PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS LEVANDO EM CONTA OS MOMENTOS SUPERIORES DAS DISTRIBUIÇÕES DE RETORNOS: A DERIVAÇÃO DO *OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL* (OCAPM)

Gabriel Filipe Rodrigues Vasconcelos[1]
Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli[2]
Marcel de Toledo Vieira[3]

RESUMO:

Este trabalho propõe uma nova versão para o CAPM, o Ômega CAPM. Este novo modelo leva em conta todos os momentos das distribuições de retornos dos ativos de forma indireta. Além de permitir abandonar a taxa livre de risco em favor de um ativo base da economia, que varia no tempo, a forma simples de apenas um fator de risco do CAPM tradicional é mantida. Os pressupostos com relação à utilidade dos indivíduos também são mais simples, limitando-se a aversão ao risco e a não saciedade. A construção do OCAPM mantém a elegância e o rigor teórico do CAPM tradicional, porém faz uso da medida de performance Ômega (KEATING E SHADWICK 2002) no lugar do modelo média-variância de Markowitz. Uma breve avaliação empírica foi conduzida para comparar os dois modelos. Os resultados obtidos indicaram que o OCAPM é mais eficaz do que o CAPM, o que leva a conclusão de que é mais plausível que as pessoas pensem em um enfoque Ômega do que no enfoque média-variância.

Palavras-chave: CAPM, OCAPM, Medida Ômega, taxa base.

JEL: G12, G11.

Área ANPEC: Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças.

ABSTRACT:

This paper proposes a new version of the well know CAPM, the Omega CAPM. This new model indirectly considers all moments of the distribution of assets. Furthermore, the model allow us to replace the risk free rate for a base asset that varies in time, all that without changing the simple form of the traditional CAPM which allows for only one risk factor. Assumptions regarding individual utility are also simple, including only the risk aversion and greed. The construction of OCAPM keeps the elegancy and the theoretical foundations of its predecessor. The difference is in the use of the Omega performance measure (KEATING E SHADWICK 2002) instead of the Markowitz mean-variance. A brief empirical evaluation was conducted in order to compare both models. The results have shown that OCAPM is more effective than CAPM, which lead us to the conclusion that it is more plausible that people consider the Omega measure instead of the mean variance approach.

Palavras Chave: CAPM, OCAPM, Omega Measure, base asset.

[1] Universidade Federal de Juiz de Fora
Contato: gabrielrvsc@yahoo.com.br
[2] Universidade Federal de Juiz de Fora
Contato: fernandafinotti.perobelli@ufjf.edu.br
[3] Universidade Federal de Juiz de Fora
Contato: marcel.vieira@ice.ufjf.br

1) INTRODUÇÃO

Na tomada de decisões sob condições de incerteza, a precificação justa de ativos de risco sempre foi tema de grande interesse. A contribuição seminal ao tema foi dada por Harry Markowitz, em seu trabalho sobre Teoria de Carteiras em 1952, posteriormente aprofundada e difundida pelo desenvolvimento do modelo conhecido como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), proposto por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). Tal modelo é, até os dias de hoje, um dos principais modelos de precificação de ativos, largamente utilizado tanto na academia, quanto no mercado. Além de oferecer uma medida do retorno justo para ativos de mercado dado seu risco relevante (mensurado pelo coeficiente de risco sistêmico desse ativo ou beta), a utilização do CAPM está altamente ligada à área de avaliação de projetos reais, em que é utilizado para mensuração da taxa de retorno ajustada ao risco a ser exigida pelo empreendedor no desconto dos fluxos de caixa do projeto e, consequentemente, também na avaliação das opções implícitas nesse projeto (valor presente líquido expandido pelo valor das opções reais contidas no projeto).

Embora o CAPM seja um modelo teoricamente consistente e de fácil implementação, algumas de suas premissas (como retornos normalmente distribuídos, função utilidade do decisor quadrática, existência de uma carteira de mercado contendo todos os ativos em proporções de equilíbrio, e mercado perfeito) não podem ser verificadas empiricamente. Dessa forma, sua utilização é limitada, sob pena de gerar estimativas de retornos pouco aderentes aos retornos efetivamente observados. Adicionalmente, a variância, que é a medida de risco sobre a qual o CAPM é construído, considera tanto o *downside risk* (risco de perda) como o *upside risk* ("risco" de ganho) como risco. Empiricamente, entretanto, parece ser mais interessante tratar como risco apenas a parcela da distribuição dos retornos dos ativos que diz respeito à perda, ou seja, a resultados inferiores a um certo valor de referência.

Isso posto, este trabalho propõe uma nova versão para o CAPM, doravante denominada Ômega[4] CAPM (OCAPM). Este novo modelo avança em relação ao CAPM original por (1) não estabelecer nenhum pressuposto em relação às distribuições dos retornos dos ativos; (2) não fazer pressuposto sobre a função utilidade do decisor; (3) ser construído tomando por base uma medida de risco para os ativos que considera apenas o *downside risk* e atende a todos os axiomas das medidas de risco coerentes; (4) ser baseado em uma medida de performance mais coerente com o comportamento real dos investidores; (5) permitir uma taxa livre de risco que varia no tempo[5]. Ainda, os pressupostos com relação à utilidade dos decisores nessa nova versão se limitam à aversão ao risco e à não saciedade.

1.1) Contribuições do trabalho

O CAPM tradicional, por ser construído a partir do modelo Média-Variância de Markowitz (1952), pressupõe distribuição normal para os retornos dos ativos (retornos definidos a partir da média e da variância da amostra), bem como função utilidade quadrática para todos os indivíduos (também definida em termos de média-variância). O risco relevante de um ativo é definido como seu beta, que é alvo de muitas críticas

[4] O nome 'Ômega' vem da medida de performance criada por Keating e Shadwick (2002).

[5] Uma taxa livre de risco que varia no tempo pode parecer contraditório, porém na pratica a taxa livre de risco é na verdade um ativo base, como a Selic no caso do Brasil, e esta varia no tempo.

(FAMA E FRENCH 1992). Este trabalho propõe uma nova versão do CAPM que leva em conta todos os momentos das distribuições de retornos (pode ser utilizada em qualquer distribuição de retornos), sem inclui-los diretamente na forma funcional do modelo como é feito em Kraus e Litzenberger (1976) e Fang e Lai (1997) e sem fazer pressupostos fortes sobre o comportamento dos indivíduos. Desta forma, o Ômega CAPM mantém a simplicidade da forma funcional do modelo original e respeita os axiomas fundamentais da teoria financeira (como aversão a risco e não saciedade), além de introduzir o *Expected Shortfall* (ES) como medida de risco mais coerente, no lugar da variância. O *Expected Shortfall* possui propriedades desejáveis como medida de risco, conforme mostrado por Arcebi e Tashe (2002), a serem detalhadas no decorrer deste trabalho.

Ainda, no OCAPM, a função utilidade quadrática é deixada de lado em favor de toda e qualquer função utilidade que respeite, além dos axiomas da não saciedade e da aversão ao risco, outros pressupostos econômicos da utilidade (como aversão a risco absoluta decrescente e aversão a risco relativa constante[6]) dos indivíduos. Por último, o modelo permite uma interpretação de taxa base para a taxa livre de risco, permitindo que ela varie no tempo.

2) REVISÃO TEÓRICA

A teoria para avaliação e performance de carteiras de ativos teve um marco importante em 1952 com Harry Markowitz, cuja proposta era determinar um conjunto de carteiras ótimas considerando as dimensões risco (variância) e retorno (média). O modelo apresentado, comumente conhecido como Média-Variância, era de fácil manuseio e foi amplamente aceito pela comunidade acadêmica. O objetivo precípuo desse modelo era a construção da então denominada Fronteira Eficiente, podendo esta ser construída via programação matemática simples.

