

PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS DE TAXAS DE JUROS UTILIZANDO O MODELO HJM MULTIFATORIAL COM ESTRUTURA DE VOLATILIDADE NÃO-PARAMÉTRICA

Nelson Kazuo Nojima (EESP/FGV)
Afonso de Campos Pinto (EESP/FGV)

Resumo: Com o objetivo de precificar derivativos de taxas de juros no mercado brasileiro, este trabalho foca na implementação do modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992) em sua forma discreta e multifatorial através de uma abordagem numérica, e, que possibilita uma grande flexibilidade na estimativa da taxa forward sob uma estrutura de volatilidade baseada em fatores ortogonais (PCA), facilitando assim a simulação de sua evolução por Monte Carlo, como consequência da independência destes fatores. A estrutura de volatilidade foi construída de maneira a ser totalmente não paramétrica baseada em vértices sintéticos que foram obtidos por interpolação dos dados históricos de cotações do DI Futuro negociado na BM&FBOVESPA, sendo o período analisado entre 02/01/2003 a 28/12/2012. Para possibilitar esta abordagem foi introduzida uma modificação no modelo HJM desenvolvida por Brace e Musiela (1994). Foram obtidos preços para os seguintes derivativos: DI Futuro, opções sobre IDI e opções sobre DI Futuro.

Palavras-chave: Derivativos de taxas de juros, Modelo HJM, Monte Carlo, Análise de Componentes Principais

Abstract: *For the purpose of pricing interest rate derivatives in the Brazilian market, this paper focuses on the numerical implementation of the Heath, Jarrow and Morton model (1992) in its multi-factor discrete form, which allows for great flexibility on the estimation of the forward rate curve under a volatility term structure based on orthogonal factors (PCA), thus facilitating the Monte Carlo simulation of its dynamics as a consequence of the independence of these factors. The volatility term structure is built in a non-parametric way based on synthetic buckets obtained via interpolation of historical data of BM&FBOVESPA DI Futures ranging from Jan/2nd/2003 to Dec/28th/2012. The Brace and Musiela (1994) adaptation of the HJM Model was adopted in this study. The following derivatives are priced: DI Futures, options on the IDI index, and options on DI Futures.*

Keywords: *Interest rate derivatives, HJM Model, Monte Carlo, Principal Component Analysis*

JEL: C02, C63

Área Anpec: Área 8 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

1. Introdução

Muito se tem estudado e desenvolvido com relação a modelos para a precificação de derivativos de taxas de juros e hedging de portfólios utilizando estes derivativos, e, embora muito também tenha sido aplicado, não existe um consenso no mercado em relação a um modelo largamente aceito e utilizado como ocorre com o modelo de Black e Scholes (1973) para a renda variável. Isto decorre de vários fatores, entre outros porque muitos modelos não seriam tão eficazes ou porque seriam de utilização muito complexa, isto é, não possuem solução analítica e, portanto, exigiriam um tratamento numérico, ou ainda porque teriam uma implementação complexa em termos metodológicos. Além disso, em um passado recente, em alguns casos¹ sua utilização em larga escala era inviável, pela limitação da capacidade de processamento existente à época. Atualmente muito ainda se utiliza o modelo de Black (1976) para precificação de opções de taxas de juros, apesar de suas limitações e do surgimento de outros modelos mais abrangentes posteriormente. Possivelmente isto ocorre devido ao modelo de Black possuir solução analítica, tornando a sua implementação extremamente simples, e, pelo fato dos resultados obtidos serem considerados satisfatórios pelo mercado. Porém, apesar destes fatores, a preferência pela abordagem da estimação “implícita” como indicado por Rebonato (2004), está baseada na esperança de que a “visão de mercado” esteja refletida na volatilidade implícita, a qual só será confiável se houver completude e eficiência informacional, o que nem sempre é verdade ou pode ser garantido. Assim, se há razões para duvidar, uma aplicação cega na direção da estimação implícita deveria ser fortemente questionada. Os modelos que surgiram posteriormente são baseados na construção da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) e são primordialmente divididos em duas categorias: (i) os modelos de equilíbrio geral, e (ii) os modelos de não arbitragem. A abordagem de equilíbrio foi iniciada por Cox, Ingersoll e Ross² (1985), começando pela descrição de uma economia subjacente e pela assunção sobre a evolução estocástica de um ou mais fatores exógenos ou variáveis de estado na economia e sobre as preferências de um investidor representativo. Considerações de equilíbrio geral são usadas para endogenamente derivar a taxa de juros e o preço contingente de dívidas. A abordagem de arbitragem começa pela assunção sobre a evolução estocástica de uma ou mais taxas de juros e deriva o preço de todas as dívidas pela imposição da condição de que não há nenhuma oportunidade de arbitragem na economia (Longstaff e Schwartz, 1992). Como exemplos de modelos de não arbitragem podem-se citar: Brennan e Schwartz (1977), Ho e Lee (1986), Hull and White (1990), Black, Derman e Toy (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992), conhecido como modelo HJM, entre outros. Estes autores desenvolveram uma abordagem geral que modela a dinâmica de toda a ETTJ incorporando muitos dos modelos previamente desenvolvidos, considerados como casos particulares deste. O modelo HJM é um modelo multifator permitindo com isso capturar toda a dinâmica da ETTJ, diferentemente dos modelos desenvolvidos até então, que eram unifatoriais em sua grande maioria. Na equação diferencial estocástica do modelo HJM, poucas são as funções de volatilidade que permitiriam uma saída analítica, restando portanto, a implementação de métodos numéricos para sua solução. Aliado a isso, a complexidade e flexibilidade do modelo fez com que o modelo não fosse largamente utilizado, seja pela dificuldade em implementá-lo ou seja pela necessidade de métodos trabalhosos para uso no dia a dia na calibração de seus parâmetros. A utilização de técnicas como a Análise de Componentes Principais (PCA, da sigla em inglês) que permitem a redução do número de fatores, tipicamente três fatores para uma curva de juros, bem como a evolução da tecnologia que possibilitam a utilização de computadores cada vez mais rápidos, permitem a implementação e utilização do modelo HJM de maneira mais rápida e simples e a utilização de técnicas como simulação de Monte Carlo de maneira eficiente. Existem várias maneiras para discretizar a SDE como podem ser vistos em

¹ Quando o modelo exigia uma solução numérica.

² Conhecido como modelo CIR.

Heath, Jarrow e Morton (1992) e Glasserman (2003) entre outros, e que utilizam o mesmo *grid* para as duas dimensões de tempo do modelo, o tempo decorrido e a maturidade. Neste trabalho, foi utilizado o prazo para maturidade no lugar da data de maturidade como argumento da taxa *forward*, seguindo a parametrização de Brace e Musiela³ (1994) e foram utilizados dois *grids* em separado, um para o tempo e outro para o prazo, o que possibilitou uma flexibilidade maior na simulação. Existem também várias maneiras para avaliar o *drift* no tempo discreto. Neste trabalho adotam a solução sugerida por Glasserman (2003), que dentre algumas possibilidades para aproximação do limite de tempo contínuo, escolheu aquela que preserva a propriedade martingal para o preço descontado de *bonds*.

O objetivo deste trabalho é implementar o modelo HJM em sua forma discreta e multifatorial através de uma abordagem numérica e aplicá-lo ao mercado brasileiro. Devido a grande flexibilidade do modelo HJM no que se refere à sua aplicação e utilização, e, até por esta razão tem sido referenciado em muitos trabalhos como *framework* HJM. Trabalhos similares no Brasil e em outros mercados, modelam a ETTJ através do modelo HJM utilizando formas funcionais⁴ para a volatilidade como, por exemplo, em Renò e Ubaldi (2002), Driessen et al. (2003) e em Dario e Fernández (2009), e, calibrando os parâmetros da função através de PCA. Neste trabalho, a estimativa da volatilidade a ser utilizada no modelo, será totalmente não paramétrica, ou seja, não será definida através de uma função contínua que represente a volatilidade, e sim em pontos específicos obtidos dos dados históricos, sendo cada ponto referente a uma maturidade e a um fator⁵. A identificação dos fatores de volatilidade empírica será obtida por PCA, e, conforme analisado por Litterman e Scheinkman (1991), em geral, três fatores deverão ser suficientes⁶ para a ETTJ, o que é confirmado neste trabalho. Um dos problemas encontrados no mercado financeiro brasileiro no que se refere ao estudo e aplicação de novos modelos, focando especificamente em renda fixa, é a baixa quantidade tanto da variedade de instrumentos financeiros e derivativos de taxas de juros, quanto do volume de negociação que se traduz em dificuldades para avaliação e calibração dos modelos sendo estudados. Particularmente neste trabalho, uma das dificuldades encontradas foi a obtenção de pontos observáveis da expectativa de taxas de juros futuras em prazos fixos, pela falta de instrumento que sintetize esta expectativa nesta condição. Como estes pontos são necessários para a calibração da volatilidade histórica, foi utilizado um método de interpolação baseado em *splines* para obtenção destes vértices⁷ sintéticos. No Brasil o derivativo de taxas de juros que é tido como referência para o mercado é o DI Futuro⁸ negociado na BM&FBOVESPA que sintetiza a expectativa da taxa de juros futura. Dentre os derivativos, este é o de maior liquidez no mercado brasileiro. Os demais derivativos negociados na bolsa como a opção sobre DI Futuro e a opção sobre IDI⁹ tem baixa liquidez atualmente. Assim foram utilizadas as cotações históricas do DI Futuro para a obtenção da volatilidade da taxa *forward* em prazos específicos e utilizá-las no modelo.

