

Evidências de *Bull e Bear Market* no índice Bovespa: Uma aplicação de modelos de regime markoviano e *duration dependence*

Fernando Henrique de Paula e Silva Mendes*
Guilherme Valle Moura†

Resumo

O objetivo deste trabalho é identificar tendências de alta e de baixa no índice Bovespa através de modelos de mudança de regime markoviano que incorporam dependência de duração. Conforme evidenciado pela literatura, os resultados mostraram um regime de retorno positivo e baixa volatilidade e outro com alta volatilidade e retorno negativo. Nestes modelos a probabilidade de transição não é só função do regime atual como também do número de períodos em que o processo se encontra em determinado estado. A parametrização proposta revelou que a probabilidade de troca de regime diminui com a persistência do mercado de alta e de baixa. A análise das probabilidades suavizadas destaca que as especificações captaram os principais episódios de instabilidade na bolsa brasileira. Por fim, os modelos propostos são usados na construção de uma estratégia de investimento.

Palavras-Chave: Dependência de Duração, Mudança Markoviana, Volatilidade

Abstract

This study proposes to identify Bull and Bear Market for the Brazilian stock market using a markov switching model that incorporates duration dependence. Following the existing literature, the model sorts returns into a high return stable state and a low return volatile state, which are labeled as Bull and Bear Market. In these models the transition probabilities are functions of both the inferred current state and also the number of periods that the process has been in that state. The parameterization showed that the probability of switching out of the states declines with duration in that state. The smoothed probabilities highlighted the major instabilities phases at Brazilian stock market. Finally, the proposed models are used in order to develop an investment strategy.

Key-Words: Duration Dependence, Markov Switching, Volatility

JEL: C22, G17

Anpec: Área 8 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

*Programa de Pós-Graduação em Economia, UFSC. Email: fernandohpsm@hotmail.com

†PPGE, UFSC. Email: guilherme.moura@cse.ufsc.br

1 Introdução

Nas últimas décadas, diversos trabalhos na área de finanças empíricas vêm documentando algumas peculiaridades dos retornos financeiros. Os principais fatos estilizados desses retornos são: observações atípicas, agrupamento de volatilidade e distribuições com caudas pesadas, que em geral são assimétricas (Campbell et al. 1997). Em contrapartida, pouca atenção tem sido dada às tendências em que esses ativos se mantêm valorizados (desvalorizados)..

Os termos, *Bull Market* e *Bear Market*, mercado de alta e mercado de baixa, respectivamente, há décadas descrevem tendências ascendentes e descendentes nas cotações das ações. Segundo Harris (2003), a expressão *Bull Market* advém do movimento que o touro faz quando ataca - de baixo para cima, *Bear Market* assemelha-se ao ataque do urso - de cima para baixo.

Apesar da conotação folclórica trazida aqui não há uma definição formal quanto o uso desses termos na literatura. Um investidor que possa prever antecipadamente um mercado de alta ou de baixa pode evitar perdas inesperadas ou até mesmo aferir lucros. Para as empresas, é preferível emitir ações em um mercado de alta, isso devido à baixa captação de recursos em momentos de pessimismo (Kole & Dijk 2012).

Identificar mercado de alta (baixa) não interessa apenas às estratégias de investimento ou a avaliação de risco entre os agentes econômicos. Para Stock & Watson (2006) a cotação acionária não deixa de ser uma indicativa sobre o ambiente econômico, uma vez que elas antecipam futuros dividendos¹. O conhecimento destes estados pode ajudar na predição de ciclos (Chauvet 1999) e na formulação de política econômica (Rigobon & Sack 2003).

Os métodos tradicionais na avaliação de *Bull e Bear Market* remontam aos trabalhos de Pagan & Sossounov (2003) e Lunde & Timmermann (2004). A metodologia explorada por estes autores busca determinar pontos extremos nos dados e em seguida aplica regras que caracterizam esses “picos” e “depressões” como possíveis pontos de reversão (*turning points*) entre períodos ascendentes e descendentes. Para tanto, os trabalhos se baseiam na metodologia proposta por Bry & Boschan (1971), usada na delimitação de recessões e expansões econômicas.

Em contraste com o seu vasto uso, a metodologia acima apresenta algumas limitações. O uso de um algoritmo *ex-post* indentifica pontos de reversão várias observações após as suas ocorrências. Porém, na maioria das vezes, os investidores estão interessados em estimar a probabilidade desses momentos no futuro. Por exemplo, montar uma estratégia de investimento levando em conta a chance do mercado estar em um *Bear Market* na próxima semana?

Paralelamente a abordagem apresentada, o emprego de modelos de mudança de regime ganhou bastante destaque na literatura. Um grande atrativo dessa metodologia é fazer inferências quanto à probabilidade de permanência no regime não observado. Neste contexto, o trabalho de Hamilton (1989) foi fundamental para o desenvolvimento do tema. O autor mostrou que o PIB norte americano podia ser modelado como um processo que possui dois estados, um no qual a economia encontra-se em expansão e outra em que a economia está em um processo recessivo. Neste modelo a mudança de estado se dá através de uma cadeia de markov de primeira ordem, a estimação é realizada pelo método da máxima verossimilhança. O trabalho tentou com isto caracterizar os ciclos econômicos pelos quais a economia americana passou.

Nos últimos anos diversos trabalhos buscaram estender a metodologia de Hamilton. Por

¹Para mais informações ver Estrella & Mishkin (1998), Stock & Watson (2003), Marcellino (2006) entre outros.

exemplo, [Cai \(1994\)](#) e [Hamilton & Susmel \(1994\)](#) não só abrangem a metodologia acima como também generalizam os trabalhos de [Engle \(1982\)](#) e [Bollerslev \(1986\)](#) ao incorporar mudança de regime na estrutura da variância dos dados. Já [Durland & McCurdy \(1994\)](#) buscam explorar o papel da dependência cíclica dos dados. A modelagem proposta pelos autores condiz com o fato de que a dinâmica de mudança dos regimes é governada não só pelo regime atual como também pelo número de períodos em que o processo se encontra em determinado estado. Diferentemente de [Hamilton \(1989\)](#), o artigo dinamiza a matriz de transição de probabilidade até então considerada estática e introduz o conceito dependência de duração (*duration dependence*).

Devido à característica cíclica do mercado de ações, um trabalho pioneiro na tentativa de identificar mercado de alta e de baixa é o de [Maheu & McCurdy \(2000\)](#). Através de diversos modelos da classe, *Duration Dependent Markov Switching Models* (DDMS), os autores encontram evidências de não linearidade dos retornos mensais das ações da bolsa de Nova York. O artigo estende a metodologia de [Durland & McCurdy \(1994\)](#) ao modelar a volatilidade e exploram modelos em que a duração do regime é vista como uma variável dependente tanto na média como na variância do processo. Os resultados obtidos pelos autores destacam que períodos de retorno positivo, *Bull Market*, corresponderam a menor volatilidade do que em períodos de retorno negativo, *Bear Market*.

