação (4)). Na proposição 1 do seu trabalho, Jagannathan & Ma (2003) mostra que isso ocorre quando há proibição de vendas a descoberto, a inovação de Fan *et al.* (2012) e de DeMiguel *et al.* (2009a) é que eles generalizam essa restrição de forma que há a "diminuição" da matriz de covariância mesmo quando há a possibilidade de vendas a descoberto.

3. Estudo Empírico com dados Brasileiros

Nessa seção vamos expor os dados que utilizaremos, como vamos manipulá-los para obter as séries de retornos dos ativos para a otimização de carteiras, como vamos registrar os dados sobre as carteiras otimizadas e como vamos realizar a avaliação do desempenho delas.

3.1. Dados e Detalhes da Implementação

Esse é um estudo empírico sobre o desempenho da otimização de Carteiras com restrição nas normas dos ativos. Os dados utilizados são preços de 61 ações que fizeram parte do Índice Bovespa de Janeiro de 1999 até Dezembro de 2010, o que resulta num total de 2970 observações de preços diários para cada um dos 61 ativos. Os dados foram obtidos na Bloomberg.

A partir da série de preços dos ativos, tiramos o retorno diário de cada uma das ações. Para isso, a cada dia tiramos a diferença logarítmica do seu preço contemporâneo com o seu preço do dia anterior, o que nos deixa com:

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

Isso nos deixa com 61 séries com 2969 observações de retornos diários. A partir dessas séries de retornos, resolvemos o problema da equação (11) e achamos:

$$\hat{\mathbf{w}} = \underset{\mathbf{w}^T \mathbf{1}=1, \|\mathbf{w}\|_1 \leq c}{\operatorname{argmin}} \quad \mathbf{w}^T \hat{\Sigma} \mathbf{w}$$

O que é feito usando o pacote de Grant & Boyd (2014) para o software MATLAB. Depois, guardamos esses vetores para cada mês, então fazemos o produto interno deles com o vetor de retornos de cada ativo no próximo mês. Dessa forma, registramos os retorno de carteiras que foram otimizadas, compraram as suas posições que foram mantidas por um mês até serem rebalanceadas no mês posterior. Esses produtos internos dos vetores vão nos dar séries temporais sobre os retornos dos portfólios otimizadas. O que vamos analisar é justamente essas séries temporais.

3.2. Metodologia para Avaliação de Desempenho

A avaliação de desempenho das carteiras otimizadas é semelhante ao de DeMiguel *et al.* (2009a). Ela é realizada de acordo com a média, variância, Índice Sharpe fora da amostra do portfólio, assim como o turnover do portfólio. As fórmulas dessas medidas estão apresentadas abaixo:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (w_t' R_{t+1} - \hat{\mu})^2$$

$$IS = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}, \text{ onde } \hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} w_t' R_{t+1} \quad (14)$$

$$\text{Turnover} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|), \quad (15)$$

onde $w_{j,t}$ é o peso do ativo j no portfólio no tempo $t+1$ mas antes do rebalanceamento e $w_{j,t+1}$ é o peso desejado do ativo j no tempo $t+1$. Como destacado por DeMiguel *et al.* (2009b), o *turnover*, como definido acima, pode ser interpretado como a fração média da riqueza transacionada em cada período.

O resultado da equação (14), que é o Índice de Sharpe, indica o *tradeoff* entre a média e a variância dos retornos, ele exprime a quantidade de média que a série de retornos obtém para cada unidade de variância que ela sofre, por isso ela é exprimida em percentagem.

Para testar a significância estatística das diferenças entre as variâncias e índices de Sharpe dos retornos de dois portfólios, seguimos DeMiguel *et al.* (2009a) e usamos o *bootstrap* estacionário de Politis & Romano (1994) com $B=1,000$ reamostragens e tamanho de bloco $b = 5$. Os p -valores do teste foram obtidos usando a metodologia sugerida em (Ledoit & Wolf, 2008, Remark 3.2).

