Convexidade da função perda do banco central e dependência entre instrumentos monetários

Marcelo de Carvalho Griebeler* ESAG/UDESC and PPGE/UFRGS

Ronald Otto Hillbrecht† PPGE/UFRGS

16 de Julho de 2013

Resumo: Neste artigo obtemos condições sob as quais a função perda do banco central é estritamente convexa em quatro estados distintos da economia: economia aquecida, em recessão, inflação alta e produto alto. Encontramos, ainda, que quando inflação e produto são funções lineares do instrumento de política monetária, a convexidade é garantida para qualquer um dos quatro estados citados. Ao estendermos nossa análise a vários instrumentos, encontramos que apenas linearidade já não é mais suficiente para a garantia do formato da função perda. Nossos resultados fornecem, ainda, condições sob as quais existirá dependência entre os instrumentos de política monetária.

Palavras-chave: função perda; convexidade; instrumentos monetários.

Abstract: In this paper we obtain conditions under which the central bank loss function is strictly convex in four different states of the economy: booming economy, recession, high inflation and high product. Moreover, we found that when inflation and product are linear functions of monetary policy instruments, convexity is guaranteed for any of the four states mentioned. When we extend our analysis to case of many instruments, we found that only linearity is not sufficient to guarantee the shape of loss function. Our results provide also conditions under which there exists dependence between instruments of monetary policy.

Keywords: loss function; convexity; monetary instruments.

JEL: C02; C61; E58.

Área ANPEC: Área 8 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

*Endereço: Universidade do Estado de santa Catarina - UDESC, Centro de Ciências da Administração e Socioeconômicas - ESAG, Av. Madre Benvenuta, 2037 - Itacorubí - Florianópolis - SC. CEP: 88.035-001 - Telefone (48) 3321-8200. E-mail: griebeler.marcelo@gmail.com.

†Endereço: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Av. João Pessoa, 52 sala 33 - 3° andar, Centro, Porto Alegre-RS, Brazil. CEP: 90040-000. E-mail: ottohill@ufrgs.br.

1 Introdução

Barro e Gordon (1983b), em seu trabalho sobre inconsistência temporal em política monetária e sua relação com viés inflacionário, dão origem a uma tradição de modelos que utilizam sua base formal como ponto de partida. De fato, a função objetivo do banco central (ou autoridade monetária), quadrática na inflação e linear no produto, utilizada nesse artigo, foi adaptada para as mais diversas aplicações em teoria monetária, conforme demonstra Walsh (2010). Grande parte dessas adaptações são mudanças marginais do modelo original para levar em conta distorções devido à taxação, competição monopolística e pressões do governo sobre o peso dado pelo banco central ao produto (Cuckierman, 1992).

A principal variação na forma funcional da função perda do banco central assume que suas preferências podem ser expressas por uma expressão quadrática tanto no desvio da inflação atual de um nível pré determinado - a meta de inflação, em economias com este tipo de regime monetário - quanto no desvio do produto corrente do produto potencial. Grande parte da literatura sobre as tentativas de superação do viés inflacionário adotou essa modificação, como Canzoneri (1985), Backus e Driffil (1985), Cuckierman e Meltzer (1986), Vickers (1986), Cuckierman e Liviatan (1991), Ball (1995) e Walsh (2000), por exemplo[1].

A literatura também fornece algumas variações maiores do modelo original. Jonsson (1997) e Svensson (1997b), por exemplo, modificam o modelo de Barro e Gordon (1983b) para incorporar persistência no processo do produto. Já Beetsma e Jensen (1998) incorporam um termo de choque nas preferências do banco central sobre inflação e produto, além de um contrato de inflação linear, com seu parâmetro sendo escolhido pelo governo. Giavazzi e Pagano (1998) adicionam entre as variáveis de escolha da autoridade monetária a taxa de câmbio, justificada pela preocupação com a lucratividade do setor exportador. Ainda em um ambiente com metas de inflação, a função perda também pode ser modificada para incluir a escolha explícita por parte do banco central do nível de preços a ser atingido (Walsh, 2010).