A ideia do *duration dependence* é retratar a dependência na cotação acionária. Por exemplo, a persistência de um estado ascendente, *Bull Market*, torna os investidores otimistas em relação ao futuro, atraindo mais investimento para um determinado ativo. Consequentemente essa resposta positiva faz com que a probabilidade de troca de regime varie no tempo. Essa mesma análise é vista na baixa, *Bear Market*, devido o pessimismo dos investidores. Após o trabalho de [Maheu & McCurdy \(2000\)](#) uma vasta literatura foi desenvolvida no âmbito *Bull e Bear Market*², porém, nenhum trabalho que usa dependência de duração foi feito para o mercado brasileiro.

O objetivo deste trabalho é identificar períodos de *Bull e Bear Market* no índice Bovespa utilizando modelos econométricos da classe DDMS - *Duration Dependence Markov Switching Models*. Adicionalmente, as especificações usadas serão usadas para construir uma estratégia de investimento para o índice Bovespa. As rentabilidades obtidas serão comparadas com o *buy and hold*, isto é comprar um ativo e vendê-lo no final do período.

O artigo está organizado da seguinte maneira, a presente introdução, a seção 2 explora o conceito *duration dependence* e os modelos da classe DDMS. Na seção 3 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e a análise dos pontos de reversão. Na penúltima seção é elaborada uma estratégia de investimento e na seção final a conclusão

²Para mais informações ver [Chena & Shen \(2007\)](#), [Castro \(2011\)](#), [Shibata \(2011\)](#) entre outros.

2 Mudança de Regime e Dependência de Duração

2.1 Duration Dependence

A metodologia do trabalho caracteriza *Bull* e *Bear Market* através da variável de estado $S_t = i$, em que, $i = 0, 1$, onde $t = 1, \dots, T$ ³. Diferentemente dos modelos tradicionais de mudança de regime, a idéia do *duration dependence* é capturar da dependência temporal da variável de estado. Neste contexto, busca-se dinamizar a matriz de probabilidade de transição entre os estados através da variável $D(S_t)$. Esta variável retrata a memória na ocorrência consecutiva do estado S_t e pode ser definida pela equação abaixo:

$$D(S_t) = \min(D(S_{t-1})I(S_t, S_{t-1}) + 1, \tau). \quad (1)$$

A função indicadora $I(S_t, S_{t-1})$ é 1 caso $S_t = S_{t-1}$ e 0 no contrário. Nota-se que um parâmetro limite τ é estabelecido na equação. O valor da estimativa do parâmetro é um número discreto e será estabelecido através da estimação de verossimilhança⁴.

Segundo [Maheu & McCurdy \(2000\)](#), uma maneira de parametrizar as probabilidades de transição é através do emprego de uma função logística. Isso garante que as probabilidades estejam entre 0 e 1. Usando i e d para indexar a realização de estados e duração, a probabilidade de transição para $i = 0, 1$ e para os parâmetros $\gamma_1(i)$ e $\gamma_2(i)$ é dada por:

$$P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = \begin{cases} \frac{\exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)d)}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)d)}, & d \leq \tau \\ \frac{\exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)\tau)}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)\tau)}, & d > \tau \end{cases} \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

Conforme proposto por [Durland & McCurdy \(1994\)](#), o efeito duração permite que a matriz de transição de probabilidade varie no tempo até atingir τ . Uma maneira útil de discutir estes efeitos é através de uma função de troca de estado. Essa função é a probabilidade condicional de mudança de estado assumindo a memória d . Em termos de transição de probabilidade, a função troca de estado é dada por:

$$1 - P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = \frac{1}{1 + \exp(\gamma_1(i) + \gamma_2(i)d)}, \quad i = 0, 1. \quad (3)$$

uma função decrescente refere-se a um efeito negativo na dependência de duração enquanto uma função crescente refere-se a um efeito positivo. A análise acima pode ser resumida pelo valor do parâmetro: $\gamma_2(i)$. Por exemplo, $\gamma_2(i) < 0$ significa dependência positiva, $\gamma_2(i) = 0$, denota dependência nula e $\gamma_2(i) > 0$ significa duração negativa. É interessante destacar que, caso a dependência seja nula, $\gamma_2(i) = 0$, a parametrização acima, colapsa no processo de Markov de primeira ordem, tal como: $P(S_t = i | S_{t-1} = i, D(S_{t-1}) = d) = P(S_t = i | S_{t-1} = i)$, ou seja, apenas dependerá do valor passado mais recente da variável de estado.

³ T é o tamanho da amostra

⁴ Para maior detalhamento ver a seção sobre estimação

2.2 Modelos DDMS

Devido ao fato de que a maioria das séries financeiras apresentam heterocedasticidade condicional, o principal modelo desta deste trabalho é aquele em que a volatilidade é incorporada na dependência de duração, *Duration-Dependent Markov Switching Autoregressive Heteroskedasticity*, (DDMS-ARCH). Neste modelo o retorno segue um processo auto-regressivo com mudança de regime, tal como:

$$R_t = \mu(S_t) + \phi_1 \{R_{t-1} - \mu(S_{t-1})\} + \phi_2 \{R_{t-2} - \mu(S_{t-2})\} + \dots + \phi_P \{R_{t-P} - \mu(S_{t-P})\} + \varepsilon_t. \quad (4)$$

sendo ϕ_1, \dots, ϕ_P os parâmetros, P o número de defasagens, e ε_t um termo de erro no período t . $\mu(S_t)$ é visto como uma variável de estado S_t :

$$\mu(S_t) = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t, \quad (5)$$

em que μ_0 e μ_1 são parâmetros. Se $S_t = 0$, temos $\mu(S_t) = \mu_0$, caso $S_t = 1$, segue $\mu(S_t) = \mu_1$.

O termo de erro ε_t da equação (4) é expresso por:

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t, \quad (6)$$

tal que v_t é uma variável independente e identicamente distribuída de acordo com uma distribuição normal padrão e h_t dado por:

$$h_t = m_{st} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \tilde{\varepsilon}_{t-k}^2, \quad (7)$$

na qual K denota o número de defasagens, e $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ são os parâmetros. A diferença entre este modelo e um modelo ARCH padrão com K parâmetros é que o modelo acima depende de uma variável de estado m_{st} . Desta forma, se $S_t = 0$, temos $m_{st} = m_0$, no entanto, se $S_t = 1$, segue que $m_{st} = m_1$, os parâmetros m_0 e m_1 vão ser estimados.