3.3. Análise do Desempenho

A tabela 1 apresenta a média, a variância, o índice de Sharpe e o *turnover* das carteiras de variância mínima obtidas com matrizes de covariância amostral, RiskMetrics e VECH VT Scalar. O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima com restrição sobre posições vendidas e com matriz de covariância amostral. Conseguimos observar que para todas as matrizes de covariância, a restrição $c = 1.4$ é a que obtém o melhor índice de Sharpe. A restrição $c = 1.4$ equivale a uma carteira 120/20, que é quando investimos 120% dos nosso valor disponível e ficamos com 20% de posições vendidas no portfólio. O maior índice de Sharpe é 0.0813 quando usamos a matriz de covariância vech vt escalar. Além disso, como era de se esperar, o *turnover* das carteiras com restrição de exposição bruta cresce a medida que c cresce, chegando a perto do turnover da carteira GMV quando $c = 2.2$.

A tabela 2 apresenta os mesmos dados que a tabela 1, mas com a frequência de rebalanceamento semanal, nela encontramos que a melhor restrição é quando $c = 1.6$ para todos e o maior Índice de Sharpe é .0837 para a matriz de covariância amostral. A tabela 3, que apresenta os dados para o rebalanceamento mensal nos mostra que para a matriz de covariância amostral e a estimada pelo modelo VECH VT ESCALAR, a melhor restrição é $c = 2.2$, já para a matriz estimada pelo modelo RiskMetrics, o valor seria $c = 1.6$. O maior valor do Índice Sharpe .0829 é para o estimador de covariância amostral.

Na figura 1, pode-se ver como um investimento de R\$1,00 feito em janeiro de 2000 evoluiria ao longo do tempo se os rebalanceamentos propostos fossem obedecidos. Na figura 1a apresenta-se a evolução do investimento para os estimadores de covariância amostral com restrição de $c = 2.0$, RiskMetrics com restrição de $c = 1.4$ e VECH com restrição de $c = 2.2$, todos com rebalanceamento diário. Nessa figura observa-se que tanto o estimador amostral, quanto o VECH tem valor final maior que o da carteira de GMV. Entretanto, essas duas especificações apresentam *turnover* menor que o da carteira de GMV, assim como índice de Sharpe maior. Assim, essas carteiras tem menor custo de transação e melhor retorno médio ajustado pelo risco.

A figura 1b apresenta a evolução do investimento para os estimadores de covariância amostral com restrição de $c = 2.2$, RiskMetrics com restrição de $c = 1.6$ e VECH com restrição de $c = 2.2$. Todos com rebalanceamento semanal. Nessa figura observa-se que apenas a especificação com a covariância amostral ganha da carteira GMV. E a figura 1c apresenta a evolução do investimento para os estimadores de covariância com rebalanceamento mensal já citados. Nessa figura a restrição de exposição bruta é igual para todos ($c = 2.2$). Nessa figura, é possível observar que a carteira de GMV ganha das outras especificações. No entanto, ela não ganha por muito e tem maior variância associada, apresentando menores índices de Sharpe, além de maior *turnover* associado. Ou seja, apesar de ter um maior valor final do investimento, essa carteira apresenta maior custo de transação e menor retorno médio ajustado pelo risco.

Tabela 1: Desempenho das carteiras de variância mínima com restrição nas normas (Rebalanceamento diário)

A tabela apresenta a média diária dos retornos das carteiras ótimas considerando diferentes níveis de restrição nas normas dos vetores de alocação, média diária da variância da carteira, o índice de Sharpe e portfólio *turnover* dos portfólios de variância mínima com restrição nas normas dos vetores de alocação, obtidos com matrizes de covariâncias geradas pelo modelo scalar vt-vech. Os modelos *benchmark* são a matriz de covariância amostral e o modelo RiskMetrics. *p*-valores para as diferenças entre as variâncias das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo restrito para venda a descoberto estão entre parênteses abaixo de cada coeficiente.