Assimetria nas preferências do banco central com relação à estabilização de preços e produto também é uma fonte importante de alterações na função perda original. Um dos principais estudos a tratar essa assimetria é Nobay e Peel (2003), o qual utiliza um arcabouço geral de política monetária ótima. Nesse trabalho, a assimetria é introduzida apenas nos desvios da inflação, devido, segundo os autores, à complexidade técnica de introduzi-la também em desvios do produto. Para economias com regimes de metas de inflação, Ruge-Murcia (2003) também usa uma função perda que dá peso maior a desvios acima da meta, quando comparados àqueles abaixo da meta de nível de preços da economia.

O que todos os trabalhos citados acima possuem em comum é a hipótese implícita de que a função perda do banco central é estritamente convexa nos instrumentos de política monetária, de modo que é sempre possível fazer escolhas que a minimizam. Mesmo trabalhos empíricos, que buscam calibrar os parâmetros das preferências da autoridade monetária partem dessa premissa[2]. Contudo, impor uma formato sobre preferências *a priori* pode ser uma restrição demasiadamente forte. Suponha, por exemplo, que a verdadeira função perda do banco central não seja estritamente convexa. A implicação da modelagem errada para a política monetária, neste caso, seria a da tomada de decisões muito distintas da ótima. As possibilidades de superação do viés inflacionário, por exemplo, mudariam drasticamente.

Outro ponto em comum nesta literatura é a modelagem das decisões de política monetária através da escolha de apenas um instrumento - frequentemente a variação da oferta de moeda. Outros modelos, ainda mais simples, assumem que a escolha do banco central é feita diretamente através do nível de inflação que vigorará na economia. Toda autoridade monetária, entretanto, possui outros

[1]Uma discussão mais aprofundada da literatura sobre soluções do viés inflacionário pode ser encontrada em Persson e Tabellini (1990).

[2]Veja, por exemplo, Pasca, Aragon e Portugal (2012) para o Peru e Aragon e Portugal (2010) para o Brasil.

instrumentos alternativos para atingir seus objetivos[3]. Alguns dos principais exemplos são a taxa de redesconto e a reserva compulsória. A taxa básica de juros da economia também pode ser vista como instrumento, embora nem sempre esteja sob o controle total do banco central.

Nesse sentido, nosso trabalho tem como objetivo estudar condições sob as quais a propriedade desejável da convexidade da função perda do banco central é garantida. Consideramos quatro possíveis estado da economia e obtemos em cada um deles condições suficientes sobre as funções de inflação e produto correntes para que a propriedade citada se verifique. Nossa análise inicialmente é feita assumindo que apenas um instrumento de política monetária está disponível. A seguir, permitimos que o banco central possa utilizar vários instrumentos para estabilizar produto e preços.

Nossos resultados mostram que, no caso de um único instrumento, inflação e produto devem responder de maneira diferente a mudanças no instrumento de política em cada um dos estados da economia estudados a fim de garantir a convexidade da função perda. Especificamente, para inflação acima (abaixo) da meta, ou produto acima (abaixo) do potencial, é condição suficiente que o efeito marginal do instrumento seja crescente (decrescente) para que a função tenha a propriedade desejada. Esse resultado indica certa assimetria nas preferências da autoridade monetária e pode ser uma justificativa teórica para trabalhos como o de Nobay e Peel (2003), por exemplo. Ainda no caso de um instrumento, mostramos que quando inflação e produto são funções lineares do instrumento, a função perda é estritamente convexa em qualquer estado da economia.