Na equação (7), $\tilde{\varepsilon}_{t-k}$ é o erro de previsão dado por:

$$\tilde{\varepsilon}_{t-k} = R_{t-k} - E_{t-k-1}[R_{t-k}], \quad (8)$$

em que $E_{t-k-1}[R_{t-k}]$ é o valor esperado de R_{t-k} dado o conjunto de informação $\Omega_{t-k-1} = \{R_1, R_2, \dots, R_{t-k-1}\}$, tal como:

$$E_{t-k-1}[R_{t-k}] = \sum_{S_{t-k}, S_{t-k-1}, \dots, S_{t-k-P}, d} E[R_{t-k} | S_{t-k}, S_{t-k-1}, \dots, S_{t-k-P}, d, \Omega_{t-k-1}] \times P[S_{t-k}, S_{t-k-1}, \dots, S_{t-k-P}, d | \Omega_{t-k-1}]. \quad (9)$$

A fim de comparar as estimativas deste modelo, serão estimados mais dois modelos da classe

DDMS também encontrados em [Maheu & McCurdy \(2000\)](#): O primeiro deles é o DDMS-1:

$$R_t = \mu(S_t) + \phi_1 \{R_{t-1} - \mu(S_{t-1})\} + \phi_2 \{R_{t-2} - \mu(S_{t-2})\} + \dots + \phi_P \{R_{t-P} - \mu(S_{t-P})\} + \sigma v_t. \quad (10)$$

onde σ é um parâmetro a ser estimado. A mudança de regime ocorre apenas na média incondicional do processo. Já o segundo é o DDMS-2:

$$R_t = \mu(S_t) + \phi_1 \{R_{t-1} - \mu(S_{t-1})\} + \phi_2 \{R_{t-2} - \mu(S_{t-2})\} + \dots + \phi_P \{R_{t-P} - \mu(S_{t-P})\} + \sigma(S_t)v_t. \quad (11)$$

neste, tanto a média como a variância incondicional mudam de regime, ou seja, *Bull* e *Bear Market*, $\mu(S_t) = \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t$, e $\sigma(S_t) = \sigma_0(1 - S_t) + \sigma_1 S_t$. Em ambos os modelos $v_t \sim NID(0, 1)$ e $S_t = 0, 1$.

2.3 Estimação

Os modelos da classe DDMS foram estimados usando o método da máxima verossimilhança. Para mais detalhes ver os apêndices de [Maheu & McCurdy \(2000\)](#) e [Hamilton \(1994\)](#).

Estes modelos podem ser entendidos como uma extensão do modelo de Mudança de Regime Markoviano de Hamilton (1989). A expressão 2^{P+1} denota as possíveis combinações de dependência de R_t em S_t , e seus valores defasados S_{t-1}, \dots, S_{t-P} , através de $\mu(S_t), \dots, \mu(S_{t-P})$, sendo que cada estado S_t, \dots, S_{t-P} assume valor 0 ou 1.

Já a expressão $2(\tau - P - 1)$ é a soma das combinações de dependência R_t , em que $\tau > P$, ou seja, a estrutura de duração é maior que a defasagem P . Sendo assim, devemos considerar a combinação de estados $S_{t-P-1}, \dots, S_{t-P-\tau}$ que não são observados pela especificação do modelo.

Por exemplo: uma possibilidade seria todas as variáveis de estados do modelo $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-P}$ sejam iguais a um e $D(S_t) = P + 2$. Outra combinação tornariam os mesmos estados $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-P}$ iguais a um, porém, $D(S_t) = P + 3$, assim sucessivamente, ou seja, a soma destas combinações seria $\tau - P - 1$. A mesma ideia é vista no caso em que $S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-P}$ são iguais a zero.

Seja N o número total de estados, temos: $N = 2^{P+1} + 2(\tau - P - 1)$. Cada estado será representado tal como: $\psi_t = j, j = 1, \dots, N$.

Tomando ξ_t como um vetor aleatório de dimensão $(N \times 1)$ segue:

$$\xi_t = \begin{cases} (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)' & \text{quando } \psi_t = 1, \\ (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)' & \text{quando } \psi_t = 2, \\ (0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0)' & \text{quando } \psi_t = 3, \\ \vdots & \\ (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1)' & \text{quando } \psi_t = N. \end{cases} \quad (12)$$

$\hat{\xi}_{t|t-1}$ é um vetor em que o j -ésimo elemento é $P(\psi_t = j | R_{t-1}, \dots, R_1, \theta)$, tal que θ representa os parâmetros e $P(\psi_t = j | \cdot)$ é a probabilidade de predição do estado j condicionado em (\cdot) . Já

$\hat{\xi}_{t|t}$ é um vetor em que o j elemento é dado por $P(\psi_t = j | R_t, \dots, R_1, \theta)$, ou seja, a probabilidade filtrada.

Seja η_t um vetor em que o j -ésimo elemento é a densidade condicional de R_t , temos:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f(R_t | \psi_t = 1, R_{t-1}, \dots, R_1, \theta) \\ f(R_t | \psi_t = 2, R_{t-1}, \dots, R_1, \theta) \\ \vdots \\ f(R_t | \psi_t = N, R_{t-1}, \dots, R_1, \theta) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Assume-se que P é a matriz de transição de probabilidade de ψ_t , tal que:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{N1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde $p_{jab} = P(\psi_t = j_b | \psi_{t-1} = j_a)$, $j_a, j_b = 1, \dots, N$.

A probabilidade filtrada $\hat{\xi}_{t|t}$ para $t = 1, \dots, T$ pode ser obtido através do seguinte par de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t}{1'(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)} &= \hat{\xi}_{t|t} \\ \hat{\xi}_{t+1|t} &= P\hat{\xi}_{t|t}. \end{aligned} \quad (15)$$

A iteração da equação (15) começa em $t = P + K + 1$ dado R_1, \dots, R_{P+K} , em que \odot significa multiplicação elemento por elemento entre os vetores⁵. Nota-se que para inicializar as equações acima, o valor inicial $\hat{\xi}_{P+K+1|P+K}$ é a probabilidade incondicional. Neste caso estamos considerando que a cadeia de markov seja estacionaria e ergótica⁶.

Por fim, a função de log verossimilhança é dada pela expressão:

$$\mathbb{L}(\theta) = \sum_{t=P+K+1}^T \ln f(R_t | R_{t-1}, \dots, R_1, \theta), \quad (16)$$

onde o termo do lado esquerdo é visto por: $f(R_t | R_{t-1}, \dots, R_1, \theta) = 1'(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)$. As especificações DDMS-1 e DDMS-2 também foram estimados da mesma forma que o modelos DDMS-ARCH.

⁵ $R_{t-k-1}, \dots, R_{t-k-P}$ é necessário para construir $\tilde{\xi}_{t-k}$ (termo que aparece do lado direito da equação $h_t = m_{st} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \tilde{\xi}_{t-k}^2$). Já h_t precisa de $R_{t-k-1}, \dots, R_{t-k-P}$, pois dado R_1, \dots, R_{P+K} , o modelo é estimado para $t = P + K + 1, \dots, T$.

⁶Para mais detalhes ver [Hamilton \(1994\)](#).

3 Resultados

3.1 Dados

A série de dados utilizada no artigo é o log-retorno⁷ do índice Bovespa com periodicidade semanal. O período de análise inicia-se em julho de 1994 até final de 2012, totalizando 966 observações. A fim de comparar os resultados dos modelos não-lineares desenvolvidos neste trabalho, foi estimado por OLS um modelo linear AR (2), o número de defasagens foi estabelecido segundo o critério BIC.