	Covariância Amostral				RiskMetrics				Estimador VECH			
	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover
Portfólio Naïve	0.0578	2.2616 (0.0000)	0.0384 (0.1080)	0.0000	0.0578	2.2616 (0.0000)	0.0384 (0.1080)	0.0000	0.0578	2.2616 (0.0000)	0.0384 (0.1080)	0.0000
GMV	0.0740	0.9155 (0.9840)	0.0773 (0.2380)	0.1501	0.0726	1.8729 (0.0000)	0.0530 (0.5180)	0.9208	0.0751	0.9186 (0.9300)	0.0784 (0.2040)	0.1535
No-short	0.0630	0.9183 (0.0000)	0.0657 (0.0000)	0.0360	0.0611	0.9908 (0.6400)	0.0614 (0.8120)	0.1756	0.0626	0.9204 (0.2720)	0.0653 (0.5140)	0.0368
$c = 1.2$	0.0710	0.8526 (0.0000)	0.0769 (0.0000)	0.0538	0.0649	0.9940 (0.7240)	0.0651 (0.9800)	0.2245	0.0709	0.8535 (0.0000)	0.0767 (0.0000)	0.0552
$c = 1.4$	0.0741	0.8319 (0.0000)	0.0812 (0.0060)	0.0704	0.0655	0.9818 (0.6960)	0.0661 (0.9500)	0.2699	0.0742	0.8334 (0.0000)	0.0813 (0.0060)	0.0720
$c = 1.6$	0.0740	0.8375 (0.0000)	0.0808 (0.0380)	0.0879	0.0649	0.9746 (0.6200)	0.0657 (0.9300)	0.3133	0.0741	0.8387 (0.0000)	0.0809 (0.0260)	0.0895
$c = 1.8$	0.0738	0.8547 (0.0080)	0.0798 (0.0640)	0.1055	0.0648	0.9898 (0.4580)	0.0651 (0.9780)	0.3553	0.0741	0.8554 (0.0060)	0.0801 (0.0500)	0.1074
$c = 2.0$	0.0746	0.8755 (0.1060)	0.0797 (0.1080)	0.1215	0.0653	1.0280 (0.2380)	0.0644 (0.9400)	0.3964	0.0749	0.8766 (0.1420)	0.0800 (0.0800)	0.1236
$c = 2.2$	0.0747	0.8934 (0.4280)	0.0790 (0.1460)	0.1345	0.0644	1.0734 (0.0760)	0.0622 (0.8280)	0.4390	0.0754	0.8954 (0.4960)	0.0797 (0.1300)	0.1370

Tabela 2: Desempenho das carteiras de variância mínima com restrição nas normas (Rebalanceamento semanal)

A tabela apresenta a média diária dos retornos das carteiras ótimas considerando diferentes níveis de restrição nas normas dos vetores de alocação, média diária da variância da carteira, o índice de Sharpe e portfólio *turnover* dos portfólios de variância mínima com restrição nas normas dos vetores de alocação, obtidos com matrizes de covariâncias geradas pelo modelo scalar vt-vech. Os modelos *benchmark* são a matriz de covariância amostral e o modelo RiskMetrics. *p*-valores para as diferenças entre as variâncias das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo restrito para venda a descoberto estão entre parênteses abaixo de cada coeficiente.

	Covariância Amostral				RiskMetrics				Estimador VECH			
	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover
Portfólio Naïve	0.0578	2.2616	0.0384	0.0000	0.0578	2.2616	0.0384	0.0000	0.0578	2.2616	0.0384	0.0000
		(0.0000)	(0.0760)			(0.0000)	(0.0760)			(0.0000)	(0.0760)	
GMV	0.0788	0.9330	0.0815	0.0773	0.0783	1.8626	0.0574	0.4718	0.0776	0.9357	0.0802	0.0788
		(0.9720)	(0.1460)			(0.0000)	(0.6380)			(0.8860)	(0.1780)	
No-short	0.0652	0.9346	0.0675	0.0202	0.0587	1.0036	0.0586	0.0921	0.0643	0.9368	0.0664	0.0206
						(0.7260)	(0.5520)			(0.2680)	(0.1060)	
$c = 1.2$	0.0735	0.8680	0.0789	0.0291	0.0675	0.9815	0.0682	0.1156	0.0723	0.8686	0.0776	0.0298
		(0.0000)	(0.0000)			(0.8460)	(0.9880)			(0.0000)	(0.0040)	
$c = 1.4$	0.0769	0.8491	0.0835	0.0374	0.0697	0.9622	0.0711	0.1384	0.0759	0.8495	0.0824	0.0382
		(0.0000)	(0.0100)			(0.8560)	(0.8240)			(0.0000)	(0.0000)	
$c = 1.6$	0.0774	0.8548	0.0837	0.0460	0.0736	0.9764	0.0745	0.1595	0.0763	0.8548	0.0825	0.0468
		(0.0000)	(0.0160)			(0.7100)	(0.7240)			(0.0020)	(0.0380)	
$c = 1.8$	0.0778	0.8713	0.0833	0.0548	0.0723	0.9994	0.0723	0.1794	0.0768	0.8715	0.0823	0.0556
		(0.0020)	(0.0300)			(0.5020)	(0.7920)			(0.0140)	(0.0440)	
$c = 2.0$	0.0789	0.8933	0.0835	0.0627	0.0714	1.0359	0.0701	0.1988	0.0775	0.8932	0.0820	0.0636
		(0.1680)	(0.0620)			(0.2500)	(0.9240)			(0.1920)	(0.0940)	
$c = 2.2$	0.0792	0.9112	0.0829	0.0694	0.0706	1.0807	0.0679	0.2193	0.0780	0.9117	0.0817	0.0705
		(0.5140)	(0.0920)			(0.1000)	(0.9600)			(0.4540)	(0.1060)	