O trabalho está dividido em seis seções, sendo esta introdução a inicial. A seção 2 trata da revisão bibliográfica contextualizando o trabalho em relação aos estudos e técnicas já realizadas ao longo do tempo. Na seção 3 é apresentado o modelo HJM com a parametrização Musiela e a forma discreta do modelo para possibilitar sua abordagem numérica. A seção 4 apresenta a metodologia para a implementação do modelo, na qual são apresentadas as técnicas para o tratamento numérico por Monte Carlo, bem como para a calibração da volatilidade por PCA. Na seção 5 são apresentados os resultados da aplicação do modelo em

³ Daqui para a frente nos referiremos como “parametrização Musiela”.

⁴ Texto referente a escolha de formas funcionais para a volatilidade podem ser vistos em James e Weber (2000) e Renò e Ubaldi (2002).

⁵ No caso de três fatores estes representam o nível, a inclinação e a curvatura conforme Litterman e Scheinkman (1991).

⁶ Soma dos fatores que representem de forma significativa a volatilidade, em geral mais do que 92%.

⁷ Pontos com prazos fixos pré estabelecidos p. e. 30, 60, 90, 180, 360 dias, ou em dias úteis, 21, 42, 63, 252.

⁸ Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia.

⁹ Índice da Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de um Dia.

alguns derivativos do mercado brasileiro e a seção 6 encerra com a conclusão do trabalho e possíveis extensões.

2. Revisão Bibliográfica

Heath, Jarrow e Morton (1992) desenvolveram um framework geral para modelar as dinâmicas de toda a curva da taxa forward. Nesse sentido muitos dos modelos que foram previamente desenvolvidos são casos particulares deste, como os modelos de Ho e Lee (1986) e Hull and White (1990). Um ponto chave do modelo é que a suposição de não arbitragem define o drift da SDE como função da volatilidade, porém, por sua característica torna o modelo não Markoviano. Além disso, uma das dificuldades encontradas para sua aplicação no mercado é que o processo estocástico que o dirige é n-dimensional. Litterman e Scheinkman (1991) empregam uma pesquisa empírica para determinar os fatores comuns que afetam os retornos no passado sobre papéis do Tesouro americano. A análise sugere que a maior parte da variação do retorno sobre papéis de renda fixa pode ser explicada em termos de três fatores, ou atributos da *yield curve*, os quais os chamaram nível, inclinação e curvatura. Renò e Uboldi (2002) descrevem a implementação de um modelo para a representação da estrutura a termo da taxa de juros desenvolvido dentro do *framework* proposto por Heath et al. (1992). Indicam que o *framework* HJM é capaz de representar as principais características da estrutura a termo, excluindo as oportunidades de arbitragem por construção. O modelo HJM é assim atraente por suas propriedades teóricas e por sua flexibilidade, embora sua calibração seja usualmente não trivial, e, que através da análise de componentes principais (PCA) isto pode ser feito de maneira rápida e fácil de utilizar. Utilizam uma forma funcional para a volatilidade, cujos parâmetros são calibrados através de PCA sobre *yield curves* de taxas de juros de Euro. Tamagushiku (2006) investigou a performance do modelo HJM na precificação de opções de compra sobre *bill futures* negociados na Sidney Future Exchange, considerando um, dois ou três fatores. Os resultados mostram que o modelo com três fatores consistentemente apresenta um desempenho superior. Rebonato (2004) mostra que o estado atual de modelagem se deve muito a como os modelos foram historicamente desenvolvidos na indústria, e salienta a importância do desenvolvimento tecnológico (tais como computadores mais rápidos e técnicas de Monte Carlo mais eficientes) orientando a direção da pesquisa teórica. Björk et al. (2012) foca na aproximação numérica na precificação de instrumentos financeiros no mercado de bonds, usando o modelo HJM. Considera que na valorização de derivativos no mercado de *bonds* é importante o uso de modelos que são consistentes com a estrutura a termo inicial observada no mercado e que o modelo HJM para as taxas *forward* tem esta propriedade e em adição oferece a liberdade para escolher a estrutura de volatilidade, por exemplo para ajustar para outros derivativos cotados no mercado. Krivko e Tretyakov (2013) ponderam que o *framework* proposto por HJM em que as dinâmicas da curva da taxa *forward* são descritas por uma equação estocástica multifator de dimensão infinita, com a curva inteira como variável de estado e que o modelo tem solução fechada apenas para alguns casos especiais de volatilidade e como consequência requer uma aproximação numérica, e, tanto quanto se sabe, a literatura para o tratamento numérico é bastante escassa.

Caldeira (2011) em seu trabalho compara os principais métodos de interpolação da estrutura a termo da curva de juros. Os resultados encontrados mostram a superioridade dos modelos baseados em *splines*, modelos não paramétricos, em relação aos modelos paramétricos no que diz respeito ao ajuste da curva de juros, embora, a interpretação econômica dos fatores que compõem os modelos paramétricos e seu bom desempenho para fazer previsões da curva de juros faz com que recebam muita atenção. Ferreira (2011) em seu trabalho precificou opções de futuros de DI de um dia através do modelo HJM de um fator e volatilidade constante e comparou-as com os prêmios de referência divulgados pela BMF. De outubro de 2009 a abril de 2011 foram avaliadas as quatro séries principais de opções do tipo 2. O resultado obtido foi que a BMF&BOVESPA sobreapreçou as opções comparado com o

modelo, ressaltando que não foi possível obter amostras extensas para cada tipo de opção, uma vez que esse mercado possui baixíssima liquidez. Considerando a modificação proposta por Brace e Musiela (1994) parametrizando a taxa *forward* com prazo de maturidade no lugar da data de maturidade, este trabalho implementa o modelo HJM baseado no modelo discreto proposto por Glasserman (2003) e considera ainda a utilização de *grids* de tempo e de prazo de forma independente. Já a calibração da volatilidade histórica foi obtida seguindo o método sugerido por Shreve (2004), utilizando PCA e interpolando os vértices sintéticos com *cubic spline* conforme já mencionado.

3. Arcabouço Teórico

A seguir será brevemente descrito o modelo HJM na sua forma original e a mudança proposta por Brace e Musiela (1994) com a introdução de um tempo relativo τ (prazo), bem como a abordagem utilizada para a discretização do modelo e assim possibilitar a simulação numérica por Monte Carlo.

3.1 O Modelo HJM

O *framework* HJM se refere a uma família de modelos que modelam diretamente as dinâmicas da taxa *forward* instantânea, mais precisamente, o processo da taxa *forward* $f(t, T)$ é modelada através de uma equação diferencial estocástica multivariada, na qual a dinâmica de todas as maturidades T estão representadas conforme a seguinte equação

$$df(t, T) = \mu(t, T, f(t, T))dt + \sum_{n=1}^N \sigma_n(t, T, f(t, T))dW_n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

onde $df(t, T)$ representa o diferencial em relação a t com T mantido constante e os processos W_n são movimentos Brownianos independentes sob a medida real¹⁰ \mathbb{P} . Para simplificar a notação vamos admitir por enquanto que o processo da taxa *forward* está sujeito a um único movimento Browniano. O *drift* μ e a difusão σ_n são funções da própria taxa *forward* $f(t, T)$, porém daqui para a frente iremos omiti-la para não carregar a notação, então $\mu(t, T) \equiv \mu(t, T, f(t, T))$ e $\sigma(t, T) \equiv \sigma_n(t, T, f(t, T))$. A questão chave no modelo HJM é a condição da não existência de oportunidades de arbitragem para a modelagem da estrutura a termo de *zero-coupon bonds* em todas as maturidades em $(0, \bar{T}]$. Essa condição é garantida se existe um processo $\Theta(t)$ tal que:

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T)[\sigma^*(t, T) + \Theta(t)] \quad (2)$$

para todo $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$, onde $\mu(t, T)$ e $\sigma(t, T)$ são o *drift* e a difusão da taxa *forward*, $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v)dv$, e $\Theta(t)$ é o preço do risco de mercado. A prova deste teorema pode ser encontrado, p. e., em Shreve (2004). Assim, o processo da taxa *forward* satisfazendo a condição de não arbitragem no modelo HJM é

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}(t) \quad (3)$$

onde $\tilde{W}(t) = \int_0^t \Theta(u)du + W(t)$ é um movimento Browniano sob a medida neutra ao risco¹¹ $\tilde{\mathbb{P}}$, e o *drift*

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T) \quad (4)$$

¹⁰ Medida de probabilidade no mundo real em contraponto à medida no mundo livre de risco.