A existência de alguma dependência não-linear que não foi avaliada pelo modelo autoregressivo é retratada ao aplicar o teste BDS⁸ sobre os resíduos da regressão. A hipótese nula é que o modelo linear é suficiente para captar a estrutura de dependência existente na média versus a hipótese alternativa que retrata alguma estrutura não linear ainda presente no resíduo do modelo. Os resultados mostram que o modelo linear não é suficiente para modelar a estrutura da média, fato que implica a necessidade de testar modelos não lineares.

Outra evidência para o emprego de modelos não lineares é visto ao analisar as estimativas da Tabela 1. Nota-se que a curtose do retorno do Ibovespa é maior que o valor da distribuição normal, e a sua assimetria é negativa, ou seja, retornos negativos tendem a ocorrer com mais frequência. A não normalidade da série é mostrada no teste Jarque Bera, que rejeita a hipótese nula de retornos normais, revelando novamente a possibilidade do uso de modelos não lineares.

Table 1: Retorno do Ibovespa

Média	0.2762
Desvio-Padrão	4.6874
Assimetria	-0.5622
Curtose	6.0715
Jarque-Bera	427.9487
P-Valor	0.0000

⁷A série do índice Bovespa, P_t , foi convertida em termos de log-retorno $R_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$, onde a primeira observação é dada por R_2 .

⁸Para mais informações ver Brock et al. (1987).

3.2 Diagnóstico dos Resíduos

Devido a variável latente S_t , os resíduos dos modelos com mudança de regime não são observados. Usando a equação (17), o teste Ljung-Box Portmanteau pode ser aplicado através dos resíduos ponderados para testar a adequação dos modelos. Seguindo [Maheu & McCurdy \(2000\)](#), o resíduo normalizado do modelo DDMS-ARCH é dado por:

$$\sum_{S_t, \dots, S_{t-p}, d} \frac{R_t - E[R_t | S_t, \dots, S_{t-p}, d, R_{t-1}, \dots, R_1]}{\sqrt{h_t(S_t)}} \times P(S_t, \dots, S_{t-p}, d | R_{t-1}, \dots, R_1), \quad (17)$$

em que o desvio padrão condicional é dado por $\sqrt{h_t(S_t)}$, tal que:

$$h_t(S_t) = \sum_{S_t, \dots, S_{t-p}, d} h_t(S_t) P(S_t, \dots, S_{t-p}, d | Y_T), \quad (18)$$

o último termo a direita da equação acima é a probabilidade suavizada⁹. Para os modelos DDMS-1 e DDMS-2, $\sqrt{h_t(S_t)}$ na equação (17) é substituído por σ e $\sigma(S_t)$, respectivamente.

A estatística Ljung-Box para a autocorrelação dos resíduos ponderados com defasagem h é dado por:

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^j \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}, \quad (19)$$

onde $\hat{\rho}_j, j = 1, 2, \dots, h$ é a autocorrelação e n é o tamanho da amostra dos resíduos.

3.3 Parâmetros estimados

As estimativas, o desvio padrão e log-verossimilhança dos modelos da classe DDMS estão apresentados na Tabela 2. Adicionalmente um modelo ARCH (5) é apresentado frente o modelo DDMS-ARCH. A defasagem da estrutura da variância foi estabelecida segundo o critério BIC.

É importante destacar que o teste da razão da verossimilhança não é aplicado entre os modelos DDMS-1 e AR(2), e DDMS-ARCH versus ARCH, isso porque os modelos não são aninhados¹⁰, porém, nota-se que o valor da verossimilhança entre os mesmos, indica o uso dos modelos da classe DDMS.

Uma característica geral dos modelos apresentados é que as estimativas tanto da média como da variância condicional (incondicional) foram estatisticamente significantes e diferentes de zero, ou seja, temos um período de retorno positivo e baixa volatilidade versus um regime em que a volatilidade é alta e retorno negativo.

⁹Para mais detalhes ver próxima seção.

¹⁰Para mais detalhes ver [Hamilton \(1994\)](#).

Table 2: Resultado das Estimativas

Parâmetros	AR(2)	ARCH	DDMS-1	DDMS-2	DDMS-ARCH
μ_0, μ	0.2840** (0.1536)	0.3821*** (0.1292)	-12.9729*** (1.0979)	-1.0011* (0.7397)	-3.0295** (1.4171)
μ_1			0.6863*** (0.1355)	0.5411*** (0.1311)	0.4938*** (0.1232)
m, σ	4.6529*** (0.1060)	7.8386*** (0.9455)	4.0272*** (0.0981)		
m_0, σ_0				8.3769*** (0.6376)	63.3478*** (15.2916)
m_1, σ_1				3.4143*** (0.1150)	7.6925*** (1.0970)
$\gamma_1(0)$			-1.3350* (0.9590)	-1.0433* (0.8485)	-0.9601 (0.8668)
$\gamma_1(1)$			0.7290 (0.6638)	-0.8776 (0.9233)	0.4637 (1.8890)
$\gamma_2(0)$			0.2229 (0.5444)	0.6111*** (0.2192)	0.4952** (0.2176)
$\gamma_2(1)$			0.5861*** (0.1374)	0.8275*** (0.2135)	0.4755* (0.3543)
ϕ_1	-0.0558** (0.0321)	-0.0924*** (0.0241)	-0.0869** (0.0380)	-0.0741*** (0.0316)	-0.0807*** (0.0317)
ϕ_2	0.0800*** (0.0321)	0.1057*** (0.0276)	0.0781** (0.0385)	0.0711** (0.0322)	0.0657** (0.0306)
α_1		0.1181*** (0.0291)			0.0000 (0.0000)
α_2		0.0595* (0.0334)			0.0000 (0.0000)
α_3		0.1836*** (0.0451)			0.1101*** (0.0435)
α_4		0.2208*** (0.0401)			0.1091*** (0.0427)
α_5		0.0913** (0.0379)			0.1200** (0.0460)
τ			6	6	7
$\ln L$	-2850.0	-2760.5	-2794.8	-2747.4	-2718.6

***, **, * significância em 1%, 5% e 10% respectivamente. Desvio padrão está em parênteses.

$\ln L$ é o valor da log verossimilhança.

A estatística Ljung-Box dos modelos acima é visto na Tabela 3. Segundo o p-valor, nota-se que o modelo mais parcimonioso DDMS-1, apresentou significativa persistência para os seus resíduos, como também evidências de efeito ARCH. Diferente do resultado acima, o modelo DDMS-2 superou a autocorrelação na estrutura a média condicional, porém, para os resíduos ao quadrado esse resultado não pode se assegurar.

Para o modelo DDMS-ARCH, a hipótese de ausência de autocorrelação não pode ser rejeitada tanto para o resíduo, quanto para o resíduo quadrado. A duas séries são ruídos brancos, sugerindo que o modelo teve um ajustamento melhor frente os dados.