Naturalmente, quanto mais retorno e menos variância melhor. A relação entre retorno e risco, avaliada em um ponto da fronteira, forneceria o prêmio de risco naquele ponto. Entretanto, a não existência de um prêmio de risco único, capaz de satisfazer a todos os investidores, é um dos problemas dessa abordagem inicial.

Adicionalmente, o fato de trabalhar apenas com a média e a variância das distribuições de retorno limita a análise ao escopo dos ativos cujos retornos sejam

[6] De Acordo com Copeland e Weston (2002), a função utilidade quadrática pode ser facilmente definida em termos de média e variância. No entanto, embora a não saciedade, a aversão ao risco e a aversão ao risco absoluta sejam pressupostos satisfeitos nessa função, o mesmo não ocorre para a aversão relativa ao risco (AR), que é crescente na função quadrática. Os coeficientes de aversão ao risco de Arrow-Pratt são definidos em Mas-Colell *et. al.* (1995) como:

$$AA = \frac{U''}{U'}$$

$$AR = \frac{U''}{U'} w$$

onde $U(.)$ é uma função utilidade qualquer e w representa a renda do indivíduo. São pressupostos econômicos desejáveis da função utilidade que a aversão absoluta ao risco decresça enquanto a aversão relativa ao risco se mantenha constante conforme a renda aumente.

normalmente distribuídos[7], uma vez que a distribuição normal pode ser plenamente definida a partir de apenas dois parâmetros: média e variância. Empiricamente, entretanto, a não normalidade das séries financeiras já é amplamente aceita na academia. Chunhachinda *et al.* (1997), Peiró (1999), Harvey e Siddique (2000) e Smith (2007) são alguns dos autores que discutem a importância de se considerar, na tomada da decisão de investimento, outros momentos estatísticos da distribuição de retornos dos ativos, dando mais ênfase à assimetria. Por fim, ao assumir que decisores possuem função utilidade quadrática, também definida em termos de média e variância apenas, o modelo elege uma função utilidade cujas propriedades econômicas não seguem aquelas tidas como desejáveis.

O CAPM de Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) origina-se da transformação da fronteira eficiente de Markowitz (1952) na *Capital Markets Line* (CML) pela consideração do ativo livre de risco. No entanto, a CML permite apenas a comparação de uma carteira qualquer com a carteira de mercado. Para comparar um ativo individual com o mercado fez-se uso da *Security Markets Line* (SML). A SML é a representação gráfica do CAPM, ela mostra a relação linear entre retorno esperado e risco sistêmico (*Beta*) de um ativo, que é um dos principais resultados do CAPM.

Entre as principais conclusões do CAPM destaca-se o *Beta* como único fator de risco de um ativo, qualquer risco não captado pelo *Beta* é chamado de risco não sistêmico, e pode ser facilmente eliminado via diversificação. Ao contrário da fronteira eficiente de Markowitz, o CAPM cria um prêmio único para o risco, que é a inclinação da SML.

A simplicidade do CAPM levanta muitas questões sobre o quão bem o modelo se ajusta a realidade. Seria o *Beta* suficiente para explicar os retornos esperados? É correto assumir que existe uma taxa livre de risco? Os retornos esperados podem mesmo ser explicados de forma linear? Os retornos seguem mesmo uma distribuição normal? Tais questões motivaram um grande número de trabalhos empíricos para verificar se o CAPM é capaz de se ajustar os dados.

Tratando de alguns resultados empíricos do CAPM apresentados na literatura, Black, Jensen e Scholes (1972) mostraram que o excesso de retorno de um ativo não é estritamente proporcional a seu *Beta*. Embora os autores aceitem que o *Beta* tem importância para explicar os retornos esperados, eles rejeitam a forma tradicional do CAPM argumentando que podem haver outros fatores, que não o *Beta*, que expliquem os retornos esperados, ou mesmo uma relação não linear entre os dois. Friend e Blume (1970; 1973) também realizaram testes para o CAPM e observaram uma incapacidade da teoria da SML de explicar os retornos médios de ativos financeiros. Por outro lado, os autores confirmam a relação linear dos ativos proposta pelo CAPM.

Basu (1977), Banz (1981) e Litzenberger e Ramaswamy (1979) mostraram que outras variáveis podem ser utilizadas para explicar os retornos esperados dos ativos junto com o *Beta*, rejeitando a forma tradicional do CAPM. Keim (1983; 1985) mostrou também que existe sazonalidade nos retornos dos ativos.

[7] A dominância estocástica também flexibiliza qualquer pressuposto com relação à distribuição dos retornos dos ativos. No entanto, este método não se mostrou facilmente adaptável aos modelos financeiros clássicos.

Embora existam muitos resultados empíricos ruins para o CAPM, algumas de suas hipóteses foram aceitas por alguns autores. Fama e Macbeth (1973) testaram o CAPM no mercado de ações americanos e não encontraram evidências que levassem a rejeição da hipótese de que os preços das ações no mercado refletem as tentativas de investidores avessos ao risco de construir portfólios que maximizem retorno e minimizem dispersão. Porém, isto não é suficiente para aceitar a validade do modelo. O CAPM é um modelo teórico que possui uma construção robusta e elegante. Os trabalhos citados acima são apenas alguns exemplos de pesquisas que mostram que empiricamente o CAPM pode falhar de diversas formas. Note que a maioria dos trabalhos citados convergem para uma falha do *Beta* em representar todo o risco de um ativo.

Não seria exagero afirmar que todas as premissas teóricas do CAPM são violadas no mundo real e que, por isso, sua validade empírica pode ser questionável. Levando em conta que este trabalho busca um avanço em relação à flexibilização das premissas sobre as quais o CAPM é sustentado, é importante citar alguns trabalhos onde o objetivo é semelhante. Black (1972) criou uma nova versão para o modelo que não utiliza a taxa livre de risco e em seu lugar é utilizada a carteira com o *Beta* nulo que possui a menor variância. Merton (1973) é responsável pelo *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (ICAPM) que introduz a possibilidade de um ativo livre de risco estocástico em um modelo intertemporal. O *Consumption* CAPM, de Lucas (1978), é um modelo que considera que o investidor é também consumidor, e tem como objetivo maximizar a utilidade de toda sua vida.

Um modelo que não pode ser deixado de lado é o *Arbitrage Pricing Theory* (APT), de Ross (1976), podendo este ser visto como o principal concorrente do CAPM. O APT pode ser visto como uma forma mais robusta do CAPM, já que os pressupostos com relação à utilidade dos indivíduos são relaxados para não saciedade e aversão ao risco apenas, deixando de lado a função utilidade quadrática. Também, neste caso, não são consideradas hipóteses sobre a distribuição dos retornos e a carteira de ativos de risco utilizada pode ser qualquer subconjunto da carteira de mercado utilizada no CAPM. O APT abre mão da carteira de mercado e permite a existência de vários fatores de risco, o que não ocorre no CAPM, que utiliza apenas o *Beta*.

3) MEDIDAS DE RISCO COERENTES

Artzner *et. al.* (1999) definem as propriedades necessárias para que uma medida de risco seja considerada coerente. Uma medida de risco coerente deve diminuir quando é adicionada renda fixa à carteira (alocação); o risco da carteira deve ser menor ou igual ao risco dos ativos que a compõem separadamente (subaditividade); ao duplicar a posição em uma carteira, o risco também é duplicado (homogeneidade de grau 1) e, se os retornos de um ativo são sempre maiores que os retornos de um outro ativo, em qualquer estado da natureza, então o primeiro tem menor risco (monotonicidade)

Formalmente, sejam X e Y duas variáveis aleatórias (retornos de dois ativos), e seja k uma constante, então ρ será uma medida de risco coerente se satisfizer os seguintes axiomas:

a) Monotonicidade: Se para todo X e Y tem-se $X < Y$ então $\rho(X) > \rho(Y)$
b) Homogeneidade de grau 1: $\rho(kX) = k\rho(x)$.
c) Subaditividade: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

d) Alocação: $\rho(X+k) = \rho(X) - k, \forall k > 0$.