Quando mais de um instrumento de política monetária estão disponíveis ao banco central, os resultados são semelhantes aos do caso univariado. A principal diferença agora é a necessidade de um limite superior para o efeito cruzado dos instrumentos sobre produto e inflação para que a covexidade seja garantida. Ainda, encontramos que quando produto e inflação são funções lineares dos instrumentos, precisamos que as taxas marginais de substituição da inflação e do produto com relação aos instrumentos dois a dois sejam diferentes para termos a convexidade estrita da função perda em qualquer estado da economia. Esse resultado tem uma interpretação em termos de independência dos instrumentos de política monetária: em um ambiente linear, taxas marginais de substituição iguais geram instrumentos dependentes, no sentido de não ser possível escolher seus níveis individualmente.

Dessa forma, nosso trabalho contribui em dois pontos distintos com a literatura existente em economia monetária. O primeiro deles, como visto acima, diz respeito especificamente à estrutura matemática do problema de otimização do banco central. Assim, nossos resultados podem ser aplicados a qualquer modelo em que a autoridade monetária é assumida como uma tomadora de decisão. Exemplos são os trabalhos que estudam viés inflacionário e inconsistência temporal, já citados. Também contribuimos com a literatura sobre escolha ótima de instrumentos de política monetária, iniciada com Poole (1970) e analisada de forma bastante completa em Friedman (1990), ao estabelecer sob quais condições dois ou mais instrumentos são dependentes.

É importante destacar que, embora relacionado, nosso artigo difere da literatura sobre escolha de instrumentos de política monetária por abrir a possibilidade de seu uso conjunto. Para perceber melhor tal diferença, considere, por exemplo, o seminal trabalho de Poole (1970), o qual tenta responder a pergunta de qual instrumento de política monetária, entre oferta de moeda e taxa de juros, é a escolha ótima de um banco central preocupado apenas em estabilizar o produto. Utilizando um modelo IS-LM estocástico, o autor encontra que a preferência por algum dos instrumentos dependerá da magnitude das variâncias dos choques nas curvas IS e LM, bem como da inclinação destas. A diferença em relação à nossa análise fica clara ao notarmos que nesse trabalho a escolha é feita entre

[3]De fato, bancos centrais não possuem controle direto sobre inflação, taxas de juros de longo prazo e nem mesmo sobre oferta de moeda. As variáveis que estão mais próximas de seu controle total são a base monetária e taxas de juros de curto prazo. Contudo, assumir que Δm é o instrumento facilita a análise e fornece *insights* importantes. Para uma análise sobre a utilização de instrumentos de controle mais direto e sua relação com metas intermediárias de política, veja os *surveys* de Walsh (2010) e Friedman (1990).

um instrumento ou outro, não havendo possibilidade de combiná-los[4].

Este artigo está dividido da seguinte maneira. Após esta introdução, na seção 2, estudamos as condições sob as quais o problema de minimização do banco central é estritamente convexo. Analisamos individualmente os casos de um único e de mais de um instrumentos de política monetária. Em ambos fornecemos exemplos de aplicações de nossos resultados. Ainda na seção 2, estudamos a relação entre convexidade da função perda e dependência entre os instrumentos. Seção 3 fornece um exemplo de modelo com dois instrumentos de política monetária independentes. Seção 4 conclui. As demonstrações de todos nossos resultados encontram-se no apêndice.

2 Convexidade da função perda do Banco Central

2.1 O caso de um instrumento

Considere o problema do Banco Central de estabilizar preços e produto, minimizando desvios da meta de inflação e do produto potencial. Sua função objetivo pode ser expressa por $L(\pi, y; \pi^*, y^*) \in C^2$, onde π e y são a taxa de inflação e produto correntes, respectivamente. A meta de inflação, π^*, e o produto potencial, y^*, são assumidos serem parâmetros exógenos.

Como o objetivo do Banco Central é minimizar L, faremos a seguinte hipótese.

Hipótese 1 *$L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ é estritamente convexa em π e y. Em outras palavras, existem $\widehat{\pi}$ e $\widehat{y}$ únicos tais que $L(\widehat{\pi}, \widehat{y}) = \min_{\pi,y} L(\pi, y)$*[5].