Table 3: Teste de Especificação

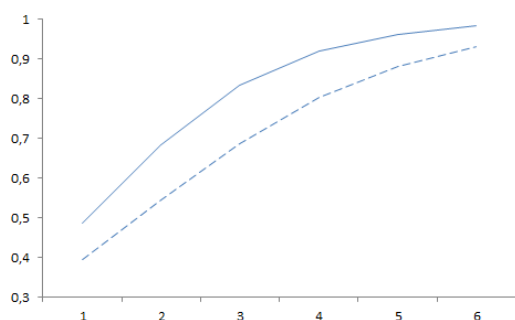
Teste	ARCH	DDMS-1	DDMS-2	DDMS-ARCH
$Q(8)$	6.013 (0.646)	38.389*** (0.000)	5.444 (0.709)	4.326 (0.827)
$Q^2(8)$	12.209 (0.142)	182.041*** (0.000)	17.440** (0.025)	10.403 (0.238)

Parênteses são os p -valores.

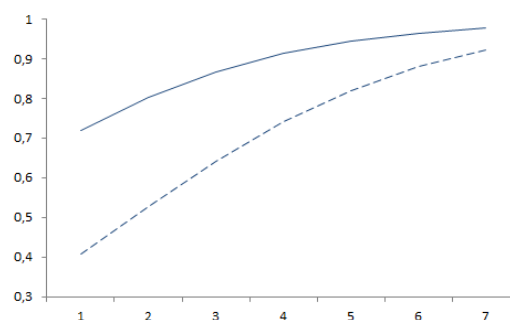
***, **, * significância de rejeitar a hipótese nula de não autocorrelação a 1%, 5% e 10%.

Ao analisar novamente a Tabela 2, nota-se que o coeficiente de volatilidade no *Bear Market*, m_0 , é muito maior que no período de *Bull Market*, m_1 , ou seja, 63.3478 e 7.6925 respectivamente. Além disso, a soma dos coeficientes na estrutura da variância é estacionária. Os parâmetros da equação da média ϕ_1 e ϕ_2 são significativos e mostra alternância de sinal, resultado condizente com o modelo ARCH sem mudança de regime ¹¹.

As estimativas dos parâmetros $\gamma_2(0)$ e $\gamma_2(1)$ para os modelos DDMS-2 e DDMS-ARCH, mostram uma função de troca de estado decrescente, desta forma, a probabilidade do ativo permanecer nos regimes de *Bear* e *Bull Market* aumenta.



(a) Prob. de duração em semanas - DDMS2



(b) Prob. de duração em semanas - DDMS-ARCH

¹¹Para estimar os parâmetros do modelo DDMS-ARCH foi necessário restringir os parâmetros para maximizar a função verossimilhança. Foi empregado o método Delta para aproximar a matriz de covariância dos parâmetros Kim & Nelson (1999).

A figura (a) mostra o resultado para o modelo DDMS-2. A probabilidade do *Bear Market* (linha pontilhada) é 0.39 quando $d = 1$ e 0.48 no *Bull Market* (linha contínua). A probabilidade de mudança de regime, ou seja, *Bull* para o *Bear* ou *Bear* para o *Bull* é maior. Uma vez $d > \tau$ a probabilidade de ficar no mercado de baixa e alta são 0.93 e 0.98 respectivamente. Neste modelo τ foi 6 ¹². Da mesma forma, a figura (b) mostra a mesma dinâmica para o modelo DDMS-ARCH. Neste modelo o parâmetro τ foi 7. A probabilidade do *Bear Market* (linha pontilhada) é 0.41 quando $d = 1$ e 0.72 no *Bull Market* (linha contínua). Diferente do que foi visto no primeiro resultado, modelar a variância acarretou em uma probabilidade maior para o *Bull Market*. No contexto de probabilidade fixa, ou seja, $d > \tau$, a probabilidade do *Bear Market* é 0.92 e a do *Bull Market* é 0.97.

3.4 Probabilidades Suavizadas e Pontos de Reversão

A probabilidade suavizada associada a S_t no modelo DDMS-ARCH foi estimada usando o algoritmo descrito em [Kim & Nelson \(1999\)](#)¹³. $\hat{\xi}_{T|T}$, $\hat{\xi}_{T-1|T-1}$, e $\hat{\xi}_{T|T-1}$ são os estados filtrados obtidos através da estimação por verossimilhança. $\hat{\xi}_{T-1|T}$ é obtido por:

$$\hat{\xi}_{T-1|T} = \hat{\xi}_{T-1|T-1} \odot \left\{ P' \left[\hat{\xi}_{T|T} (\div) \hat{\xi}_{T|T-1} \right] \right\} \quad (20)$$

onde (\div) significa divisão de elemento por elemento e P foi definido na equação (14).

Tomando $t = T - 2, \dots, K + P + 1$, e os vetores $\hat{\xi}_{t|t}$ e $\hat{\xi}_{t+1|t}$ decorrentes da estimação por máxima verossimilhança, tal que $\hat{\xi}_{t+1|T}$ vem da iteração passada, a probabilidade suavizada $\hat{\xi}_{t|T}$ é dado por:

$$\hat{\xi}_{t|T} = \hat{\xi}_{t|t} \odot \left\{ P' \left[\hat{\xi}_{t+1|T} (\div) \hat{\xi}_{t+1|t} \right] \right\}. \quad (21)$$

O i -ésimo elemento de $\hat{\xi}_{t|T}$ é a probabilidade de $\psi_t = i$ sobre o conjunto de informação R_T, \dots, R_1 e θ . Isso é representado no modelo DDMS-ARCH por:

$$P(\psi_t = i | R_T, \dots, R_1, \theta) \text{ ou } P(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-K-P}, D(S_t) | R_T, \dots, R_1, \theta).$$

A análise de *Bull* e *Bear Market* é dada pela soma da probabilidade conjunta em cada período:

$$P(S_t | R_T, \dots, R_1, \theta) = \sum_{S_{t-1}, \dots, S_{t-k-P}, D(S_t)} P(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-K-P}, D(S_t) | R_T, \dots, R_1, \theta) \quad (22)$$

para os modelos DDMS-1 e DDMS-2, o procedimento é análogo.

As Figuras(1) e (2) mostram as probabilidades suavizadas de *Bear Market* para os modelo DDMS-2 e DDMS-ARCH.

O início da amostra, ou seja, segunda metade da década de 90 é um período caracterizado por grandes turbulências nos mercados financeiros internacionais, especialmente nas economias emergentes. Os modelos mostraram o desempenho do Ibovespa em decorrência do influxo de

¹²A estimação de τ foi estabelecida segundo o valor da verossimilhança. O conjunto de escolha deste parâmetro variou de 5 à 18.

¹³Para mais detalhes ver [Hamilton \(1994\)](#).