Tabela 3: Desempenho das carteiras de variância mínima com restrição nas normas (Rebalanceamento mensal)

A tabela apresenta a média diária dos retornos das carteiras ótimas considerando diferentes níveis de restrição nas normas dos vetores de alocação, média diária da variância da carteira, o índice de Sharpe e portfólio *turnover* dos portfólios de variância mínima com restrição nas normas dos vetores de alocação, obtidos com matrizes de covariâncias geradas pelo modelo scalar vt-vech. Os modelos *benchmark* são a matriz de covariância amostral e o modelo RiskMetrics. *p*-valores para as diferenças entre as variâncias das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo restrito para venda a descoberto estão entre parênteses abaixo de cada coeficiente.

	Covariância Amostral				RiskMetrics				Estimador VECH			
	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover	Média	Variância	Sharpe Ratio	Turnover
Portfólio Naïve	0.0578	2.2616	0.0384	0.0000	0.0578	2.2616	0.0384	0.0000	0.0578	2.2616	0.0384	0.0000
		(0.0000)	(0.1580)			(0.0000)	(0.1580)			(0.0000)	(0.1580)	
GMV	0.0816	0.9759	0.0826	0.0406	0.0683	2.1682	0.0464	0.2141	0.0792	0.9796	0.0801	0.0412
		(0.9300)	(0.0300)			(0.0000)	(0.4100)			(0.9640)	(0.0540)	
No-short	0.0624	0.9799	0.0630	0.0116	0.0384	1.3206	0.0334	0.0445	0.0611	0.9807	0.0617	0.0117
						(0.0060)	(0.0840)			(0.7240)	(0.0640)	
$c = 1.2$	0.0708	0.9105	0.0742	0.0161	0.0483	1.3015	0.0423	0.0546	0.0690	0.9113	0.0723	0.0163
		(0.0000)	(0.0000)			(0.0100)	(0.2260)			(0.0000)	(0.0080)	
$c = 1.4$	0.0744	0.8897	0.0788	0.0200	0.0546	1.2768	0.0483	0.0642	0.0723	0.8903	0.0766	0.0203
		(0.0000)	(0.0040)			(0.0100)	(0.4080)			(0.0000)	(0.0100)	
$c = 1.6$	0.0756	0.8944	0.0799	0.0242	0.0600	1.2717	0.0532	0.0734	0.0732	0.8947	0.0774	0.0244
		(0.0000)	(0.0100)			(0.0120)	(0.5880)			(0.0000)	(0.0420)	
$c = 1.8$	0.0772	0.9116	0.0809	0.0288	0.0594	1.2737	0.0526	0.0820	0.0748	0.9119	0.0784	0.0290
		(0.0120)	(0.0200)			(0.0000)	(0.6040)			(0.0100)	(0.0500)	
$c = 2.0$	0.0795	0.9339	0.0823	0.0329	0.0589	1.3076	0.0515	0.0912	0.0769	0.9345	0.0796	0.0332
		(0.1520)	(0.0180)			(0.0000)	(0.5940)			(0.1540)	(0.0360)	
$c = 2.2$	0.0809	0.9530	0.0829	0.0362	0.0607	1.3539	0.0521	0.1006	0.0784	0.9549	0.0802	0.0367
		(0.4360)	(0.0300)			(0.0000)	(0.6020)			(0.4980)	(0.0440)	