¹¹ Usando o Teorema de Girsanov para a mudança na medida de probabilidade. Demonstração em Shreve (2004).

sob a medida neutra ao risco $\tilde{\mathbb{P}}$ onde $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv$. Para o caso geral n -dimensional com n fatores temos

$$df(t, T) = \sum_{n=1}^N \sigma_n(t, T) \sigma_n^*(t, T) dt + \sum_{n=1}^N \sigma_n(t, T) d\tilde{W}_n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

3.2 O Modelo HJM com parametrização Musiela

O modelo HJM possui dois parâmetros de tempo, um é o tempo t “agora” e um outro tempo (absoluto) T à frente. Brace e Musiela (1994) propõe uma mudança no *framework* de tempo do modelo HJM de maneira que existe um tempo t “agora” e um tempo futuro $t + \tau$ relativo a agora. Isso produz um espaço de estados que são convenientemente úteis porque as curvas *forward* assim são sempre definidas em \mathbb{R}^+ . O modelo da estrutura a termo da taxa de juros proposto é baseada na família de taxas $\{r(t, \tau); t, \tau \geq 0\}$, onde $r(t, \tau)$ representa a taxa na qual pode-se entrar em um contrato na data t , para emprestar ou tomar emprestado, por um curto período de tempo até a data $t + \tau, \tau \geq 0$. Isto difere do introduzido por HJM, no qual $r(t, \tau) = f(t, t + \tau)$, onde $f(t, T)$ é a taxa *forward* analisada por HJM. Pelo Teorema 2.1 em Brace e Musiela (1994), seja $s(t) = s(t, \cdot)$, e $a(t) = a(t, \cdot)$, onde

$$a(t, \tau) = s(t, \tau) \int_0^\tau \bar{s}(t, u) du. \quad (6)$$

Se $\{r(t, \cdot); t \geq 0\}$ resolve

$$dr(t, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} r(t, \tau) + a(t, \tau) \right) dt + s(t, \tau) dW(t), \quad (7)$$

onde $W = \{W(t), t \geq 0\}$ é um movimento Browniano N -dimensional definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}, \mathbb{P})$, então pode-se afirmar que $\frac{B(t, T)}{\beta(t)} = \mathbb{E} \left[\frac{1}{\beta(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ para todo $0 \leq t \leq T$, onde $B(t, T) = \exp \left(- \int_0^{T-t} r(t, u) du \right)$ e $\beta(t) = \exp \left(\int_0^t r(s, 0) ds \right)$. $\beta(t)$ é o valor no tempo t de um investimento de valor 1 no tempo 0, continuamente reinvestido pela taxa *spot* instantânea $r(t, 0)$. Assim, sob a hipótese do Teorema 2.1 em Brace e Musiela (1994) os preços dos *zero-coupon bonds* em todas as maturidades são $(\{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ -martingais. Consequentemente, pode-se dizer que a equação (7) descreve a dinâmica livre de arbitragem da família de taxas *forward* $\{r(t, \tau); t, x \geq 0\}$, e o *drift* conforme a equação (6).

3.3 A Forma Discreta do Modelo HJM

Solução analítica para o modelo HJM é possível somente para alguns casos especiais de volatilidade, assim, em geral uma avaliação utilizando o *framework* HJM requer uma solução numérica. Como observado por Krivko e Tretyakov (2013), tanto quanto sabemos, é bastante escassa a literatura sobre tratamento numérico do modelo HJM. A abordagem mais comum, que pode ser vista em Heath et al. (1992), Jarrow (2002), Björk et al. (2012) e Glasserman (2003), é utilizar *grids* de tempo t e de maturidade T coincidentes. Estes métodos diferem entre si na maneira como a aproximação é feita na integral do *drift* livre de arbitragem do modelo HJM. Todos eles utilizam o método do tipo Euler para discretização no tempo.

Neste trabalho a proposta é utilizar o modelo HJM com a parametrização Musiela e na solução numérica considerar dois *grids* de tempo em separado, um *grid* de tempo t e um outro para o prazo de maturidade τ , tendo como base a abordagem proposta por Glasserman (2003) e introduzindo estas modificações. Com a mudança da variável maturidade T para a variável prazo τ , no lugar de considerarmos maturidades em 2010, 2011, 2015, consideraremos prazos para maturidade de 0,25; 0,5; 1; 2; 5 anos, ou seja, $f(t, T) = f(t, t + \tau) \equiv r(t, \tau)$, conforme visto

na seção anterior. Com isso, ganharemos flexibilidade no modelo, sem a necessidade de nos atermos aos *grids* coincidentes para o passo de tempo e maturidade.

3.3.1 O *drift* discreto livre de arbitragem

Conforme Glasserman (2003) os dois argumentos de $f(t, T)$ requerem discretização. Estabelecendo um *grid* de tempo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M$ para o primeiro argumento, em geral mesmo para um tempo fixo t_i , não é possível representar toda a curva *forward* $f(t, T)$, $t_i \leq T \leq T^*$, assim fixa-se também um *grid* de maturidades T e aproxima-se a curva *forward* pelos seus valores apenas nestas maturidades. Com a parametrização Musiela na dinâmica da taxa *forward* conforme a equação (7), onde $r(t, \tau)$ requer também a discretização de dois parâmetros, estabelecemos para o primeiro, um *grid* de tempo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M$, e, para o segundo, um *grid* de prazos para maturidade $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_J$, e, da mesma maneira, aproximamos a curva *forward* pelos seus valores apenas nestes prazos. Considerando inicialmente um modelo com apenas com um fator, a dinâmica da taxa *forward* no modo discreto, com a parametrização Musiela segue a equação:

$$\hat{r}(t_i, \tau_j) = \hat{r}(t_{i-1}, \tau_j) + \left[\frac{\hat{r}(t_{i-1}, \tau_{j+1}) - \hat{r}(t_{i-1}, \tau_j)}{\tau_{j+1} - \tau_j} + \hat{a}(t_{i-1}, \tau_j) \right] [t_i - t_{i-1}] + \hat{s}(t_{i-1}, \tau_j) \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i, \quad (8)$$

$i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, J$ onde $Z_i \sim N(0,1)$. Utilizou-se a notação com “chapéu” para distinguir do correspondente contínuo, no qual para que o mesmo seja livre de arbitragem, o drift deve ser $a(t, \tau) = s(t, \tau) \int_0^\tau \bar{s}(t, u) du$ (6), que é a questão chave do modelo HJM. Para o modelo discreto iremos adotar a solução proposta por Glasserman (2003), que dentre algumas possibilidades para aproximação do limite de tempo contínuo, escolheu aquela que preserva a propriedade martingal para o preço descontado de *bonds*. Partindo do modelo discretizado de um *bond* como sendo $\hat{B}(t_i, t_j) \exp(-\sum_{k=0}^{i-1} f(t_k, t_k)[t_{k+1} - t_k])$, onde $t_j \geq t_i$ e $f(t_k, t_k)$ é a *short rate* no tempo t_k , Glasserman (2003) demonstrou que para ser martingal em t_i para cada t_j o *drift* deve ser:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t_{i-1}, t_{i-1} + \tau_j) &= \frac{1}{2[\tau_{j+1} - \tau_j]} \left[\sum_{n=1}^N \left(\sum_{l=0}^j \hat{\sigma}_n(t_{i-1}, t_{i-1} + \tau_j) [\tau_{l+1} - \tau_l] \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \left(\sum_{l=0}^{j-1} \hat{\sigma}_n(t_{i-1}, t_{i-1} + \tau_j) [\tau_{l+1} - \tau_l] \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

3.3.2 O modelo multifator em tempo discreto

O modelo HJM multifator em tempo discreto, seguindo a parametrização Musiela, terá então a seguinte forma

$$\hat{r}(t_i, \tau_j) = \hat{r}(t_{i-1}, \tau_j) + \left[\frac{\hat{r}(t_{i-1}, \tau_{j+1}) - \hat{r}(t_{i-1}, \tau_j)}{\tau_{j+1} - \tau_j} + \hat{a}(t_{i-1}, \tau_j) \right] [t_i - t_{i-1}] + \sum_{n=1}^N \hat{s}_n(t_{i-1}, \tau_j) \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_{in}, \quad (9)$$

$i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, J$ onde $Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{iN})$ são vetores aleatórios independentes $N(0,1)$, \hat{s}_n o n -ésimo elemento do vetor \hat{s} , $n = 1, \dots, N$, sendo o N o número de fatores do modelo, e, conforme discutido na seção anterior, o *drift* terá a forma

$$\hat{a}(t_{i-1}, \tau_j) = \frac{1}{2[\tau_{j+1} - \tau_j]} \left[\sum_{n=1}^N \left(\sum_{l=0}^j \hat{s}_n(t_{i-1}, \tau_j) [\tau_{l+1} - \tau_l] \right)^2 - \sum_{n=1}^N \left(\sum_{l=0}^{j-1} \hat{s}_n(t_{i-1}, \tau_j) [\tau_{l+1} - \tau_l] \right)^2 \right]. \quad (10)$$

4. Metodologia

Esta seção descreve os passos necessários para a implementação do modelo HJM na sua forma discreta, de maneira a possibilitar o tratamento numérico da dinâmica das taxas *forward* através de simulação por Monte Carlo, bem como o tratamento dos dados de mercado, para calibração da volatilidade a ser utilizada no modelo.