Além disso, não é interessante considerar 'ganho acima da média' como risco. Se, para uma distribuição de retornos de um ativo i, escolhe-se um retorno r' tal que se $r < r'$ o investidor terá perdas e caso $r > r'$ o investidor terá ganhos, a única parte da distribuição de retornos que é risco é aquela referente aos retornos inferiores a r'. A literatura chama este tipo de risco de *downside risk*; o "risco" de ganhar será então o *upside risk*.

Nesse sentido, o *Expected Shortfall* (*ES*) seria uma medida de risco coerente[8], ao levar em conta apenas o *downside risk* e, segundo Arcebi e Tasche (2002), atende a todos os axiomas das medidas coerentes de risco. O ES pode ser definido como a esperança da perda, caso a mesma ocorra.

Existem várias definições matemáticas para o *Expected Shortfall*. Tomando como base a que será utilizada neste trabalho, em primeiro lugar é preciso definir o ponto limiar, L, que separa os ganhos das perdas na distribuição de retornos de um ativo. Então, para um ativo X:

$$ES(L) = \int_{-\infty}^{L} (L-x) f_X(x) dx = E[\max(L-x; 0)] \tag{3.1}$$

Onde $ES(L)$ é o Expected Shortfall do ativo X levando em conta o limiar L e $f_X(.)$ é função densidade de probabilidade do ativo X.

4) A MEDIDA ÔMEGA

Com o objetivo de derivar um modelo teoricamente mais consistente que o CAPM, será feito uso dos conceitos teóricos da medida de performance Ômega, proposta originalmente por Keating e Shadwick (2002). Esta medida tem a vantagem de não fazer qualquer tipo de pressuposição quanto às distribuições dos retornos de ativos, assim como colocar o problema da escolha sob incerteza em um plano bidimensional, como feito no modelo média-variância de Markowitz (1952).

Para definir a medida Ômega, em primeiro lugar, é preciso definir um ponto de retorno mínimo[9] L, exógeno e definido pelo investidor. Um investidor estará na região de ganhos da distribuição de retornos se $r > L$; se $r < L$, o investidor estará na região de perdas.

Seja o intervalo de uma distribuição de retornos $a \leq r \leq b$, a medida de performance Ômega é definida como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F_X(x)] dx}{\int_a^L F_X(x) dx} \tag{4.1}$$

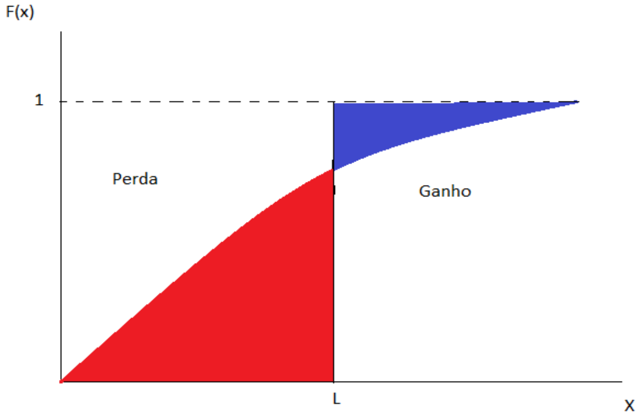
em que $F_X(x)$ é a função de distribuição acumulada dos retornos de um portfólio ou ativo X. A figura (4.1) permite uma visualização gráfica da medida Ômega, sendo a área em azul a região de ganhos e a área em vermelho a região de perdas. Ômega será, então, a razão entre essas duas áreas.

---

[8] Em caso de distribuições que apresentem descontinuidades, a coerência do *Expected Shortfall* pode falhar se não houver cuidado na aplicação de sua definição.

[9] O L aqui definido é o mesmo do *Expected Shotfall*.

Figura 4.1: Medida Ômega



Fonte: Elaboração própria com base em Keating e Shadwick (2002).

Kazemi *et al.* (2004) mostraram ser possível uma representação alternativa da medida Ômega. Definindo *Expected Chance* (EC) como o valor esperado do excesso de ganho $(x-L)$ condicional a resultados positivos e *Expected Shortfall* (ES) como o valor esperado da perda $(L-x)$ condicional a resultados negativos, então:

$$\Omega(L)=\frac{\int_L^b (x-L)f_X(x)dx}{\int_a^L (L-x)f_X(x)dx}=\frac{EC(L)}{ES(L)}=\frac{E[Max(x-L;0)]}{E[Max(L-x;0)]} \qquad (4.2)$$

Em um ponto de vista empírico ainda existem poucos trabalhos sobre a medida Ômega. Castro (2008) otimiza carteiras de ativos financeiros e ativos reais usando tal medida, argumentando que a mesma contribui de forma substancial, pois se ajusta bem a retornos não normais. Além de comparar a medida Ômega com a otimização de carteiras via Markowitz, o autor faz uso de simulações de Monte Carlo com o objetivo de construir distribuições de VPL (Valor Presente Líquido) com o objetivo de construir carteiras ótimas de projetos fazendo uso de Ômega.

Favre-Bulle e Pasche (2003) e Passow (2004) comparam portfólio construídos via medida Ômega com portfólios construídos via razão de Sharpe, apontando a superioridade dos primeiros. Bertrand e Prigent (2011) utilizam a medida Ômega no mercado de seguros, mais especificamente para comparar duas estratégias já assumindo a superioridade da medida em relação às outras disponíveis.

Observe que a medida Ômega utiliza o *Expected Shortfall* como medida de risco, respeitando todos os axiomas das medidas coerentes de risco e considerando como risco apenas a parte referente às perdas da distribuição dos retornos dos ativos.

Neste ponto é importante levar em conta a seguinte questão: Será que no mundo real as pessoas levam em consideração os momentos superiores das distribuições de retorno para tomar suas decisões de investimento? A resposta mais provável é que não. Então, qual seria a motivação para a construção de modelos que levam em conta estes momentos? Um importante argumento é que esses modelos mostrariam como as pessoas deveriam se comportar, mas não como elas se comportam.

É razoável acreditar que, no mundo real, as pessoas querem o maior ganho possível ao investir, e que perder é uma coisa ruim. Markowitz tentou explicar isso fazendo uso da matemática, dizendo que o retorno é a coisa boa, e a variância a coisa ruim, ao maximizar a razão entre o bom e o ruim, o resultado seria o máximo do bom combinado com o mínimo do ruim. A medida Ômega faz uso da mesma ideia, porém com medidas diferentes daquelas utilizadas por Markowitz. Embora matematicamente o *Expected Shortfall* e o *Expected Chance* possam parecer mais complexos do que a variância e a média, eles podem ser mais razoáveis para explicar como as pessoas realmente se comportam. O ES indica se um indivíduo perder, de quanto será este perda, na média, e o EC indica se um indivíduo ganhar, de quanto será este ganho, na média, com estas duas informações a decisão é tomada. Logo, suas interpretações são bem simples.

O Ômega CAPM, que será derivado mais a frente, parte do pressuposto de que, na realidade, as pessoas levam em conta o *Expected Chance* e o *Expected Shortfall* na toma de decisões mais do que levariam a média e a variância. Em uma loteria, por exemplo, é mais interessante saber o tamanho do ganho e o tamanho da perda, do que a média e a variância para decidir apostar.

É muito importante que o leitor tenha uma ideia clara de que o OCAPM não trabalha com o pressuposto de que as pessoas observam diretamente a assimetria e a curtose das distribuições de retornos dos ativos para tomar suas decisões. Na verdade, estes momentos superiores são levados em conta de forma indireta, via medida Ômega que, como foi dito anteriormente, pode ser razoável como *proxy* para a forma como as pessoas realmente se comportam.