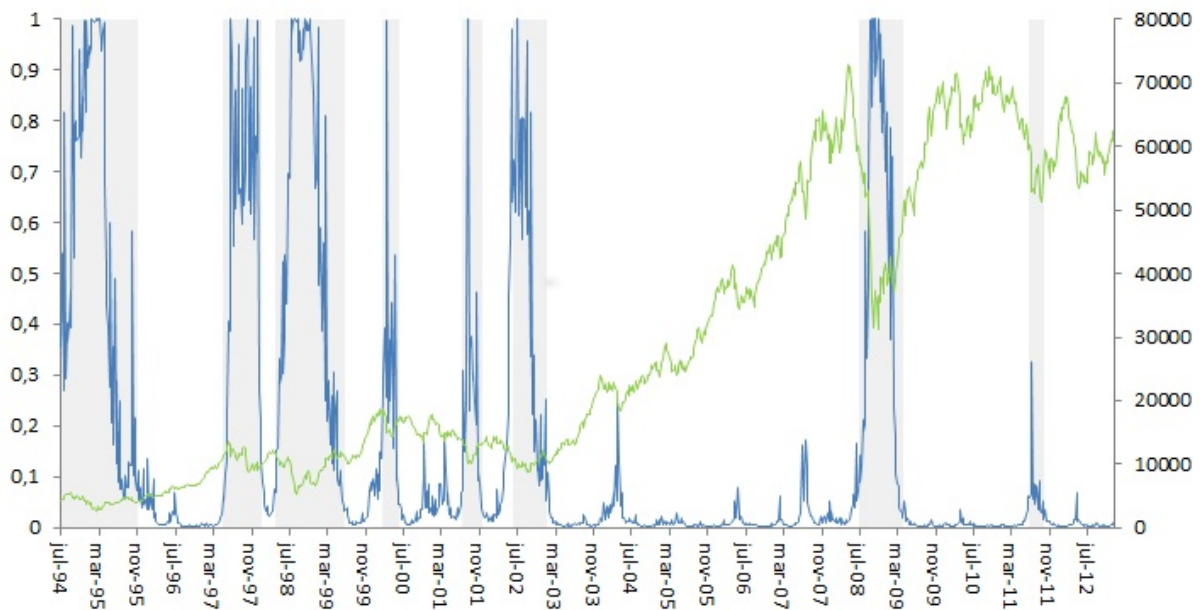


Figure 1: *Bear Market DDMS-2 \times Ibovespa.*

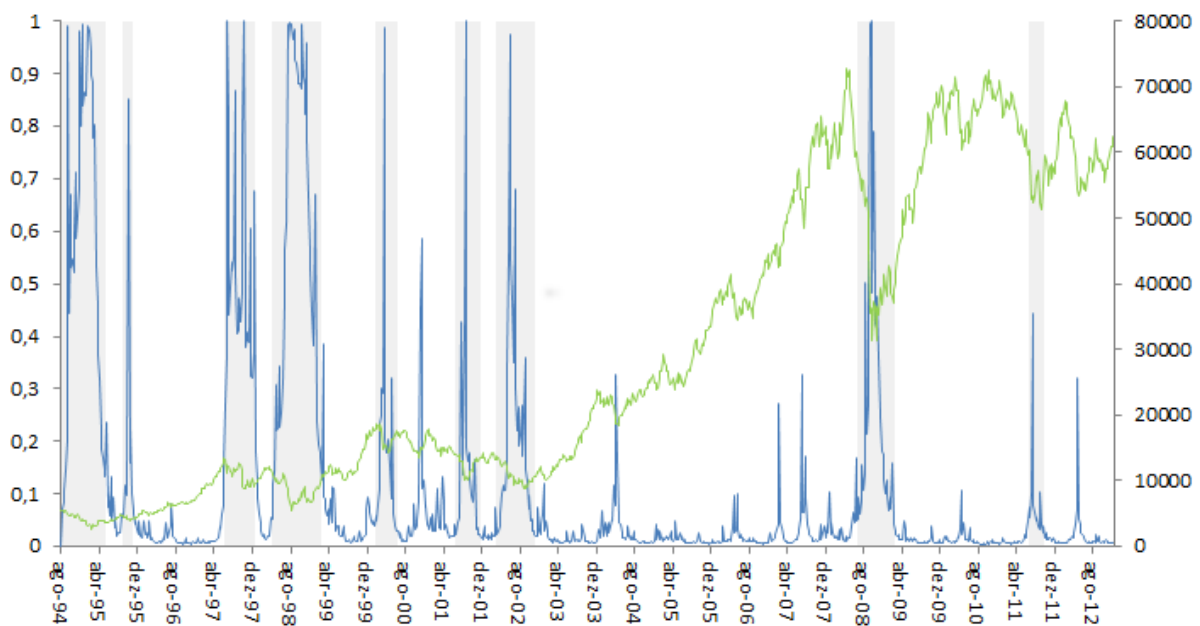


Figure 2: *Bear Market DDMS-ARCH \times Ibovespa.*

capital estrangeiro nas crises; do México (fim de 1994), da Tailândia, Indonésia, Malásia e Coreia do Sul (1997) e da Rússia (1998).

Através da análise das regiões cinzas ¹⁴ nas Figuras (1) e (2), a probabilidade do *Bear Market* em agosto de 1994 é superior à meio, indicando o início da crise mexicana deflagrada

¹⁴As áreas cinzas destacam os principais episódios de instabilidade no Ibovespa.

em dezembro de 1994. Segundo o noticiário econômico da época, entre 1995 a 1996 o volume diário médio negociado na bolsa não ultrapassou a média anual dos 100 milhões de dólares, em comparação com os 400 milhões milhões de dólares em 1994. A alta e persistente probabilidade nos anos seguintes, 1997 e 1999, também mostram evidências que os modelos captaram as baixas históricas durante a crise asiática e russa. O período foi marcado por diversas ocorrências de *circuitbreaker*¹⁵ devido o alto pessimismo dos investidores.

Os efeitos do estouro da bolha Nasdaq e as consequências do ataque terrorista às torres gêmeas são retratados por ambas especificações. Entre março a abril de 2000 o índice Bovespa caiu 17% anulando a valorização que vinha sendo construída desde a crise russa. Poucos dias após o ataque terrorista em 11 de setembro de 2001, o índice atingiu o menor nível desde agosto de 1999 ao registrar 10.038 pontos.

Amplamente conhecido pelo mercado por “efeito Lula” e “efeito Tango”, o ano 2002 foi marcado pela forte desvalorização dos ativos na bolsa. As incertezas do pleito eleitoral e os rumores da moratória da Argentina contribuíram para a baixa de 65% entre Janeiro e Outubro naquele ano. As Figuras (1) e (2) mostram que a probabilidade do *Bear Market* nesse período é elevada e se estende até começo de 2003.

A análise dos *turning points* também mostrou o excesso de otimismo que precedeu a crise imobiliária americana, ou seja, a forte valorização do índice em 2003 até o final de 2007. Apesar do aumento da volatilidade em alguns períodos específicos (abril de 2004 e julho de 2007), a Bovespa triplicou o volume médio de negócios e houve uma grande quantidade de ofertas iniciais de ações (IPO) nesse período. Em abril de 2007 a bolsa brasileira chegou à marca histórica de 50.000 pontos, representando valorização de mais de 1000% desde o plano Real, naquele período o índice beirava 4.000 pontos. No ano seguinte, a expressiva valorização ganhou ainda mais força e atingiu a marca de 73.589 pontos em maio de 2008.

O aumento gradativo da chance de reversão do quadro até então apelidado como “céu de brigadeiro” é mostrado no início do segundo semestre de 2008. É interessante destacar que o modelo captou o movimento de deterioração do índice semanas antes de atingir quedas históricas no mês de outubro de 2008.