4.1 PCA e a estimação da volatilidade das taxas forward

PCA é uma das possíveis técnicas estatísticas através da qual podemos extrair a volatilidade subjacente de uma série histórica. Neste trabalho iremos utilizar esta técnica para extrair a volatilidade na série histórica das mudanças na taxa *forward* dos Certificados de Depósito Interbancários (CDI) de um dia e utilizar estas volatilidades no modelo HJM. As taxas *forward* serão inferidas dos contratos futuros de DI de um dia negociados na BM&F, em algumas maturidades pré estabelecidas. O conceito teórico de PCA por ser bastante conhecido e registrado na literatura, não será detalhado aqui. Aplicação de PCA em taxas de juros podem ser obtidas, por exemplo, em Alexander (2008). Podemos usar dados históricos para estimar a difusão $\sigma(t, T)$ no modelo HJM porque o processo de difusão na dinâmica das taxas *forward* é o mesmo tanto sobre a medida no mundo real conforme a equação (1), onde os processos W_n são movimentos Brownianos independentes sob a medida real¹² \mathbb{P} , quanto no mundo neutro ao risco conforme a equação (5), onde onde $\tilde{W}_n(t)$ são movimentos Brownianos sob a medida neutra ao risco $\tilde{\mathbb{P}}$. Em James e Webber (2000) são discutidas algumas formas funcionais para a volatilidade em HJM. Os autores ponderam que é usual, na prática, para evitar complexidade que $\sigma(t, T)$ seja Markov e nesta direção há quatro abordagens distintas: formas funcionais padrão, funções Gaussianas gerais, funções para obtenção de taxas *spot* Markovianas e funções implícitas de preços de opções. As consequências da escolha da especificação da volatilidade são enormes. Uma especificação Gaussiana pode levar, para opções mais simples, a fórmulas explícitas. Uma especificação Markov provavelmente resultará em uma estimativa usando uma aproximação em árvore. No caso geral quando $\sigma(t, T)$ é não Markov, só será possível avaliar, mesmo uma opção simples, somente por meio de simulações complexas ou árvores não recombinantes. Várias formas funcionais padrão tem sido estudadas sendo as duas primeiras muito utilizadas na prática. Para estimar a volatilidade através de PCA iremos utilizar o método sugerido por Shreve (2004) descrito a seguir. Vamos assumir que $\sigma(t, T)$ é da forma $\sigma(t, T) = \tilde{\sigma}(T - t) \min\{M, f(t, T)\}$, para alguma função não aleatória $\tilde{\sigma}(\tau)$, $\tau \geq 0$, e alguma constante positiva M ¹³. Escolhendo $\tilde{\sigma}(T - t)$ para coincidir com dados de mercado, a taxa *forward* evolve de acordo com o modelo

¹² Medida de probabilidade no mundo real em contraponto à medida no mundo livre de risco.

¹³ Limite superior para a taxa *forward* para prevenir a explosão da taxa que podem ocorrer quando t e T estão muito próximos.

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \tilde{\sigma}(T - t) \min\{M, f(t, T)\} dW(t).$$

Suponha que observamos as taxas *forward* nos tempos $t_1 < t_2 < \dots < t_M < 0$ no passado, e as taxas *forward* que observamos naqueles tempos referem-se aos prazos para maturidades $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_J$ (isto é, observamos $f(t_i, t_i + \tau_j)$ para $i = 1, \dots, M$ e $j = 1, \dots, J$). Suponha além do mais que δ é suficientemente pequeno de maneira que $t_i + \delta < t_{i+1}$ para $i = 1, \dots, M - 1$ e $t_M + \delta \leq 0$. De acordo com o modelo então:

$$\begin{aligned} f(t_i + \delta, t_i + \tau_j) - f(t_i, t_i + \tau_j) \\ \approx \delta\mu(t_i, t_i + \tau_j) + \tilde{\sigma}(\tau_j) \min\{M, f(t_i, t_i + \tau_j)\} (W(t_i + \delta) - W(t_i)). \end{aligned} \quad (11)$$

Definindo

$$D_{i,j} = \frac{f(t_i + \delta, t_i + \tau_j) - f(t_i, t_i + \tau_j)}{\sqrt{\delta} \min\{M, f(t_i, t_i + \tau_j)\}} \quad (12)$$

e substituindo em (11) temos:

$$D_{i,j} \approx \frac{\sqrt{\delta}\mu(t_i, t_i + \tau_j)}{\min\{M, f(t_i, t_i + \tau_j)\}} + \tilde{\sigma}(\tau_j) \frac{W(t_i + \delta) - W(t_i)}{\sqrt{\delta}}.$$

O primeiro termo do lado direito é pequeno em relação ao segundo porque tem o fator $\sqrt{\delta}$. Se definirmos:

$$X_i = \frac{W(t_i + \delta) - W(t_i)}{\sqrt{\delta}}, \quad i = 1, \dots, M \quad (13)$$

a expressão que aparece no segundo termo, que é uma variável aleatória, temos

$$D_{i,j} \approx \tilde{\sigma}(\tau_j) X_i \quad (14)$$

Como X_1, X_2, \dots, X_M são variáveis aleatórias normais e independentes, significa que podemos considerar $D_{1,j}, D_{2,j}, \dots, D_{M,j}$ como observações independentes das taxas *forward* tomadas nos tempos t_1, t_2, \dots, t_M relativas à maturidade τ_j . A covariância empírica será dada por $C_{j_1, j_2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_{i, j_1} D_{i, j_2}$. A covariância teórica calculada a partir de (14), é $\mathbb{E}[\tilde{\sigma}(\tau_{j_1}) \tilde{\sigma}(\tau_{j_2}) X_i^2] = \tilde{\sigma}(\tau_{j_1}) \tilde{\sigma}(\tau_{j_2})$. Utilizando PCA, temos $C = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' + \dots + \lambda_J e_J e_J'$, onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_J \geq 0$ são os autovalores de C e os vetores e_1, e_2, \dots, e_J são os autovetores correspondentes e e_j' a transposta de e_j . Assim, a melhor aproximação para $\tilde{\sigma}$ é

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}(\tau_1) \\ \tilde{\sigma}(\tau_2) \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}(\tau_J) \end{bmatrix} = \sqrt{\lambda_1} e_1.$$

Para melhorar a aproximação para C podemos introduzir mais movimentos Brownianos (mais fatores) na equação da dinâmica da taxa *forward*, cada um com seu próprio vetor $\tilde{\sigma}$ ($\sqrt{\lambda_2}e_2$, $\sqrt{\lambda_3}e_3$, etc.). Como um passo final na calibração, pode ser introduzido uma função não aleatória $\gamma(t)$ na evolução da taxa *forward* sob a medida neutra ao risco, fazendo:

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \gamma(t)\tilde{\sigma}(T - t) \min\{M, f(t, T)\} d\tilde{W}(t), \quad (15)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma(t, T) &= \gamma(t)\tilde{\sigma}(T - t) \min\{M, f(t, T)\} \quad e \\ \sigma^*(t, T) &= \int_t^T \sigma(t, v)dv = \gamma(t) \int_t^T \tilde{\sigma}(v - t) \min\{M, f(t, T)\} dv. \end{aligned} \quad (16)$$

Mesmo introduzindo $\gamma(t)$, o modelo continua livre de arbitragem quando $\sigma^*(t, T)$ em (15) é definido por (16). Tipicamente o valor de $\gamma(t)$ é uma constante e esta constante é livre para fazer o modelo coincidir com os valores de mercado. Inicialmente assume-se $\gamma(t) \equiv 1$ e obtêm-se os valores de $\tilde{\sigma}(T - t)$, e, posteriormente alterando-se $\gamma(t)$ e evoluindo a curva *forward* pelo modelo, calibra-se seu valor.