5) A PROPOSIÇÃO DO *OMEGA CAPITAL ASSET PRICING MODEL*

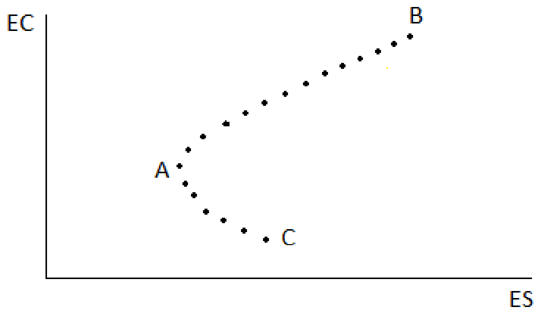
Tendo definido as medidas Ômega, EC e ES, a proposta desse trabalho é construir um modelo de precificação de ativos a partir dessas medidas e com rigor teórico similar ao do CAPM original, mas que flexibiliza algumas de suas premissas mais restritivas, quais sejam: normalidade dos retornos e função utilidade quadrática.

5.1) A Fronteira Eficiente Ômega

Em primeiro lugar, é preciso construir uma fronteira eficiente no sentido de Markowitz (1959), porém no plano $EC \times ES$. A fronteira eficiente ômega mostra os portfólios onde, para um dado *Expected Shortfall*, nenhuma outra oportunidade de investimento ofereça uma *Expected Chance* maior. Em outras palavras, todos os portfólios disponíveis no mercado são dominados pela fronteira eficiente.

A figura 5.1.1 apresenta um exemplo visual de uma fronteira eficiente. O ponto A representa o menor *Expected Shortfall* factível, entre todos os portfólios disponíveis no mercado. Note que investidores avessos ao risco e não saciáveis nunca escolherão pontos abaixo do ponto A, pois sempre será possível obter um nível mais elevado de *Expected Chance*, sem alterar o *Expected Shortfall*. O conjunto obtido via medida Ômega, ótimo e factível de portfólios será composto, então, pelo conjunto de portfólios AB da fronteira eficiente.

Figura 5.1.1: Fronteira Eficiente Ômega



Fonte: Elaboração Própria

Considerando que os indivíduos são avessos ao risco e preferem sempre mais a menos [10], o conjunto ômega ótimo factível é obtido por meio de uma simples programação matemática:

$$Max\ EC(L) \quad s.a.\ ES(L) = K \tag{5.1.1}$$

$$Min\ ES(L) \quad s.a.\ EC(L) = K \tag{5.1.2}$$

onde K é uma constante. As duas programações acima são equivalentes para a verificação da parte factível da fronteira eficiente. Portanto, o procedimento é maximizar (minimizar) o EC (ES), de forma que ES (EC) seja igual a uma constante.

Como essa abordagem não assume um ativo livre de risco, a partir do qual os indivíduos possam emprestar e tomar emprestado, um investidor escolherá um portfólio P, contido na fronteira eficiente que faça com que a sua taxa marginal de substituição (TMS) em termos de EC e ES seja igual à taxa marginal de transformação (TMT) entre EC e ES observada na fronteira. Sendo assim:

$$TMS_{ES_P}^{EC_P} = TMT_{ES_P}^{EC_P} \tag{5.1.3}$$

5.2) A *Capital Makets Line* (CML) Ômega

A partir deste ponto, o retorno limite L, escolhido pelo investidor, será tratado como um custo de oportunidade desse investidor. Tal interpretação é coerente com o conceito inicial de Keating e Shadwick (2002), uma vez que, segundo esses autores, retornos menores que L são considerados como perda, enquanto retornos maiores que L serão tratados como ganhos. Se L é o retorno mínimo para se investir num determinado ativo, vale a interpretação tradicional de custo de oportunidade, em que só haverá lucro econômico caso existam ganhos superiores a este custo.

Se o custo de oportunidade de um investidor é L, então se pressupõe que exista alguma forma deste investidor ter um retorno determinístico (ou livre de variação) que seja exatamente L. Os valores de EC e ES desta oportunidade que rende L serão:

$$EC_L = E[Max(x - L; 0)] = 0 \tag{5.2.1}$$

---

[10] Preferir mais a menos, neste caso, significa preferir níveis superiores de *Expected Chance* e níveis inferiores de *Expected Shortfall*. Para um L fixo, elevar EC(L) e reduzir ES(L) refletem em aumento do retorno esperado e das probabilidades de obter retornos mais elevados.

$$ES_L = E[Max(L - x; 0)] = 0 \tag{5.2.2}$$

As esperanças acima são sempre iguais a zero, pois o único valor que x assume é L, ou seja, o retorno de L é livre de variação, ou livre de risco conforme o enfoque Média-Variância. Para construir a CML Ômega, compatível com a CML original, é preciso supor um portfólio que seja composto do ativo livre de risco (ou que renda o custo de oportunidade de um investidor) e de uma carteira ótima da fronteira eficiente, que será tratada como carteira de mercado. Seja $0 \leq \alpha \leq 1$ a proporção da renda investida na carteira de mercado, m:

$$EC_p = E[Max\{\alpha R_m + (1-\alpha)L - L;\ 0\}] \tag{5.2.3}$$

$$ES_p = E[Max\{L - \alpha R_m - (1-\alpha)L;\ 0\}] \tag{5.2.4}$$

A função máximo pode ser definida como: Sejam $\{X, Y\} \in \mathbb{R}$, $Max\{X, Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}$. Transformando as equações (5.2.3) e (5.2.4) encontra-se[11]:

$$EC_p = E\left[\frac{\alpha R_m - \alpha L + |\alpha R_m - \alpha L|}{2}\right] = E\left[\frac{\alpha(R_m - L) + |\alpha||R_m - L|}{2}\right] = \alpha EC_m \tag{5.2.5}$$

$$ES_p = E\left[\frac{\alpha L - \alpha R_m + |\alpha L - \alpha R_m|}{2}\right] = E\left[\frac{\alpha(L - R_m) + |\alpha||L - R_m|}{2}\right] = \alpha ES_m \tag{5.2.6}$$

Note que só foi possível retirar α da esperança porque α assume apenas valores positivos entre zero e um. Ao diferenciar EC_p e ES_p com relação a α e calcular a razão entre os dois resultados, é possível encontrar a inclinação da CML Ômega no plano $EC \times ES$.

$$\frac{\partial EC_P}{\partial \alpha} = EC_m \tag{5.2.7}$$

$$\frac{\partial ES_P}{\partial \alpha} = ES_m \tag{5.2.8}$$

A inclinação da CML Ômega será, então, $\frac{EC_m}{ES_m}$. A equação da nova CML, por sua vez, será:

$$EC_P = \frac{EC_m}{ES_m} ES_p \tag{5.2.9}$$

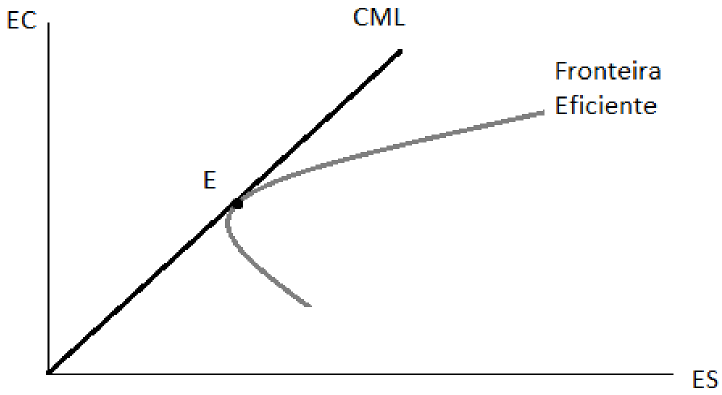
A equação acima mostra que, no plano $EC\ X\ ES$, a CML irá sempre partir da origem. Além disso, a medida ômega do mercado $\Omega_m = (EC_m/ES_m)$ poderá ser interpretada como o preço do risco de mercado, enquanto ESp será a medida da quantidade de risco do portfólio. Dessa maneira, a multiplicação do preço de risco de mercado pela quantidade de risco do portfólio fornecerá uma estimativa do prêmio de risco do portfólio.