4. Conclusões

As conclusões deste trabalho foram que as restrições sobre as normas tiveram um desempenho melhor que os outros tipos de otimização (maior Índice de Sharpe), como em [Brodie *et al.* \(2008\)](#) e [DeMiguel *et al.* \(2009a\)](#). É importante ressaltar que quando as carteiras com restrição de exposição bruta apresentaram valor do investimento menor na figura 1, a diferença não foi muito grande e ainda assim elas tinham menor *turnover* e índice de sharpe maior ou comparável.

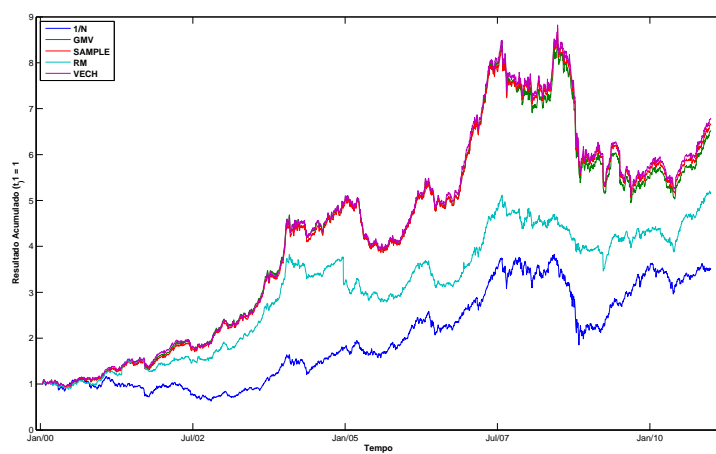
Dessa forma, a otimização com restrição sobre exposição bruta pode ser uma alternativa viável aos métodos tradicionais de otimização de carteiras. Esta abordagem restringe a soma das posições vendidas e assim pode-se ter um controle maior sobre o vetor de alocação do portfólio. Com isso, a carteira apresenta um *turnover* menor e maior retorno médio ajustado pelo risco (índice de Sharpe).

References

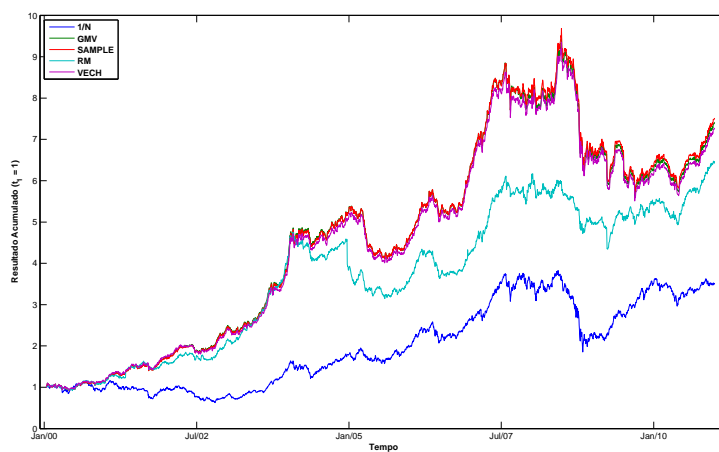
- BEST, MICHAEL J, & GRAUER, ROBERT R. 1991. On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *Review of Financial Studies*, 4(2), 315–42.
- BRODIE, JOSHUA, DAUBECHIES, INGRID, DE MOL, CHRISTINE, GIANNONE, DOMENICO, & LORIS, IGNACE. 2008 (Sept.). *Sparse and stable Markowitz portfolios*. Working Paper Series 0936. European Central Bank.
- CALDEIRA, JOÃO, MOURA, GUILHERME, & SANTOS, ANDRÉ. 2013. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. *Revista Brasileira de Economia*, 67(1).
- CERIA, S., & STUBBS, R.A. 2006. Incorporating estimation errors into portfolio selection: Robust portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 7(2), 109–127.
- CHOPRA, VIJAY K., & ZIEMBA, WILLIAM T. 1993. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6–11.
- DEMIGUEL, VICTOR, GARLAPPI, LORENZO, NOGALES, FRANCISCO J., & UPPAL, RAMAN. 2009a. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, 55(5), 798–812.