4.2 O tratamento dos dados de mercado históricos

Esta seção descreve o tratamento dado às cotações históricas de mercado de futuros de DI¹⁴ de um dia negociados na BM&F que serão utilizados para o cálculo das mudanças na taxa *forward* ao longo do tempo t , em pontos específicos da curva, que chamaremos de prazos τ , e que correspondem aos prazos de maturidade (*tenors*) de *zero-bonds*. O futuro de DI de um dia tem como ativo subjacente a taxa dos depósitos interfinanceiros de um dia de prazo, apurada pela Cetip, acumulada entre a data da negociação até o dia útil anterior à data do vencimento do contrato futuro

$$DI1(T) = \left(\prod_{i=0}^{T-1} (1 + r_0(t_i)) \right)^{252/(T-t_0)} - 1, \quad (17)$$

onde T é a data de vencimento do contrato futuro e $r_0(t_i)$ é taxa de um dia em t_i , $t_0 \leq t_i < T$, assim, o DI Futuro reflete a expectativa de taxas *forward* de um dia, acumulados até o vencimento. Os vencimentos destes contratos ocorrem no primeiro dia útil dos quatro primeiros meses subsequentes ao da negociação e, a partir daí, nos meses que se caracterizam como início de trimestre (janeiro, abril, julho e outubro). No exterior são mais comuns os contratos futuros de juros onde o ativo subjacente é a taxa de um título que, no vencimento do contrato futuro, tem um prazo a decorrer até a maturidade do título, sendo a maturidade destes títulos padronizados em prazos específicos. Pelas características do contrato futuro de DI de um dia negociados na BM&F, descritas acima, temos cotações diárias destes futuros em datas de maturidades (vencimentos) específicas, e, a cada dia que passa, o prazo (*tenor*) para maturidade diminui um dia. Porém, para estimarmos a volatilidade sobre os dados históricos, precisaremos das taxas *forward* em prazos específicos e fixos (p. e., 1 mês, 2 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, etc.). Assim, será necessário proceder algum método para interpolar os prazos cotados em cada dia para os prazos fixos necessários. Caldeira (2011) em seu trabalho avaliou

¹⁴ Depósitos Interfinanceiros, negociados entre instituições financeiras.

os principais métodos de interpolação da estrutura a termo da curva de juros no Brasil. Os resultados encontrados mostram a superioridade dos modelos baseados em *splines*. Assim, utilizaremos um método baseado em *cubic splines* para a interpolação da curva de juros para os prazos requeridos. Este método é bastante conhecido e com diversas referências na literatura, não sendo objetivo deste trabalho detalhar esta técnica. Finalmente, como os modelos desenvolvidos consideram que as taxas são continuamente compostas e, no modo discreto, continuamente compostas em base diária, converteremos as taxas compostas em taxa continuamente compostas equivalentes, através da relação

$$r_y = 252 \cdot \frac{\ln (1 + i_y)^{(T-t)/252}}{T - t}, \quad (18)$$

onde i_y é a taxa composta anual (considerando 252 dias úteis por ano) e r_y é a taxa equivalente continuamente composta. Esta relação foi obtida a partir das seguintes relações para um *bond*

$$V_T = V_t(1 + i_y)^{(T-t)/252} \quad (19)$$

e

$$V_T = V_t e^{r_y(T-t)/252}, \quad (20)$$

onde V_T e V_t são os valores do bond respectivamente em T e em t . Igualando (19) e (20) obtemos a equação (18). Similarmente, a relação para taxas de um dia será

$$r_d = \frac{\ln (1 + i_d)^{(T-t)}}{T - t}, \quad (21)$$

onde r_d e i_d são as taxas diárias equivalentes.

4.3 A simulação do modelo por Monte Carlo

Obtendo a taxa *forward* das cotações históricas interpoladas nos prazos específicos desejados e aplicando os métodos discutidos nas seções 4.1 e 4.2, estimamos a volatilidade por PCA para os N fatores (em geral 3 fatores são suficientes), para cada um dos prazos específicos (τ_j). Com a volatilidade estimada para cada um dos fatores e para cada prazo, calculamos o *drift* discreto utilizando a equação (10) conforme discutido na seção 3.3. Finalmente, implementando a equação (9), podemos simular por Monte Carlo a evolução da taxa *forward* e assim obter a ETTJ para uma data t e para prazos τ_j específicos. Simulando a evolução da taxa de juros por Monte Carlo podemos obter o preço de derivativos de taxas de juros. Na seção seguinte são apresentados os resultados de testes feitos com derivativos de taxas de juros negociados no mercado brasileiro negociados na bolsa bem como a descrição dos dados utilizados para o teste.

5. Resultados

Aqui são descritos os dados utilizados para calibrar e testar o modelo e são abordadas as questões sobre a interpolação de cotações para a obtenção dos “vértices” em prazos fixos e a análise para a escolha do período adequado para a determinação da estrutura de volatilidade. Na sequência, como exemplos de aplicação, são apresentados os resultados obtidos com a simulação por Monte Carlo do modelo HJM, onde são precificados alguns derivativos de taxas

de juros negociados na BM&FBOVESPA cujos valores estimados pelo modelo são comparados com os valores reais de mercado. Os derivativos testados são: a Opção sobre IDI, a Opção sobre Contrato de DI Futuro e o Contrato de DI Futuro. Os programas para tratamento dos dados e para a simulação do modelo foram totalmente desenvolvidos em MATLAB, incluindo a PCA e a geração dos gráficos apresentados neste trabalho foram feitas em planilha Excel.

5.1 Dados Utilizados

Os dados utilizados para testar o modelo implementado foram obtidos através do site da BM&FBOVESPA disponíveis na forma de arquivos diários. Os dados se referem às cotações de mercadorias e futuros negociadas na bolsa no período entre 02 de janeiro de 2000 a 30 de dezembro de 2012. A estrutura a termo da taxa de juros foi gerada a partir das taxas dos contratos DI Futuro negociados na BM&FBOVESPA, o qual constitui-se em uma referência para o mercado por sintetizar a expectativa da taxa de juros futura. O DI Futuro tem como ativo subjacente a taxa média dos depósitos interfinanceiros de um dia de prazo, apurada pela Cetip, acumulada entre a data da negociação até o dia útil anterior à data do vencimento do contrato futuro. Essa taxa é composta por dia útil e anualizada tomando como base 252 dias úteis por ano, conforme a equação (17), e sua cotação reflete a expectativa do mercado em relação ao comportamento futuro da taxa DI. Cada contrato de DI Futuro negociado na BM&FBOVESPA estabelece um acordo de compra e venda de R\$ 100.000,00 descontado pela taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia (DI), compreendida entre o dia da negociação e o dia do vencimento do contrato. A cotação de ajuste informada pela bolsa no arquivo do pregão diário, está expresso em preço unitário do contrato. Assim, calcula-se a taxa equivalente ao preço unitário através da equação

$$i_{ajuste} = \left(\frac{100.000}{PU_{ajuste}} \right)^{252/NDU_{venc}} - 1,$$

onde PU_{ajuste} é a cotação de ajuste informada pela BM&FBOVESPA, i_{ajuste} é a taxa de ajuste equivalente ao PU_{ajuste} e NDU_{venc} é o número de dias úteis entre a data da cotação e o vencimento do contrato de DI Futuro. Os contratos de DI Futuro vencem sempre no primeiro dia útil do mês de vencimento, e, conforme já mencionado, têm vencimento em aberto nos quatro próximos meses e nos meses que se caracterizarem como de início de trimestre. Existem vencimentos em aberto em prazos longos (p. e. 12 anos) que podem ser negociados, porém, dificilmente têm liquidez. Em geral, é mais comum existirem negócios com prazos para vencimentos até 5 ou 6 anos. Como a data de vencimento é fixo no primeiro dia útil de cada mês, a cada dia que passa, o prazo para vencimento de todos os contratos diminui em um dia, assim, não é possível construir uma série de tempo com cotações diretamente observadas referentes aos prazos fixos desejados (p. e. um mês, um semestre, um ano, dois anos, etc.). Para contornar este problema, as séries de cotações com prazos fixos pré estabelecidos, são geradas a partir de interpolações das cotações de mercado. O método de interpolação utilizado foi o *cubic spline* conforme discutido na seção 4.2. Definindo “vértices” de uma curva discreta de juros como o conjunto de pontos $t + \tau_j, \forall t$, onde os prazos τ_j são os pontos discretos para os quais o modelo irá estimar as taxas *forward*, assim $t + \tau$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j)$ é o vetor de vértices da simulação, onde $\tau_j = ndu/252$ é expresso em fração anual por dias úteis e ndu é o prazo em dias úteis. A partir das cotações de mercado históricas obtém-se as taxas *forward* das taxas DI de um dia observadas nos vértices desejados. Com estas taxas *forward* observadas obtém-se as mudanças na taxa, seguindo o método descrito na seção 4.1, obtendo-se os $D_{i,j}$. Calculando-se a matriz de covariâncias C sobre os $D_{i,j}$ e aplicando a PCA obtemos as variâncias estimadas para os para os N fatores para cada prazo τ_j . Utilizando as idéias discutidas por Scherer e Avellaneda (2002) em seu artigo, porém em outro contexto,

iremos observar o comportamento das taxas *forward* em períodos subsequentes de 2 em 2 anos entre 2003 e 2012 e avaliar o nível de estacionariedade da variância ao longo dos anos, através do coeficiente de acoplamento (percentual de variação explicado pelo primeiro componente) e da influência do segundo e terceiro componentes. O coeficiente de acoplamento é dado por $\frac{\lambda_1}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$, onde λ_n são os autovalores de C .