Note que a carteira de mercado não é qualquer carteira ótima, mas aquela que faz com que a inclinação da CML Ômega seja a maior possível, de forma que a reta da CML Ômega tangencie a fronteira ótima Ômega. Desta forma, um novo conjunto de oportunidades é formado e tal conjunto domina a fronteira eficiente, como mostra a figura 5.2.1.

---

[11] Para a equação (5.2.3) faz-se $X = \alpha R_m + (1-\alpha)L - L$ e $Y = 0$, o raciocínio para (5.2.4) é análogo.

Figura 5.2.1: A CML Ômega



Fonte: Elaboração Própria

O ponto E representa a carteira da fronteira eficiente que faz com que a CML tenha a maior inclinação possível. Seja $W = \{w_1, \dots, w_n\}$, o conjunto das frações da renda utilizadas nos ativos $1, \dots, n$. A carteira de mercado, m, é obtida solucionando-se o seguinte problema:

$$Max\Omega_m = Max \frac{EC_m}{ES_m} \quad (5.2.10)$$

Note ainda que, conforme o artigo original de Sharpe (1964), o Teorema da Separação em Dois Fundos permanece válido, uma vez que um investidor qualquer sempre poderá manter parte de sua renda na carteira de mercado e a outra parte na atividade que resulte em seu custo de oportunidade *L*[12] (livre de variação).

No entanto, para que só exista uma CML, é preciso pressupor que os investidores tenham expectativas homogêneas com relação a EC e ES, que são funções de L. Portanto, o custo de oportunidade dos investidores (retorno livre de variação) também deve ser homogêneo para que exista um único conjunto de oportunidades. Esse conjunto único poderia ser assumido se todos os investidores reconhecem a taxa básica de juros de uma economia (r_f) como seu custo mínimo de oportunidade (L). As possibilidades de tratamento do custo de oportunidade serão estudadas no item (5.4) mais à frente. Até este momento, L pode ou não ser assumido como r_f. Se tal não for, isso implica que existirá uma CML para cada investidor (note que o mesmo resultado é aplicável à CML original, caso a hipótese de expectativas homogêneas não possa ser assumida).

5.3) A *Security Markets Line* (SML) Ômega

Tendo derivado a CML Ômega, a comparação de portfólios com a reta de mercado (CML) permite que se infira o retorno justo esperado (em termos de *Expected Chance*) de qualquer carteira a partir de seu nível de risco (em termos de *Expected Shortfall*), bastando para isso assumir que, caso essa carteira tenha o mesmo nível de

[12] É importante ressaltar que o custo de oportunidade L é qualquer ativo que não tenha variância, podendo até mesmo ser um ativo não negociável no mercado.

risco (ES) da carteira de mercado, deverá render exatamente o retorno (EC) da carteira de mercado. Ou seja, assume-se um único preço do risco no mercado.

Porém, caso o objetivo seja comparar ativos individuais, com o objetivo de mensurar o retorno justo desses ativos, é preciso avançar um pouco mais até a SML Ômega. Para tal, os passos seguidos por Sharpe (1964) serão replicados no enfoque Ômega.

Seja m a carteira de mercado que faz com que a CML tangencie a fronteira ótima, e i um outro ativo qualquer considerado isoladamente. Suponha um portfólio p que seja composto pela carteira de mercado m e pelo ativo i:

$$EC_P = E[Max\{\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L;\ 0\}] \tag{5.3.1}$$

$$ES_P = E[Max\{\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L;\ 0\}] \tag{5.3.2}$$

Transformando as funções máximo encontra-se:

$$EC_p = E\left[\frac{\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L + |\alpha R_i(1-\alpha) + R_m - L|}{2}\right] \tag{5.3.3}$$

$$EC_p = E\left[\frac{L - \alpha R_i - (1-\alpha)R_m + |L - \alpha R_i - (1-\alpha)R_m|}{2}\right] \tag{5.3.4}$$

Note que, no caso das equações (5.3.3) e (5.3.4), não é possível colocar α em evidência. A diferenciação deve ser feita diretamente nas equações encontradas. Os cálculos para a equação (5.3.3) são apresentados abaixo, os resultados para (5.3.4) são análogos.

$$\begin{aligned}\frac{\partial EC_P}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} E\left[\frac{\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L + |\alpha R_i(1-\alpha) + R_m - L|}{2}\right] = \\ &= E\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L + |\alpha R_i(1-\alpha) + R_m - L|}{2}\right)\right] = \\ &= E\left[\frac{(R_i - R_m) + \frac{(\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L)}{|\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L|}(R_i - R_m)}{2}\right]\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

O sinal da esperança foi intercambiado com o sinal da diferenciação pela utilização da regra de Leibnitz[13]. Para que seja possível um melhor tratamento da equação (5.3.5), o valor L foi somado e subtraído duas vezes dentro da esperança, conforme mostrado abaixo:

$$\frac{\partial EC_P}{\partial \alpha} = E\left[\frac{(R_i - L) - (R_m - L) + \frac{(\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L)}{|\alpha R_i + (1-\alpha)R_m - L|}[(R_i - L) - (R_m - L)}{2}\right] \tag{5.3.6}$$

Assim como em Sharpe (1964), neste ponto é preciso assumir que os mercados se encontram em equilíbrio. Como o ativo i está incluso, em proporções ótimas, na carteira de mercado, em um mercado em equilíbrio, o excesso de demanda por este ativo deve ser nulo, de forma que $\alpha = 0$.

[13] Casella e Berger (1990) apresentam a seguinte definição da regra de Leibnitz: Se $f(x,\theta), a(\theta) e\ b(\theta)$ são diferenciáveis com relação a θ, então:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)dx = f(b(\theta),\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}b(\theta) - f(a(\theta),\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}a(\theta) + \int_{a(\theta)}^{b(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}f(x,\theta)dx$$

Como no caso de (5.3.5) os limites da integral (esperança) não dependem do parâmetro θ, então apenas o terceiro termo da expressão acima será diferente de zero, permitindo que o sinal da integral e o sinal da diferenciação sejam intercambiados.

$$\frac{\partial EC_P}{\partial \alpha} = E\left[\frac{(R_i-L)-(R_m-L)+\frac{(R_m-L)}{|R_m-L|}[(R_i-L)-(R_m-L)]}{2}\right] \tag{5.3.7}$$

Como $\frac{(R_m-L)(R_m-L)}{|R_m-L|} = |R_m - L|$, o resultado final, para o caso do *Expected Chance*, será:

$$\frac{\partial EC_P}{\partial \alpha} = \frac{E[R_i]-L-2EC_m+E\left[\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|}\right]}{2} \tag{5.3.8}$$

Para o *Expected Shortfall* o procedimento é análogo e o resultado é apresentado na equação (5.3.9).

$$\frac{\partial ES_P}{\partial \alpha} = \frac{L-E[R_i]-2ES_m+E\left[\frac{(L-R_m)(L-R_i)}{|L-R_m|}\right]}{2} \tag{5.3.9}$$

O *trade off* entre EC e ES será então a razão entre as equações (5.3.8) e (5.3.9):

$$\frac{E[R_i]-L-2EC_m+E\left[\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|}\right]}{L-E[R_i]-2ES_m+E\left[\frac{(L-R_m)(L-R_i)}{|L-R_m|}\right]} \tag{5.3.10}$$

Tal *trade off* será sempre o mesmo para um ativo i e a carteira de mercado m. Além disso, ele mostra a inclinação do conjunto de oportunidades no ponto de tangência com a CML. Neste ponto, a inclinação da CML e a inclinação do conjunto de oportunidades são iguais:

$$\frac{E[R_i]-L-2EC_m+E\left[\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|}\right]}{L-E[R_i]-2ES_m+E\left[\frac{(L-R_m)(L-R_i)}{|L-R_m|}\right]} = \frac{EC_m}{ES_m} \tag{5.3.11}$$