O último *turning point* de significância na análise de *Bull e Bear Market* é mostrado pela alta volatilidade e retorno negativo em agosto de 2011. Isso devido à reação negativa do mercado após o anúncio do rebaixamento da nota da dívida soberana americana. As operações no pregão estiveram perto de serem suspensas e o índice chegou a registrar a maior queda desde outubro de 2008. Conforme visto na figura, nesse período as probabilidades suavizadas ficaram bem próximas de meio.

4 Estratégia de Investimento

Utilizando as probabilidades de predição ($P(S_t | R_{t-1}, \dots, R_1, \theta)$) de *Bull e Bear Market* abstraídas a cada instante do tempo, a estratégia de investimento explorada aqui, segue de maneira geral o trabalho de Almeida & Valls (2000). Os autores mostram que os modelos de mudança de regime apresentaram bom desempenho nos retornos, quando aplicados a regras de mercado.

¹⁵A regra geral para o uso do *circuitbreaker* é quando o Ibovespa atinge limite de baixa de 10% em relação ao fechamento do dia anterior.

Desta forma, espera-se que os modelos da classe DDMS também possam ser utilizados na construção de *trading systems*.

A estratégia de investimento consiste em investir no ativo de risco, neste caso, o índice Bovespa, exatamente na proporção dada pela probabilidade do regime de retorno positivo e baixa volatilidade, *Bull Market*. O restante, um menos essa probabilidade será investido no ativo livre de risco, ou seja, o certificado de depósito interbancário (CDI).

Para a estratégia de investimento ganhar maior realismo, devemos usar a probabilidade de predição estimada a cada período de tempo, ao invés de estimá-la levando em consideração a série como um todo. Conforme visto na seção anterior, a probabilidade de predição nos dá a previsão do período t baseada na informação do período $t - 1$. A cada nova informação o modelo é reestimado, ou seja, essas probabilidades são computadas através de uma janela em expansão.

A janela em expansão, e conseqüentemente a estratégia de investimento abordada, abrange junho de 2003 a dezembro de 2012. A previsão será feita para aproximadamente 10 anos de amostra. As primeiras 466 observações do total das 966 são usadas como pré-amostra para iniciar a estimação dos modelos. Os resultados a seguir apresentam o desempenho das estratégias de investimento para os modelos DDMS-2 e DDMS- ARCH. Os retornos aqui não levam em conta os custos de transação e corretagem.

Table 4: Retorno Acumulado ao Ano

Ano	DDMS-2	DDMS-ARCH	Ibovespa	CDI
2003*	93,53%	94,52%	93,49%	23,21%
2004	21,40%	22,33%	16,71%	16,01%
2005	28,53%	28,89%	27,71%	19,00%
2006	34,14%	35,29%	32,93%	15,16%
2007	41,47%	46,46%	43,65%	11,84%
2008	-25,76%	-18,79%	-37,01%	12,41%
2009	72,09%	70,64%	70,43%	9,88%
2010	2,04%	2,39%	1,05%	9,68%
2011	-14,83%	-14,66%	-18,11%	11,59%
2012	8,50%	9,72%	7,40%	8,49%
Média	21,31%	23,23%	18,05%	13,64%
Desvio Padrão	36,88	36,00	39,18	4,64
Índice de Sharpe	0,34	0,39	0,26	0,00

* 2003 é computado a partir de junho.

A tabela acima mostra que os retornos anuais das estratégias de investimento são superiores à estratégia *buy and hold* para o índice Bovespa, ou seja, investir no índice e desfazer-se do mesmo no final do período. Entretanto, é interessante destacar que o retorno médio entre os anos de 2005 a 2007 - tanto da bolsa quanto das estratégias - são muito próximos. Nesse

período a probabilidade de *Bull Market* foi alta e persistente, desta forma, a estratégia seguiu o mercado.

A análise para o período como um todo (2003 – 2012), revela que o retorno médio das estratégias são 23,23% e 21,31% - muito superiores ao retorno médio da bolsa 18,05%. O mesmo resultado é assegurado quando comparado com o retorno médio do CDI, 13,34%. Apenas nos anos de 2008 e 2011, o CDI apresentou uma rentabilidade maior que as estratégias investimento. Isso é explicado pela previsibilidade dos modelos, uma vez que as probabilidades de *Bear Market* foram mais elevadas no período da crise do subprime e do rebaixamento da nota dos títulos americano. Destaque é dado ao modelo DDMS-ARCH, pois a estratégia apresentou maior índice de Sharpe (0,39). Uma explicação para isso, é que no modelo em que a volatilidade é heterocedástica o risco é menor.

A fim de comparar o retorno das estratégias de investimento oferecidas pelos modelos da classe DDMS, foram estimados modelos de mudança de regime sem *duration depende*. Conforme visto na seção 2.1, os modelos acima, podem ser restritos, de tal forma, que a matriz de probabilidade de transição seja fixa. Neste caso, os modelos serão mais parcimoniosos uma vez que reduziremos o numero de parâmetros que definem a transição de estado. Para fim de comparação, a ordem tanto da média quanto da variância condicional, foram mantidas na estimação. Os valores dessas estimativas ficaram dentro do círculo unitário.

Table 5: **Resultado das Estimativas**

Parâmetros	AR(2)	MS-2	MS-ARCH
μ_0, μ	0.2840** (0.1536)	-0.9684* (0.7178)	-2.4857** (1.0726)
μ_1		0.5343*** (0.1310)	0.4787*** (0.1223)
m, σ	4.6529*** (0.1060)		
m_0, σ_0		8.1586*** (0.5512)	58.9153*** (12.4826)
m_1, σ_1		3.4924*** (0.0996)	8.2014*** (1.0146)
$\gamma_1(0)$		2.8144*** (0.4347)	2.2073 (0.5416)
$\gamma_1(1)$		4.4549*** (0.4042)	4.2816 (0.4538)
$\ln L$	-2850.0	-27498.2	-27215.8

***, **, * significância em 1%, 5% e 10% respectivamente. Desvio padrão está em parênteses.

$\ln L$ é o valor da log verossimilhança.

Os resultados mostram que a estratégias de investimento dos modelos sem *duration depende*, apresentaram um desempenho muito similar aos modelos da classe DDMS quando

comparados com a estratégia *buy and hold*, assim atingindo os resultados esperado desta seção.

Entretanto, retorno médio oferecido pelos modelos sem *duration dependece* foi maior para ambas as especificações. No caso em que a variância incondicional muda de regime, o modelo MS-2 apresentou um retorno médio de 24,22% contra 21,31% do modelo DDMS-2. No caso em que a variância condicional é modelada, o mesmo resultado é evidenciado, o modelo MS-ARCH proporcionou um retorno médio de 26,33% contra 23,33% do modelo DDMS-ARCH. Uma explicação para o maior retorno das estratégias de investimento em modelos em que não tem *duration dependece*, baseia-se na evidência empírica de que modelos mais parcimoniosos tem melhor capacidade de previsão.