Uma implicação da hipótese acima é a de que $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$[6]. Dito de outra forma, estamos assumindo que a perda de bem-estar do Banco Central varia a taxas crescentes conforme a taxa de inflação e produto correntes, individualmente, aumentam. Isso indica grande instabilidade de L para altos valores de π e y.

Também faremos outra hipótese padrão da literatura, a de que a utilidade marginal do Banco Central depende do estado da economia. Se a inflação corrente está abaixo (acima) da meta, então aumentos em π, *ceteris paribus*, aumentam (diminuem) seu bem-estar. Da mesma forma, se o produto está abaixo (acima) do potencial, sua utilidade marginal é positiva (negativa). Formalmente:

Hipótese 2 *Se $\pi > \pi^*$, então $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$, e se $\pi < \pi^*$, então $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$. Analogamente, se $y > y^*$, então $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$, e se $y < y^*$, então $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$.*

O conjunto de hipóteses 1-2 vem sendo utilizado pelos principais modelos de otimização do banco central. Considere, por exemplo, uma modificação do modelo seminal de Barro e Gordon (1983b), que tem sido a principal forma funcional de L adotada na literatura[7]:

$$L = \frac{\lambda}{2}(y - y^*)^2 + \frac{1}{2}(\pi - \pi^*)^2, \tag{1}$$

[4]Como utiliza um modelo IS-LM, Poole (1970) considera preços fixos. Para uma análise da literatura do chamado *instrument problem* pelo lado da oferta, veja Sargent e Wallace (1975) e McCallum (1981) para modelos com política monetária é neutra, e Fischer (1977a) e Phelps e Taylor (1977) para modelos sem neutralidade.

[5]Além de implicar em $\arg\min(L) = \{(\widehat{\pi}, \widehat{y})\}$, a hipótese garante que este mínimo seja interior.

[6]A hipótese é a de que o hessiano de L em π e y,

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \pi} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

é positivo definido. Logo, $|H_1| = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} > 0$. Além disso, $|H_2| = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y}\right)^2 > 0$, o que implica que $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$.

[7]Veja os trabalhos citados na introdução e o *survey* de Walsh (2010)

onde λ mede o peso relativo que o banco central coloca na estabilização do produto frente à inflação. Uma análise rápida em (1) mostra que, para $\pi, y > 0$, hipóteses 1 e 2 são satisfeitas[8].

Mesmo modelos que assumem preferências assimétricas, como Nobay e Peel (2003) satisfazem as hipóteses citadas. Considere sua função perda

$$L = \frac{e^{\alpha(\pi-\pi^*)} - \alpha(\pi - \pi^*) - 1}{\alpha^2} + \frac{\lambda}{2}(y - y^*)^2, \tag{2}$$

onde α é uma constante e λ possui a mesma interpretação que em (1). Diferenciando (2) temos hipóteses 1 e 2 satisfeitas[9].

O banco central não escolhe diretamente os níveis de inflação e produto correntes. Ele afeta tais variáveis utilizando os instrumentos de política monetária. Inicialmente vamos considerar o caso em que o único instrumento disponível é a variação da oferta de moeda, Δm[10]. Dessa forma, temos que inflação e produto são funções de Δm e de termos estocásticos u e v:

$$\pi = \pi(\Delta m, u; \pi^e) \tag{3}$$

e

$$y = y(\Delta m, v; \pi^e), \tag{4}$$

onde u e v possuem média zero e variâncias finitas σ_u^2 e σ_v^2, respectivamente. O parâmetro π^e é a expectativa de inflação dos agentes, assumida como exógena. Adicionalmente, assumimos $\pi, y \in C^2$.

É natural fazermos a hipótese de que um aumento na oferta de moeda impacte positivamente a taxa de inflação corrente. Por outro lado, supor que o produto cresça com aumentos em Δm não é algo tão intuitivo. Sabemos através da curva de Phillips com expectativas racionais que apenas inflação não esperada estimula o produto. Assim, oferta de moeda impactará positivamente y somente se causar surpresa inflacionária. Entretanto, como o único canal possível para Δm afetar y é através de π, faremos a seguinte hipótese:

Hipótese 3 *A variação na oferta de moeda afeta positivamente tanto a inflação quanto o produto. Formalmente,* $\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} > 0$ *e* $\frac{\partial y}{\partial \Delta m} > 0$.