Note que $\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|} = \frac{(L-R_m)(L-R_i)}{|L-R_m|}$, e que $\frac{EC_m}{ES_m} = \Omega_m$. Chamando $E\left[\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|}\right]$ de γ_i e resolvendo a equação acima para $E[R_i]$, encontra-se:

$$E[R_i] - L = \Omega_m(L - E[R_i] + \gamma_i - 2ES_m) - \gamma_i + 2EC_m$$

$$(E[R_i] - L)(1 + \Omega_m) = \Omega_m\gamma_i - 2EC_m - \gamma_i + 2EC_m$$

$$E[R_i] - L = \gamma_i\left[\frac{\Omega_m-1}{\Omega_m+1}\right] \tag{5.3.12}$$

$$\gamma_i = E\left[\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|}\right] \tag{5.3.13}$$

Para obter a equação final do OCAPM é preciso assumir que $\left[\frac{\Omega_m-1}{\Omega_m+1}\right] = \frac{EC_m-ES_m}{EC_m+ES_m}$ e deve-se mostrar que $EC_m - ES_m = E[R_m] - L$. Para fins de generalização, seja X uma variável aleatória tal que $a \leq X \leq b$, então:

$$EC_x = \int_L^b (x-L)f_X(x)dx \tag{5.3.14}$$

$$ES_x = \int_a^L (L-x)f_X(x)dx \tag{5.3.15}$$

$$EC_x - ES_x = \int_L^b (x-L)f_X(x)dx - \int_a^L (L-x)f_X(x)dx$$

$$= E[X] - L\int_L^b f_X(x)dx - L\int_a^L f_X(x)dx$$

$$= E[X] - L[F_X(b) - F_X(a)]$$

Note que $[F_X(b) - F_X(a)] = 1$, pois a expressão considera todo o domínio da distribuição de probabilidade de X, de forma que $F_X(b) = 1$ e $F_X(a) = 0$. Assim o resultado do desenvolvimento da equação (5.3.15) é:

$$EC_x - ES_x = E[X] - L \tag{5.3.16}$$

Em seguida, é preciso um tratamento algébrico em $EC_m + ES_m$, também para fins de generalização. Os cálculos abaixo são apresentados para uma variável aleatória X:

$$EC_x + ES_x = E\left[\frac{X-L+|X-L|}{2}\right] + E\left[\frac{L-X+|L-X|}{2}\right] = \frac{E[X]-L+L-E[X]+2E[|X-L|]}{2}$$

$$EC_x + ES_x = E[|X-L|] \tag{5.3.17}$$

Substituindo as equações (5.3.16) e (5.3.17) na equação (5.3.13) encontra-se a equação do OCAPM:

$$E[R_i] - L = \gamma_i\left[\frac{\Omega_m-1}{\Omega_m+1}\right] = \gamma_i\left[\frac{EC_m-ES_m}{EC_m+ES_m}\right] = \gamma_i\left[\frac{E[R_m]-L}{E[|R_m-L|]}\right] = \frac{\gamma_i}{E[|R_m-L|]}(E[R_m]-L)$$

$$E[R_i] = L + \beta_i(E[R_m] - L) \tag{5.3.18}$$

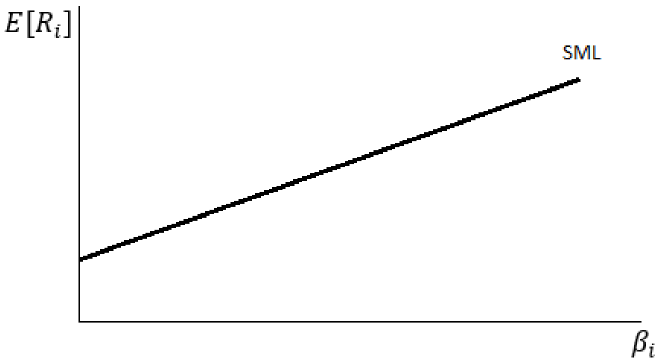
$$\beta_i = \frac{\gamma_i}{E[|R_m-L|]} = E\left[\frac{(R_m-L)(R_i-L)}{|R_m-L|}\right]\frac{1}{E[|R_m-L|]} \tag{5.3.19}$$

A equação (5.3.18) representa a forma final do Ômega CAPM, que possui interpretação semelhante ao CAPM tradicional. Assumindo a existência de expectativas homogêneas e o Teorema da Separação de Fisher, a constante, *L,* se torna a taxa livre de risco r_f. O termo $(E[R_i] - L)$ representa o preço único do risco, que é o mesmo do CAPM tradicional. A diferença entre o OCAPM e o CAPM está no termo β_i, que representa o risco do ativo i em relação ao mercado, ou seja, o risco sistêmico do ativo i. Note que o beta do OCAPM, embora tenha a mesma interpretação, é diferente do beta do CAPM, pois não se trata da razão entre uma covariância e uma variância. No OCAPM o *Beta* do mercado também é igual a um. Se um ativo auferir retornos maiores que o mercado, quando o mercado está em alta, seu *Beta* será maior do que um, se estes retornos forem menores que os do mercado, porém positivos, seu *Beta* estará entre zero e um. Ativos que variam em sentido contrário ao mercado possuem *Betas* negativos. O leitor deve ter em mente que o *Beta* do OCAPM indica co-movimentos de duas variáveis aleatória (retornos de ativos e mercado) em um mundo não gaussiano, de forma que, não é adequado compara este co-movimento a covariância ou a correlação.

Nenhuma hipótese com relação a distribuições de retornos foi feita na demonstração do OCAPM. Pelo contrário, o modelo é construído sobre a medida de performance Ômega, que tem como principal objetivo permitir qualquer tipo de distribuição. O termo β_i pode assumir tanto valores positivos quanto valores negativos – quanto mais positivos forem estes valores, maior a dependência entre o ativo i e a carteira de mercado. Assim como no CAPM tradicional, o beta do mercado no OCAPM, é igual à unidade. Complementarmente, como a distribuição normal não precisa ser assumida, a função utilidade dos decisores não precisa ser assumida como quadrática. O *Expected Shortfall*, no qual o modelo é baseado, é uma medida de risco coerente no sentido de Artzner *et. al.* (1999), como foi mostrado por Arcebi e Tasche (2002). Por último, vale a pena ressaltar que o OCAPM relaxa a hipótese de normalidade do CAPM, mantendo sua parcimônia e seu rigor teórico, de forma que não é preciso acrescentar novos fatores de risco como é feio em Kraus e Litzemberger (1976) e Fang e Lai (1997).

A figura (5.3.1) mostra a SML Ômega. Ela tem a mesma forma da SML tradicional e a única diferença está no fato do beta ser construído de forma diferente.

Figura 5.3.1: Security Markets Line Ômega



Fonte: Elaboração Própria

5.4) O Custo de Oportunidade *L*

Até este ponto, L foi tratado como o custo de oportunidade de um investidor qualquer. Porém, tal interpretação pode levar a um retorno esperado justo para cada investidor, o que seria um problema nas relações de agência. No mundo real, pode fazer sentido cada investidor aceitar um retorno esperado como justo, dado seu custo de oportunidade. Porém, para fins de generalização, tal resultado pode dificultar a interpretação do modelo, bem como testes empíricos do mesmo, pois não há nada que garanta que o retorno justo de um investidor esteja próximo do retorno esperado observado. A consequência disso é um constante desequilíbrio de mercado, pois não haverá como garantir expectativas homogêneas para os investidores: enquanto, para um investidor, um ativo i pode ser considerado barato, o mesmo ativo pode ser considerado caro para outro investidor.

Levando em conta que um investidor tenha um custo de oportunidade muito alto no mercado real (fora do mercado de capitais), isso pode fazer com que ele nunca entre no mercado de capitais, pois nenhum ativo apresentará retorno observado em um nível alto o suficiente para que este investidor considere justo. Em outras palavras, para um valor de L suficientemente grande, a SML se torna negativa (o mesmo ocorre no CAPM tradicional para uma taxa livre de risco muito elevada).