A análise do índice de Sharpe mostrou novamente que no modelo onde a variância é condicional, o retorno é maior que na especificação homocedástica. Quando comparados com os modelos da classe DDMS, ambos apresentaram melhor valor para o índice.

Table 6: Retorno Acumulado ao Ano

Ano	MS-2	MS-ARCH	Ibovespa	CDI
2003*	95,02%	95,33%	93,49%	23,21%
2004	24,61%	26,57%	16,71%	16,01%
2005	29,36%	29,74%	27,71%	19,00%
2006	35,56%	37,67%	32,93%	15,16%
2007	43,65%	50,58%	43,65%	11,84%
2008	-16,57%	-10,16%	-37,01%	12,41%
2009	76,23%	72,21%	70,43%	9,88%
2010	2,42%	3,31%	1,05%	9,68%
2011	-12,99%	-12,30%	-18,11%	11,59%
2012	9,06%	11,17%	7,40%	8,49%
Média	24,22%	26,33%	18,05%	13,64%
Desvio Padrão	36,22	34,98	39,18	4,64
Índice de Sharpe	0,41	0,48	0,26	0,00

* 2003 é computado a partir de junho.

Por fim é interessante destacar que o valor da verossimilhança obtido ao estimar os modelos dentro da amostra, mostra que os modelos com *duration dependece* obtiveram melhor ajuste e apresentam melhor capacidade de identificar *Bull e Bear Market*. Esse resultado já era esperado, uma vez que a parametrização proposta neste artigo buscou captar a dinâmica intra-regime.

5 Conclusão

O principal objetivo deste trabalho foi identificar períodos de *Bull e Bear Market* no índice Bovespa. Os resultados mostraram que no regime ascendente, o parâmetro da média foi positivo acompanhado por uma baixa variância. Já no regime descendente, a média foi negativa e a variância alta. Esses resultados são similares aos encontrados por [Maheu & McCurdy \(2000\)](#) e [Shibata \(2011\)](#).

Diferentemente do modelo de mudança de regime tradicional, o emprego do *duration dependence* caracterizou a dependência de longo prazo na estrutura cíclica do retorno acionário. A parametrização empregada, captou o efeito de que a persistência do estado ascendente torna os investidores mais otimistas em relação ao futuro. Essa resposta positiva faz com que a probabilidade de troca de regime diminua ao longo do tempo, ou seja, aumento na probabilidade de permanência no estado. De modo recíproco, a persistência do estado descendente aumenta o pessimismo dos investidores sobre os retornos futuros.

Devemos ter cautela em especificar a estrutura dos dados financeiros apenas por um processo de markov de primeira ordem, fato evidenciado pela memória curta dos parâmetros. Os modelos da classe DDMS, tanto na média como na variância condicional, buscaram corrigir a influencia intra-regime ao melhorar a estimação das probabilidades suavizada - destaque foi dado ao modelo DDMS-ARCH, pois este apresentou melhor ajuste.

Por fim, o retorno obtido pelos modelos da classe DDMS ao construir estratégias de investimento, fora da amostra, foi similar aos dos modelos que não incorporam *duration dependence*. Ambas especificações superaram os retornos do Ibovespa e CDI. Já a análise do índice de Sharpe, revelou que os modelos de mudança de regime sem dependência de duração, obtiveram melhor desempenho. Em contrapartida, a estimação desses modelos dentro da amostra, revelou que os modelos da classe DDMS têm melhor capacidade de indentificar *Bull e Bear Market*.

References

- Almeida, N. & Valls, P. (2000), 'Switching regimes models for financial time series: an empirical study for trading rules', *Annals of the XXII Brazilian Econometric Meeting* **1**, 49–68.
- Bollerslev, T. (1986), 'Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity', *Journal of Econometrics* (31), 307–27.
- Brock, W., Dechert, W. & Sheinkman, J. A. (1987), A test for independence based on the correlation dimension. Working Paper 8702, University of Wisconsin, Dept. of Economics.
- Bry, G. & Boschan, C. (1971), 'Cyclical analysis of time series: Selected procedures and computer programs', *NBER, New York, NY, USA* .
- Cai, J. (1994), 'A markov model of switching-regime arch', *Journal of Business & Economic Statistics* (12), 309–316.

- Campbell, J., Lo, A. & Mackinley, A. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, USA; Princeton, New Jersey.
- Castro, V. (2011), The portuguese stock market cycle: Chronology and duration dependence. Working Paper NIPE WP 13.
- Chauvet, M. (1999), 'Stock market fluctuations and the business cycle', *Journal of Economic and Social Measurement* **25**(3/4), 235–258.
- Chena, S.-W. & Shen, C.-H. (2007), 'Evidence of the duration-dependence from the stock markets in the pacific rim economies', *Applied Economics* **39**, 1461–1474.
- Durland, J. & McCurdy, T. (1994), 'Duration-dependent transitions in a markov model of u.s gnp growth', *Journal of Business & Economics Statistics* .
- Engle, R. (1982), 'Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of uk inflation', *Econometrica* (50), 987–1008.
- Estrella, A. & Mishkin, F. (1998), 'Predicting us recessions: Financial variables as leading indicators', *Reviess of Economics and Statistics* **80**(1), 45–61.
- Hamilton, J. (1994), *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Hamilton, J. D. & Susmel, R. (1994), 'Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime', *Journal of Econometrics* (64), 307–333.
- Harris, L. (2003), *Trading and Exchanges: Market Microstructure for Practitioners*, Oxford University Press, USA; New York, New York.
- Kim, C.-J. & Nelson, C. (1999), *State-space models with regime switching*, MIT Press, London, England; Cambridge, Massachusetts.
- Kole, E. & Dijk, J. (2012), How to identify and predict bull and bear markets? Econometric Institute, Erasmus School of Economics, Erasmus University Rotterdam.
- Lunde, A. & Timmermann, A. (2004), 'Duration dependence in stock prices: an analysis of bull and bear markets', *Journal of Business & Economic Statistics* (22), 253–273.
- Maheu, J. & McCurdy, T. (2000), 'Identifying bull and bear markets in stock returns', *Journal of Business & Economic Statistics* (18(1)), 100–112.
- Marcellino, M. (2006), *Handbook of economic forecasting*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, chapter Leading indicators: What have we learned?, pp. 876–960.
- Pagan, A. & Sossounov, K. (2003), 'A simple framework for analyzing bull and bear markets', *Journal of Applied Econometrics* (18(1)), 23–46.
- Rigobon, R. & Sack, B. (2003), 'Measuring the reaction of monetary policy to the stock market', *Quarterly Journal of Economics* **118**(2), 639–669.

Shibata, M. (2011), 'Identifying bull and bear markets in japan', *Asia-Pacific Financial Markets* (19(2)), 99–117.

Stock, J. & Watson, M. (2003), 'How did leading indicator forecasts do during the 2001 recession?', *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quaterly* **89**, 71–90.

Stock, J. & Watson, M. (2006), 'Why has u.s. inflation become harder to forecast', *Journal of Money, Credit and Banking* **39**(1).