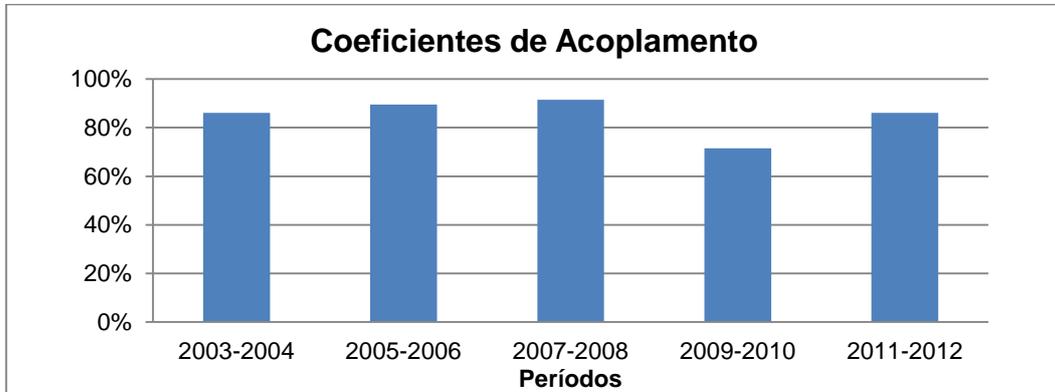


Figura 1 - Coeficientes de Acoplamento

Conforme pode ser visto na Figura 1, nos três primeiros períodos entre 2003 a 2008, o primeiro fator destes três períodos foram praticamente iguais indicando que as taxas *forward* nos seus diversos prazos τ tiveram um deslocamento paralelo fortemente acoplado, entre 85% a 90%, indicando uma relativa estabilidade da taxa ao longo dos anos. Porém isso se alterou no período seguinte, entre 2009-2010 indicando a possibilidade de alguma alteração estrutural no mercado. De fato ocorreu uma crise no final de 2008¹⁵ que provocou uma alta na taxas de juros, porém esta alta influenciou a expectativa do mercado de maneira diferente para as diferentes maturidades como pode ser constatado pela diminuição do fator 1 e conseqüente aumento nos fatores 2 e 3 como podem ser vistos nos Figura 1 e Figura 2. As crises tiram a estacionariedade do comportamento dos juros em uma conjuntura de estabilidade econômica e conseqüentemente alterando o perfil de volatilidade nas diferentes maturidades.

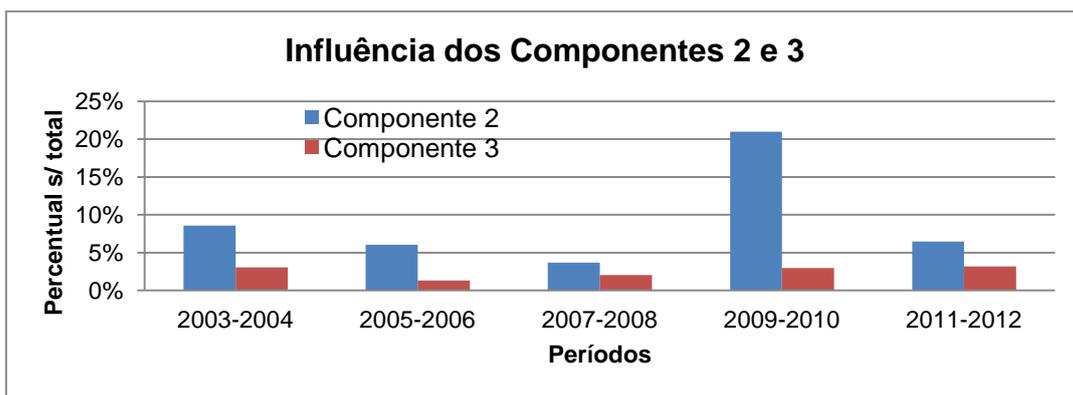


Figura 2 - Influência dos Componentes 2 e 3

Para fazer um teste de adequação do modelo, estimaremos os preços de alguns derivativos em 2012 e compararemos como os valores reais ocorridos. Em 2012 o comportamento da economia tendia novamente para a estabilidade e isto também pode ser observado nos gráficos nas Figura 1 e Figura 2. Assim, para a estimar a taxa *forward* para 2012, utilizamos a volatilidade do período entre 2005 a 2008. Ao executar uma PCA no período entre 2005 a 2008 e comparar o coeficiente de acoplamento deste período com os períodos considerados

¹⁵ Crise provocada pelos prejuízos nos financiamentos imobiliários nos Estados Unidos em setembro de 2008 e que se estenderam em 2009 e 2010.

anteriormente foi obtido o gráfico da Figura 3 – Comparativo do Coeficiente de Acoplamento com o período 2005-2008. A mesma comparação foi feita com a influência dos componentes 2 e 3 no gráfico da Figura 4.



Figura 3 – Comparativo do Coeficiente de Acoplamento com o período 2005-2008

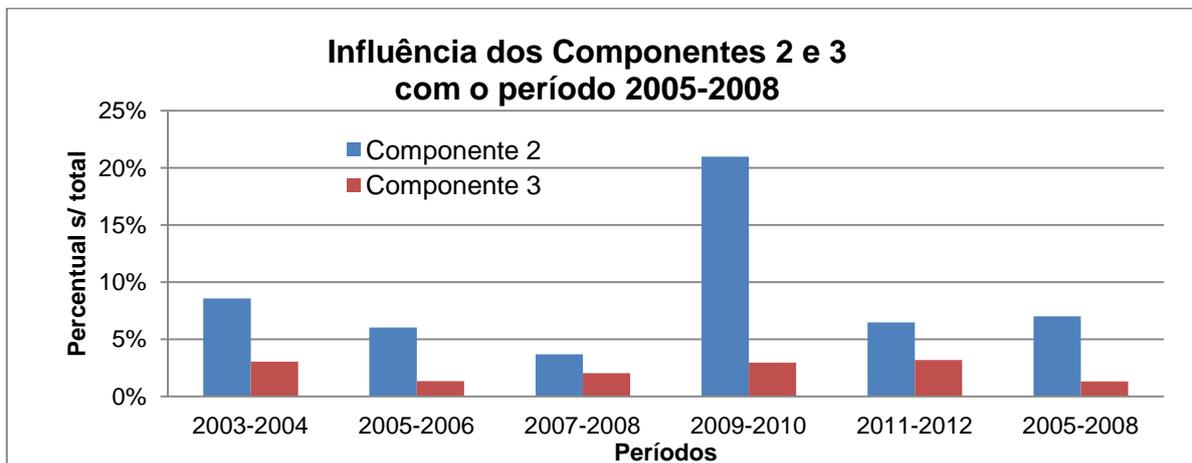


Figura 4 – Comparativo da Influência dos Componentes 2 e 3 com o período 2005-2008

Como esperado, pode-se observar pelas Figura 3 e Figura 4 que os dados do período de 2005 a 2008 apresentam o comportamento de um período de estabilidade (sem alteração estrutural). A seguir nesta seção serão apresentados testes do modelo implementado com alguns derivativos negociados na BM&FBOVESPA.

5.2 Opção de compra sobre o IDI

O ativo objeto desta opção (do tipo europeu) é o Índice da Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de um Dia (IDI). O prêmio desta opção é expresso em pontos do IDI, sendo cada ponto equivalente ao valor em reais estabelecido pela Bolsa. As séries de preços de exercícios são expressos em pontos de IDI, para cada mês de vencimento (vencimentos todos os meses no 1º dia útil de cada mês). O IDI é definido como o valor teórico de 100.000,00 pontos na data de início de valorização fixada pela BM&FBOVESPA, quando passa a ser corrigido pela Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI), calculada pela Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos (Cetip) por meio da seguinte fórmula: $IDI_t = IDI_{t-1}(i_{t-1} + 1)$, onde i_{t-1} é a Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI) referente ao dia anterior. O *payoff* da opção de compra é

$$PO = [IDI_k - K]^+, \quad (22)$$

onde K é o preço de exercício e IDI_k é o valor do IDI na data de exercício. Na simulação

$$IDI_k = IDI_0 \exp \left(\sum_{i=0}^{k-1} \hat{r}(t_i, \tau_1) [t_{i+1} - t_i] \right),$$

onde IDI_0 é o Índice da Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de um Dia acumulado em t_0 , t_k é a data de exercício e $\hat{r}(t_i, \tau_1)$ é a taxa *forward* estimada pela simulação em τ_1 referente à t_i . Simulando M trajetórias por Monte Carlo e calculando-se em cada trajetória o *payoff* conforme (22), obtém-se o preço da opção de compra dado por

$$c = D_{0,k} \frac{\sum_{m=1}^M PO_m}{M}, \quad (23)$$

onde M é o número de trajetórias, PO_m é o *payoff* na trajetória m e $D_{0,k}$ é a fator de desconto pela taxa livre de risco entre t_0 e t_k . Conforme discutido na seção 1.5.1 serão utilizadas as cotações históricas, mais estáveis, do período de 03/01/2005 a 30/12/2008 para estimar a volatilidade e utilizá-la para simular as trajetórias para 2012 e assim precificar os derivativos. Aplicando a PCA na matriz de covariâncias das mudanças das taxas *forward* conforme discutido em 4.1 obtém-se os seguintes autovalores, já ordenados pelo valor:

Tabela 1 - Autovalores da Taxa Forward

Componente	Valor	Acumulado
1o. Fator (nível)	89.3%	89.3%
2o. Fator (inclinação)	6.6%	95.9%
3o. Fator (curvatura)	1.2%	97.1%

Pode-se observar que os três primeiros fatores representam mais de 97% da variação da taxa *forward*. Estimando a volatilidade $\hat{\sigma}_n(\tau)$ utilizando estes autovalores e autovetores, evolui-se a taxa *forward* até a data de exercício da opção e de (23) calcula-se o valor da opção. Calibrando $\gamma(t)$ em $t_0 = 04/01/2012$ e utilizando as cotações de mercado de opções de compra de IDI cujas datas de exercício eram $t_k = 02/07/2012$, foram estimados os seguintes valores

Tabela 2 - Calibração de $\gamma(t)$ em 04/01/2012

Strike	Cotação de Mercado	$\gamma(t)$	Preço Calibrado
141,100	141.59	1.29	141.99
141,200	78.96	1.46	78.08
141,300	37.04	1.58	37.63

Com os parâmetros calibrados, os preços estimados pelo modelo em 05/01/2012 e 06/01/2012 são apresentados na Tabela 3. As diferenças entre a cotação de mercado e o preço estimado podem ser atribuídas ao baixo volume de negócios que pode gerar uma formação de preço imperfeita e pela inferência da volatilidade implícita pelo mercado utilizando o modelo de Black (1976).

Tabela 3 - Preços estimados em 05/01/2012 e 06/01/2012

Data	Strike	Cotação de Mercado	Preço Estimado	Diferença	Diferença / Cotação
05/01/2012	141,100	146.87	142.98	3.89	2.6%
	141,200	84.24	78.15	6.09	7.2%
	141,300	41.35	37.22	4.13	10.0%
06/01/2012	141,100	124.44	126.67	-2.23	-1.8%
	141,200	66.46	66.24	0.22	0.3%
	141,300	29.54	30.01	-0.47	-1.6%

Observa-se também que o modelo tende a estimar valores maiores que o mercado para preços de exercício menores e valores menores para os preços de exercício maiores.

5.3 Opções de venda sobre Contratos de DI Futuro

O ativo objeto desta opção (do tipo europeu) é o Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI Futuro), com vencimento determinado conforme o tipo de série da opção (tipos 1, 2, 3 e 4). O preço de exercício é expresso em taxa de juro efetiva ao ano, base 252 dias úteis. Para o cálculo do payoff desta opção, calcula-se o Preço Unitário (PU) equivalente ao preço de exercício que é expresso em taxa

$$PU_k = \frac{100.000}{(1 + K)^{\tau_F/252}},$$

onde K é o preço de exercício expresso em taxa e τ_F é o prazo em dias úteis do DI Futuro, ativo objeto da opção. Assim, o *payoff* da opção de compra sobre DI Futuro calcula-se (lembrando que compra de taxa é venda de PU)

$$PO_c = [PU_k - PU_F]^+, \quad (24)$$

onde PU_F é o preço do DI Futuro, ativo objeto da opção, na data de exercício, e, de maneira equivalente, o *payoff* da opção de venda sobre DI Futuro calcula-se

$$PO_p = [PU_F - PU_k]^+. \quad (25)$$

Em cada trajetória da simulação calcula-se PU_F por

$$PU_F = \frac{100.000}{\exp(\sum_{l=1}^{F-1} \hat{r}(t_k, \tau_l) [\tau_{l+1} - \tau_l])},$$

onde t_k é a data de exercício da opção e $\hat{r}(t_k, \tau_l)$ é a taxa *forward* em τ_l referente à t_k , estimada pela simulação. Simulando M trajetórias por Monte Carlo e calculando-se em cada trajetória o *payoff* dado por (24), obtém-se o preço da opção de compra

$$c = D_{0,k} \frac{\sum_{m=1}^M PO_{c,m}}{M}, \quad (26)$$

ou, calculando-se o *payoff* dado por (25), obtém-se o preço da opção de venda

$$p = D_{0,k} \frac{\sum_{m=1}^M PO_{p,m}}{M}, \quad (27)$$

onde $PO_{p,m}$ é o *payoff* na trajetória m e $D_{0,k}$ é a fator de desconto pela taxa livre de risco entre t_0 e t_k . Utilizando as cotações de mercado em $t_0 = 18/04/2012$ para calibrar $\gamma(t)$ foram estimados os seguintes valores pelo modelo

Tabela 4 - Preços em 18/04/2012 para calibração de $\gamma(t)$

Strike	Cotação de Mercado	$\gamma(t)$	Preço Calibrado
8.50%	89.43	1.00	89.92
8.75%	125.51	0.95	125.62
9.00%	173.85	0.89	172.75

A data de exercício destas opções foi em 02/01/2013, o vencimento do DI Futuro, ativo objeto destas opções, será em 02/01/2014. O preço estimado destas opções em 19/04/2012 está na Tabela 5 abaixo.

Tabela 5 – Preços estimados das opções sobre DI Futuro em 19/04/2012

Strike	Cotação de Mercado	Preço Estimado	Diferença	Diferença / Cotação
8.50%	125.36	123.08	2.28	1.8%
8.75%	168.81	170.14	-1.33	-0.8%
9.00%	227.19	231.43	-4.24	-1.9%

Conforme pode-se observar, os valores estimados ficaram bem próximos aos valores reais. Deve-se considerar ainda que estes derivativos têm baixa liquidez e pode haver erro na captura da volatilidade implícita pelo próprio mercado, que depende muito do período considerado. Aliado a isso, deve-se considerar também que, o prazo envolvido para o exercício das opções (pouco mais de 8 meses) somado com o vencimento do contrato futuro, ativo objeto destas opções (1 ano), é relativamente longo para o mercado brasileiro.

5.4 Contrato de DI Futuro

O Contrato de DI Futuro da BM&FBOVESPA é o derivativo de referência utilizado neste trabalho para a calibração da volatilidade utilizada pelo modelo para a construção da ETTJ, conforme discutido na seção 5.1. A taxa do Contrato de DI Futuro é dado por

$$DI_F(t_i, \tau_j) = \exp \left(\sum_{l=1}^{j-1} \hat{r}(t_i, \tau_l) [\tau_{l+1} - \tau_l] \right),$$

$i = 0, \dots, M$, $j = 1, \dots, J$ onde $\hat{r}(t_i, \tau_l)$ é a taxa *forward* estimada pela simulação em τ_l referente à t_i e $DI_F(t_i, \tau_j)$ é a taxa do Contrato de DI Futuro em t_i com vencimento em τ_j . Utilizando o mesmo período dos casos anteriores para a estimativa da volatilidade por PCA, são apresentadas nas Tabela 6 e 7 os preços estimados de contrato de DI Futuro em 04/01/2012 e em 03/02/2012, considerando que a simulação foi feita em $t_0 = 06/12/2011$. Para os contratos de DI Futuro, não foi utilizado o parâmetro $\gamma(t)$ porque neste caso, ao se calcular o valor esperado do preço, $\gamma(t)$ não tem influência na média da simulação de N trajetórias. Como as datas de vencimento são fixas, a cada dia o prazo para vencimento do contrato diminui, assim, na simulação utilizam-se prazos padrões (21,42,63,...,252,...), que representam um mês de 21 dias úteis, um trimestre de 63 dias úteis, um ano de 252 dias úteis, e assim por diante.

Tabela 6 - Estimativa de Preço de DI Futuro em 04/01/2012

Vencimento	Cotação Real em 04/01/2012	Prazo em dias úteis	Preço Estimado Interpolado para o Prazo	Diferença	Diferença / Cotação	Prazo padrão da simulação	Preço Estimado no Prazo Padrão
02/04/2012	97,637	61	97,656	19	0.02%	63	97,583
02/07/2012	95,370	123	95,469	99	0.10%	126	95,365
01/10/2012	93,096	187	93,299	203	0.22%	189	93,232
02/01/2013	90,906	249	91,230	324	0.36%	252	91,129
01/04/2013	88,753	309	89,210	457	0.51%	315	89,011
01/07/2013	86,434	372	87,058	624	0.72%	378	86,850
02/01/2014	81,816	502	82,588	772	0.94%	504	82,519

Desta maneira após a estimativa de preço obtida pela simulação faz-se uma interpolação para o prazo real utilizando o método *cubic-spline* já discutido anteriormente.