Figura 1: Valor do Investimento Inicial em Janeiro de 2000 obedecendo o Rebalanceamento Executado

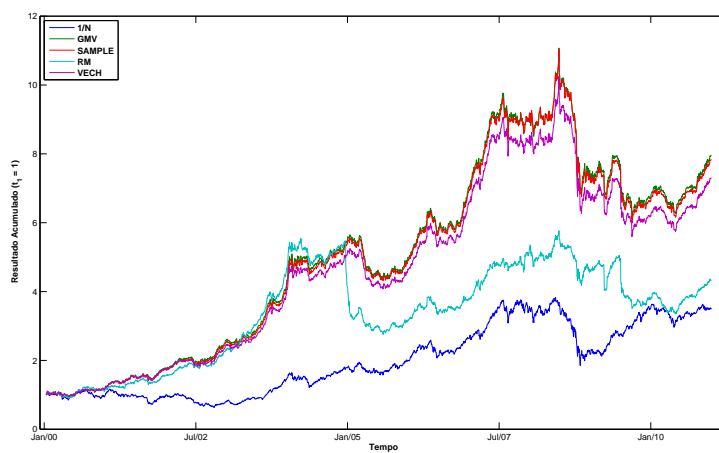
(a) Rebalanceamento diário



(b) Rebalanceamento semanal



(c) Rebalanceamento mensal



- DEMIGUEL, VICTOR, GARLAPPI, LORENZO, & UPPAL, RAMAN. 2009b. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1-N Portfolio Strategy? *Review of Financial Studies*, **22**(5), 1915–1953.
- ENGLE, ROBERT, & SHEPPARD, KEVIN. 2008. *Evaluating the specification of covariance models for large portfolios*. Working Paper. New York University, working paper.
- FAN, JIANQING, FAN, YINGYING, & LV, JINCHI. 2008. High dimensional covariance matrix estimation using a factor model. *Journal of Econometrics*, **147**(1), 186–197.
- FAN, JIANQING, ZHANG, JINGJIN, & YU, KE. 2012. Vast Portfolio Selection With Gross-Exposure Constraints. *Journal of the American Statistical Association*, **107**(498), 592–606.
- FRANCQ, CHRISTIAN, HORVATH, LAJOS, & ZAKOÏAN, JEAN-MICHEL. 2011. Merits and drawbacks of variance targeting in GARCH models. *Journal of Financial Econometrics*, **9**(4), 619–656.
- GASTINEAU, GARY L. 2008. The Short Side of 130/30 Investing. *The Journal of Portfolio Management*, **34**(2), 39–52.
- GRANT, MICHAEL, & BOYD, STEPHEN. 2014 (Mar.). *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1*. <http://cvxr.com/cvx>.
- GREEN, RICHARD C, & HOLLIFIELD, BURTON. 1992. When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified? *Journal of Finance*, **47**(5), 1785–809.
- JACOBS, BRUCE I, & LEVY, KENNETH N. 2006. Enhanced Active Equity Strategies. *The Journal of Portfolio Management*, **32**(3), 45–55.
- JAGANNATHAN, RAVI, & MA, TONGSHU. 2003. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *Journal of Finance*, **58**(4), 1651–1684.
- LEDOIT, OLIVER, & WOLF, MICHAEL. 2008. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, **15**(5), 850–859.

- LEDOIT, OLIVIER, & WOLF, MICHAEL. 2003. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, **10**(5), 603–621.
- LEDOIT, OLIVIER, & WOLF, MICHAEL. 2004. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, **88**(2), 365–411.
- LO, ANDREW W, & PATEL, PANKAJ N. 2008. 130/30. *The Journal of Portfolio Management*, **34**(2), 12–38.
- MARKOWITZ, HARRY. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- MARKOWITZ, H.M. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Cowles Commission for Research in Economics: Monographs. Yale University Press.
- MENDES, B.V., & LEAL, R.P.C. 2005. Robust multivariate modeling in finance. *International Journal of Managerial Finance*, **1**(2), 95–106.
- POLITIS, DIMITRIS N., & ROMANO, JOSEPH P. 1994. The Stationary Bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, **89**(428), 1303–1313.