O problema do custo de oportunidade L arbitrário pode ser contornado ao preço de se restringir um pouco o modelo, assumindo que $L = r_f$ para todos os investidores, onde r_f é o ativo livre de risco no sentido do CAPM tradicional. Assumindo como válido o Teorema da Separação de Fisher, a taxa livre de risco estaria disponível na economia, tanto para empréstimos como para concessões e, assim, todos os investidores aceitariam um mesmo nível de retorno esperado justo para um ativo i, dado seu *Expected Shortfall*, uma vez que poderiam transferir seu consumo no tempo livremente a uma taxa r_f, ajustando os consumos individuais às utilidades individuais.

Um outro ponto deve ser observado: em nenhuma parte da demonstração do OCAPM faz-se necessário que L seja fixo (determinístico), embora ele tenha sido tratado como tal. Ao permitir que L varie no tempo, o nome taxa livre de risco pode perder o sentido, neste caso, a melhor interpretação seria a de taxa base da economia. A equação (5.3.1) representa o OCAPM com L estocástico.

$$E[R_i] = E[L] + \beta_i(E[R_m] - E[L]) \tag{5.4.1}$$

6) TESTES EMPÍRICOS

Tendo derivado o OCAPM, o passo seguinte seria verificar sua validade empírica, e comparar seus resultados com resultados do CAPM. A crítica de Roll (1977) sobre o CAPM também se aplica ao OCAPM, Roll mostra que um teste empírico perfeito do CAPM é impossível de ser realizado, pois mesmo se os mercados forem eficientes e o modelo for válido, ele ainda depende da eficiência do portfólio de mercado, que não pode ser mensurado.

Devido as condições de equilibro do CAPM, o portfólio de mercado se torna algo abstrato, composto por, literalmente, todos os ativos da economia, sejam eles ações, debentures, títulos, derivativos e até mesmo mão de obra. Além disso, este portfólio deve ser eficiente no sentido média-variância (ou no sentido Ômega para o OCAPM).

Como verificar a real validade do OCAPM é praticamente impossível, o objetivo do teste apresentado abaixo é responder a seguinte questão: se a estrutura do CAPM for válida, qual é a melhor especificação para o modelo, a tradicional ou aquela do OCAPM?

Para testar o OCAPM foi feito um procedimento indicado como o mais usual na literatura por Copeland e Weaston (2002). O primeiro passo consiste em obter séries mensais de retornos de ações de pelo menos cinco anos. Uma *proxy* para o portfólio de mercado é construída com as ações da amostra, em sua construção são dados pesos iguais para todas as ações. Os *betas* das ações são calculados utilizando as séries de retornos das mesmas, e a série construída do mercado. As ações são ordenadas em termos de *beta*, e são divididas em N grupos, as séries de retorno dos grupos são calculadas, bem como seus *betas*. A divisão em grupos é feita para minimizar o erro de medida na estimação dos betas individuais, uma vez que, possibilita uma maior dispersão do risco sistemático e minimiza a influência aleatória do risco não sistemático. Por último estima-se uma regressão utilizando os betas e os retornos esperados dos N portfólios, a constante obtida deve ser próxima da taxa livre de risco e o coeficiente dos *betas* deve representar o preço único do risco.

Para que o procedimento descrito acima tenha bons resultados é preciso de um banco de dados com um grande número de ações, caso contrário o número de grupos pode ser muito pequeno. No Brasil existem poucas séries de preços de ações que tenham um período de tempo consideravelmente longo, além da baixa liquidez de boa parte das ações de empresas menores que pode levar a preços distorcidos. Como o objetivo aqui é testar o OCAPM contra o CAPM, optou-se pela utilização das ações que compõem o índice americano *Sandard & Poor's* (SP500).

As séries mensais de preços das ações foram obtidas no banco de dados do *Software* Economática. O período escolhido foi de 2000 a 2012. Das 500 ações do índice foram selecionadas as 395 que possuíam dados para todo o período da análise.

Em seguida foram calculados os betas com as fórmulas utilizadas no CAPM e no OCAPM, algumas informações sobre os betas são apresentadas na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Estatísticas descritivas dos *Betas*

	Máximo	Mínimo	Média	Desvio Padrão
Beta CAPM	2.44	0.02	1	0.47
Beta OCAPM	2.73	0.07	1	0.44

Fonte: Elaboração Própria

Uma vez ranqueados em termos de *beta*, os ativos foram separados em grupos. Dois experimentos foram feitos, sendo que no primeiro deles os ativos foram separados em 33 grupos de 12 ativos cada um, a quantidade de 12 ativos foi escolhida de forma arbitrária. Para segundo experimento a separação foi feita com base no desvio padrão dos *betas*, resultando em seis grupos para o CAPM e sete grupos para o OCAPM. Após a estimação dos *betas* e retornos esperados dos grupos, foram ajustadas as regressões, a tabela 6.2 sumariza o resultados. Foram ajustados modelos com e sem constante, os modelos com constante foram os que obtiveram um menor erro quadrático médio. Os modelo sem constantes foram estimados porque a taxa livre de risco (base) mensal da economia americana é muito próxima de zero. No entanto, a situação ideal seria obter uma constante não significativa nas regressões com constante.

Tabela 6.2: Resultados das Regressões para o CAPM e OCAPM

	Regressões com Constante				Regressões sem Constante			
	capm 33	Ωcapm 33	capm 6	Ωcapm 7	capm 33	Ωcapm 33	capm 6	Ωcapm 7
Beta	0.0010* (0.217)		0.0009* (0.069)		0.0098 (0.000)		0.0078 (0.014)	
ΩBeta		0.003 (0.000)		0.0037 (0.000)		0.0104 (0.000)		0.0082 (0.000)
cons	0.0107 (0.000)	0.009 (0.000)	0.0106 (0.000)	0.0078 (0.000)				
n	33	33	6	7	33	33	6	7
R^2	0.05	0.40	0.60	0.97	0.81	0.90	0.73	0.88

→Os valores em parênteses são os P-valores das estimativas.
→Os modelos foram estimados com retornos na forma de decimais.
*Não significativo a 5%.
Fonte: Elaboração própria com auxílio do software Stata 12.

Os resultados da tabela (6.2) mostram que o OCAPM obteve um desempenho substancialmente melhor que o CAPM tradicional. Observando as regressões com constante, a estatística R^2 (coeficiente de determinação) foi maior para o OCAPM em todos os casos, além do coeficiente do preço único do risco ter se mostrado significativo, algo que não ocorreu em nenhuma das duas regressões do CAPM, a causa mais provável de tais resultados é a não normalidade das distribuições de retornos. No caso das regressões sem constante os resultados também mostram R^2 e preço único do risco maiores para o OCAPM.

Note que o preço único do risco calculado diretamente com a série mensal do mercado e a taxa livre de risco é de 0,012, que é consideravelmente superior aos obtidos nas regressões. No caso da taxa livre de risco o valor estimado foi maior do que o real, uma vez que, a taxa de juros mensal americana é praticamente zero. Esse padrão de resultados é bastante comum na literatura, se o OCAPM (CAPM) estiver correto, tais resultados se justificam pela não utilização de uma carteira ótima que contenha todos os ativos da economia.

A crítica de Roll mostra que testes estatísticos não podem dizer se o CAPM é ou não válido, mas podem oferecer algumas evidências. Os testes realizados neste trabalho mostraram que, levando em conta a crítica de Roll, se a estrutura do CAPM for válida, a especificação do OCAPM é mais precisa do que a especificação do CAPM tradicional.

É muito importante que o leitor tenha em mente que o objetivo deste trabalho não é dizer se o OCAPM e o CAPM são válidos ou não. Porém foi mostrado que o OCAPM tem algumas vantagens sobre o CAPM, provavelmente porque o OCAPM parte de pressupostos menos restritivos e utiliza uma medida de performance que representa melhor o comportamento dos indivíduos, além de levar em conta todos os momentos das distribuições de retornos dos ativos.