Tabela 7 - Estimativa de Preço de DI Futuro em 03/02/2012

Vencimento	Cotação Real em 03/02/2012	Prazo em dias úteis	Preço Estimado Interpolado para o Prazo	Diferença	Diferença / Cotação	Prazo padrão da simulação	Preço Estimado no Prazo Padrão
02/04/2012	98,519	39	98,518	-1	0.00%	42	98,408
02/07/2012	96,350	101	96,313	-37	-0.04%	105	96,174
01/10/2012	94,208	165	94,125	-83	-0.09%	168	94,023
02/01/2013	92,150	227	92,038	-112	-0.12%	231	91,903
01/07/2013	87,968	350	87,830	-138	-0.16%	357	88,316
02/01/2014	83,470	480	83,323	-147	-0.18%	483	83,219
01/04/2014	81,353	541	81,189	-164	-0.20%	546	81,016

Pode-se observar nas duas datas que os preços estimados são próximos dos valores reais ocorridos, sendo maiores para os vencimentos.

6. Conclusões

O objetivo do presente trabalho é implementar um modelo HJM multifatorial que modela a evolução de toda a curva de juros possibilitando uma grande flexibilidade na simulação da estrutura a termo da taxa de juros, e, utilizando uma estrutura de volatilidade adequada de maneira que os fatores sejam ortogonais e assim permitir que os movimentos brownianos possam ser independentes e simplificar a simulação de sua dinâmica. Além disso, foram realizados testes de precificação de derivativos de taxas de juros negociados no mercado brasileiro em um período já decorrido¹⁶, e assim possibilitar uma avaliação do modelo pela comparação entre o valor encontrado pelo modelo e o valor real ocorrido. Foram testados três derivativos de taxas de juros negociados na BM&FBOVESPA, a saber, opção sobre IDI, opção sobre DI Futuro e o próprio DI Futuro. Os melhores resultados foram para o DI Futuro como esperado porque a calibração da volatilidade histórica da taxa forward foi obtida a partir deste derivativo que é o de maior liquidez da bolsa. Os resultados apresentaram diferenças menores do que 1% para o DI Futuro, nas datas testadas, conforme visto na seção 5.4. Já para o caso das opções sobre IDI e sobre DI Futuro os resultados apresentaram diferenças um pouco

¹⁶ Normalmente conhecido em inglês como back-test.

maiores, da ordem de 2% no caso da opção sobre DI Futuro e de 1% a 10% no caso da opção sobre IDI, mostrando um resultado nem sempre muito consistente. Isto pode ser explicado em parte pela baixa liquidez destas opções. Não é objetivo deste trabalho realizar uma análise estatística dos erros, porém, possivelmente a dispersão dos erros será bem maior na precificação das opções do que no DI Futuro, parte devido à baixa liquidez como já citado e parte porque provavelmente o mercado utiliza o modelo de Black (1976) para precificar as opções. Uma possível extensão deste trabalho seria a realização destes testes estatísticos, porém, pode-se antecipar que serão de difícil conclusão em função da baixa liquidez dos negócios com as opções. Pelos resultados apresentados pode-se considerar que o modelo HJM multifatorial conforme foi implementado neste trabalho apresenta resultados bastante satisfatórios, e pela sua grande flexibilidade e precisão poderia ser utilizada na precificação de derivativos negociados em balcão. Entretanto, é importante salientar alguns aspectos. A calibração da volatilidade histórica deve ser feita com um período no qual a taxa de juros tenha um comportamento similar ao período para o qual se quer estimar, o que nem sempre é possível ou viável. O que está se diferenciando aqui são os períodos de estabilidade com períodos de “crise”, que causa uma alteração estrutural. Uma outra possível extensão para este trabalho seria incorporar ao modelo uma aleatoriedade em relação à “crise”. Uma abordagem alternativa interessante seria a calibração do parâmetro $\gamma(t)$ como função do tempo e que neste trabalho foi tratado como uma constante como em geral considerado na literatura. Isso eventualmente possibilitaria um melhor ajuste do modelo com relação ao tempo. Uma outra possibilidade nessa linha seria tratar $\gamma(t)$ de forma paramétrica definindo uma função que a represente, entretanto, a calibração dos parâmetros desta função seria bastante complexo em função da baixa liquidez das opções. Os dados do DI Futuro não poderiam ser utilizados neste caso porque o DI Futuro não é afetado pelo $\gamma(t)$, como visto na seção anterior. Outras questões que poderão ser avaliadas em trabalhos futuros seriam uma avaliação estatística do erro gerado pela aproximação pelo método de Euler da SDE do modelo HJM em espaço dimensional infinito e a avaliação em que condições no modelo de tempo discretizado, quando $t \rightarrow T$ ou $\tau \rightarrow 0$, poderá ocorrer um “estouro” no valor da taxa *forward* $f(t, T)$ no modelo HJM.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. *Quantitative Methods in Finance: Market Risk Analysis*. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2008. v.1.
- BJÖRK, T.; SZEPESSY, A.; TEMPONES, R. e ZOURARIS. G. E. Monte Carlo Euler approximations of HJM term structure financial models. *The Swedish National Network in Applied Mathematics (NTM)*, 2012.
- BLACK, F.; SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637-654, 1973.
- BLACK F. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, n. 3, p. 167-179, 1976.
- BLACK, F.; DERMAN, E.; TOY, W. A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, n. 46, p.33- 39, 1990.
- BRACE, A. e MUSIELA, M. A multifactor Gauss Markov implementation of Heath, Jarrow, and Morton. *Mathematical Finance*, n. 4, p. 259-283, 1994.
- BRENNAN, M. J. e SCHWARTZ, E. S. Savings bonds, retractable bonds, and callable bonds. *Journal of Financial Economics*, n. 3, p. 133-155, 1977.
- CALDEIRA, J. F. Estimação da Estrutura a Termo da Curva de Juros no Brasil através de Modelos Paramétricos e Não Paramétricos. *Análise Econômica*, n.5, p. 95-122, 2011.
- COX, J.; INGERSOLL, J. e ROSS, S. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, n. 53, p. 385-407, 1985.

- DARIO, A. G. e FERNÁNDEZ, M. Geração de cenários para a taxa de juros. In: IX ENCONTRO BRASILEIRO DE FINANÇAS, 2009, São Leopoldo, RS. Disponível em <<http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/ebf/9EBF/paper/viewFile/852/144>>.
- DRIESSEN, J.; KLAASSEN, P. e MELENBERG, B. The Performance of Multi-Factor Term Structure Models for Pricing and Hedging Caps and Swaptions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge, n. 38(03), p. 635-672, 2003.
- FERREIRA, J. F. F. *Apreçamento de Opções de Futuro de DI Utilizando o Modelo HJM*. 2011. Dissertação (Mestrado em Administração de Empresas) - PUC do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- FLESAKER, B. Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee model of interest rate contingent claims pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, n. 28, p. 483- 495, 1993.
- GIBSON, R. A. J.; SIM, A. B. e THURSTON, D. C. Empirical Comparisons of One-Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models. Working Paper, University of New South Wales, n. 79, p. 1-19, 1995.
- GLASSERMAN, P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. New York: Springer, 2003.
- HEATH, D.; JARROW, R. e MORTON, A. Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, n. 60, p. 77-105, 1992.
- HO, T. S. Y. e LEE, S. B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, n. 41, p. 1011-1029, 1986.
- HULL, J. C. & WHITE, A. D. Pricing Interest Rate Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, n. 3, p. 573-592, 1990.
- HULL, J. C. e WHITE, A. D. Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices. *Advances in Futures and Options Research*, n. 6, p. 1-13, 1993.
- JAMES, J. e Webber, N. *Interest Rate Modelling*. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2000.
- KRIVKO, M. e TRETAKOV, M. V. Numerical integration of Heath-Jarrow-Morton model of interest rates. *IMA Journal of Numerical Analysis*, p. 1-50, 2013.
- LAURINI, M. P. e MOURA, M. Constrained smoothing BB-splines for the term structure of interest rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, n. 46, p.339–350, 2010.
- LITTERMAN, R. e SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, 1991.
- LONGSTAFF, F. A. e SCHWARTZ, E. S. Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance*, n. 4, p. 1259-1282, 1992.
- REBONATO, R. Interest-Rate Term-Structure Pricing Models: A Review. Proceedings: MATHEMATICAL, PHYSICAL AND ENGINEERING SCIENCES, THE ROYAL SOCIETY, n. 460, p. 667-728, 2004.
- RENÒ, R. e UBOLDI, A. PCA based calibration of an HJM model. *Quaderno IAC*, Q28-002, 2002.
- SCHERER, K. P. e AVELLANEDA, M. All for one one for all? A principal component analysis of Latin American Brady bond debt from 1994 to 2000. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, n. 5, p. 79-106, 2002.
- SHREVE, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. New York: Springer, 2004.
- TAMAGUSHIKU, C. Heath , Jarrow , and Morton Interest Rate Modelling Using Principal Component Analysis. Working Paper, University of Otago, 2006.
- VASICEK, O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, n. 5, p. 177-188, 1977.