7) CONCLUSÃO

Neste trabalho foi derivada uma nova versão para o CAPM, o Ômega CAPM. O novo modelo utiliza como base a medida Ômega de Keating e Shadwick (2002) e, portanto, leva em conta todos os momentos das distribuições dos retornos dos ativos. No entanto não foi preciso assumir que os investidores observam tais momentos diretamente para que possam tomar suas decisões de investimento, pelo contrário, o *Expected Chance* e o *Expected Shortfall* possuem interpretações simples e bastante coerentes com o comportamento das pessoas.

O OCAPM mantém a estrutura simples e o rigor teórico do CAPM, todas as novas informações foram incorporadas no *Beta*, não foi preciso utilizar outros fatores de risco como co-assimetria e co-curtose.

O custo de oportunidade, *L*, do OCAPM pode ser interpretado tanto como uma taxa livre de risco quanto como um ativo base da economia que possui retornos variantes no tempo.

Um breve teste empírico foi realizado para comparar os dois modelos, os resultados foram bastante favoráveis ao OCAPM. Porém tais resultados não invalidam o CAPM e nem validam o OCAPM, uma vez que, como é argumentado por Roll em sua crítica ao CAPM, existem sérias complicações na realização de testes empíricos do modelo.

De toda forma, os resultados aqui apresentados podem ser levados em conta como uma forte evidência a favor do OCAPM. Consequentemente, a conclusão deste trabalho é de que é mais plausível que as pessoas se comportem levando em conta o ganho esperado caso haja ganho (EC) e a perda esperada caso haja perda (ES) do que a média e a variância.

Para trabalhos futuros o OCAPM e o CAPM podem ser comparados utilizando outras técnicas, como simulações, outras formas de estimação e outros bancos de dados. Uma tarefa mais difícil é a estimação de uma carteira de mercado que se aproxime razoavelmente da carteira teórica dos modelos.

8) REFERÊNCIAS

ACERBI, Carlo; TASCHE, Dirk. On the coherence of expected shortfall. **Journal of Banking & Finance**, v. 26, n. 7, p. 1487-1503, 2002.

ARTZNER, Philippe et al. Coherent measures of risk. **Mathematical finance**, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.

BANZ, Rolf W. The relationship between return and market value of common stocks. **Journal of financial economics**, v. 9, n. 1, p. 3-18, 1981.

BASU, Sanjoy. Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios: A test of the efficient market hypothesis. **The Journal of Finance**, v. 32, n. 3, p. 663-682, 1977.

BERTRAND, Philippe; PRIGENT, Jean-luc. Omega performance measure and portfolio insurance. **Journal of Banking & Finance**, v. 35, n. 7, p. 1811-1823, 2011.

BLACK, Fischer. Capital market equilibrium with restricted borrowing. **The Journal of Business**, v. 45, n. 3, p. 444-455, 1972.

BLUME, Marshall E.; FRIEND, Irwin. A new look at the capital asset pricing model. **The journal of finance**, v. 28, n. 1, p. 19-34, 1973.

BOWER, Dorothy H.; BOWER, Richard S.; LOGUE, Dennis E. Arbitrage pricing theory and utility stock returns. **The Journal of Finance**, v. 39, n. 4, p. 1041-1054, 1984.

CASELLA, George; BERGER, Roger L. **Statistical inference**. Belmont, CA: Duxbury Press, 1990.

CASTRO, J. G. **Otimização da Performance de um Portfólio de Ativos e Opções Reais utilizando a Medida Omega**. 2008. Tese de Doutorado. Tese de Doutorado, DEI, PUC-Rio, 2008.

CHEN, NAI-FU. Some empirical tests of the theory of arbitrage pricing. **The Journal of Finance**, v. 38, n. 5, p. 1393-1414, 1983.

CHUNHACHINDA, Pornchai et al. Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. **Journal of Banking & Finance**, v. 21, n. 2, p. 143-167, 1997.

COPELAND, Thomas E.; WESTON J. Fred. Financial theory and corporate policy. 2002.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The cross-section of expected stock returns. **the Journal of Finance**, v. 47, n. 2, p. 427-465, 1992.

FAMA, Eugene F.; MACBETH, James D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. **The Journal of Political Economy**, p. 607-636, 1973.

FANG, Hsing; LAI, Tsong-Yue. Co-kurtosis and Capital Asset Pricing.**Financial Review**, v. 32, n. 2, p. 293-307, 1997.

FAVRE-BULLE, Alexandre; PACHE, Sébastien. The omega measure: Hedge fund portfolio optimization. **Available at SSRN 365740**, 2003.

FRIEND, Irwin; BLUME, Marshall. Measurement of portfolio performance under uncertainty. **The American Economic Review**, v. 60, n. 4, p. 561-575, 1970.

HARVEY, Campbell R.; SIDDIQUE, Akhtar. Conditional skewness in asset pricing tests. **The Journal of Finance**, v. 55, n. 3, p. 1263-1295, 2000.

JENSEN, Michael; BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron S. The capital asset pricing model: Some empirical tests. 1972.

KAZEMI, Hossein; SCHNEEWEIS, Thomas; GUPTA, Bhaswar. Omega as a performance measure. **JOURNAL OF PERFORMANCE MEASUREMENT.**, v. 8, p. 16-25, 2004.

KEATING, Con; SHADWICK, William F. A universal performance measure.**Journal of performance measurement**, v. 6, n. 3, p. 59-84, 2002.

KEIM, Donald B. Dividend yields and stock returns: Implications of abnormal January returns. **Journal of Financial Economics**, v. 14, n. 3, p. 473-489, 1985.

KEIM, Donald B. Size-related anomalies and stock return seasonality: Further empirical evidence. **Journal of Financial Economics**, v. 12, n. 1, p. 13-32, 1983.

KRAUS, Alan; LITZENBERGER, Robert H. SKEWNESS PREFERENCE AND THE VALUATION OF RISK ASSETS*. **The Journal of Finance**, v. 31, n. 4, p. 1085-1100, 1976.

LINTNER, John. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **The review of economics and statistics**, v. 47, n. 1, p. 13-37, 1965.

LITZENBERGER, Robert H.; RAMASWAMY, Krishna. The effect of personal taxes and dividends on capital asset prices: Theory and empirical evidence.**Journal of financial economics**, v. 7, n. 2, p. 163-195, 1979.

LUCAS JR, Robert E. Asset prices in an exchange economy.**Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 1429-1445, 1978.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection*. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MAS-COLELL, Andreu et al. **Microeconomic theory**. New York: Oxford university press, 1995.

MERTON, Robert C. An intertemporal capital asset pricing model.**Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 867-887, 1973.

MOSSIN, Jan. Equilibrium in a capital asset market. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 768-783, 1966.

PASSOW, Alexander. **Omega portfolio construction with Johnson distributions**. International Center for Financial Asset Management and Engineering, 2004.

PEIRO, Amado. Skewness in financial returns. **Journal of Banking & Finance**, v. 23, n. 6, p. 847-862, 1999.

ROLL, Richard. A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory. **Journal of financial economics**, v. 4, n. 2, p. 129-176, 1977.

ROLL, Richard; ROSS, Stephen A. An empirical investigation of the arbitrage pricing theory. **The Journal of Finance**, v. 35, n. 5, p. 1073-1103, 1980.

ROSS, Stephen A. THE CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM), SHORT-SALE RESTRICTIONS AND RELATED ISSUES. **The Journal of Finance**, v. 32, n. 1, p. 177-183, 1977.

SHARPE, William F. CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK*. **The journal of finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SMITH, Daniel R. Conditional coskewness and asset pricing. **Journal of Empirical Finance**, v. 14, n. 1, p. 91-119, 2007.