As definições a seguir nos deixarão em condições de estabelecer nosso primeiro resultado sobre a convexidade da função perda do banco central com relação à variação da oferta de moeda. Note que cada estado abaixo também pode ser entendido utilizando a hipótese 2.

Definição 4 *Uma economia está em recessão quando sua inflação corrente é menor do que sua meta e seu produto corrente é menor do que o produto potencial. Isto é,* $\pi(\Delta m, u; \pi^e) < \pi^*$ *e* $y(\Delta m, v; \pi^e) < y^*$.

Definição 5 *Uma economia está aquecida quando sua inflação corrente é maior do que sua meta e seu produto é maior do que o produto potencial. Isto é,* $\pi(\Delta m, u; \pi^e) > \pi^*$ *e* $y(\Delta m, v; \pi^e) > y^*$.

Definição 6 *Uma economia está com inflação alta quando sua inflação corrente é maior do que a sua meta e seu produto menor do que o produto potencial. Isto é,* $\pi(\Delta m, u; \pi^e) > \pi^*$ *e* $y(\Delta m, v; \pi^e) < y^*$.

[8]Observe que $\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(y - y^*)$ e $\frac{\partial L}{\partial \pi} = (\pi - \pi^*)$, o que satisfaz hipótese 2. Além disso, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda > 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} = 1$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} = 0$, tal que $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y}\right)^2 = \lambda > 0$ implica que L é uma função estritamente convexa em π e y, satisfazendo hipótese 1.

[9]$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(y - y^*) > 0$ se $y > y^*$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$ se $y < y^*$; e $\frac{\partial L}{\partial \pi} = \frac{e^{\alpha(\pi-\pi^*)}-1}{\alpha} > 0$ se $\pi > \pi^*$ e $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ se $\pi < \pi^*$. Isso satisfaz hipótese 2. Além disso, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \lambda > 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} = e^{\alpha(\pi-\pi^*)} > 0$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y} = 0$, tal que $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \pi \partial y}\right)^2 > 0$, tal que L é estritamente convexa, satisfazendo hipótese 1.

[10]Veja nota de rodapé 3.

Definição 7 *Uma economia está com produto alto quando sua inflação corrente é menor do que a sua meta e seu produto maior do que o produto potencial. Isto é,* $\pi(\Delta m, u; \pi^e) < \pi^*$ *e* $y(\Delta m, v; \pi^e) > y^*$.

Proposição 8 *Considere a função perda do banco central* $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ *e as funções de inflação e produto correntes,* $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ *e* $y(\Delta m, v; \pi^e)$*, respectivamente. Suponha que são satisfeitas as hipóteses 1 e 2. Então, são condições suficientes para que L seja estritamente convexa em* Δm*:*
(i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} \geq 0$ *e* $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} \geq 0$*, se a economia está aquecida;*
(ii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} \leq 0$ *e* $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} \leq 0$*, se a economia está em recessão;*
(iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} \geq 0$ *e* $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} \leq 0$*, se a economia está com inflação alta;*
(iv) e $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} \leq 0$ *e* $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} \geq 0$*, se a economia está com produto alto.*

Observe que a proposição 8 indica um certo tipo de assimetria nas preferências do banco central. Com $\pi > \pi^*$, como nos casos de inflação alta e economia aquecida, se o efeito marginal da variação da oferta de moeda sobre a inflação é crescente, a convexidade estrita de L está garantida. Em outras palavras, para combater inflação deve-se ter um instrumento com efeito crescente - pela hipótese 3 - a taxas crescentes.

O contrário ocorre quando $\pi < \pi^*$. Com o nível de preços abaixo de sua meta, é suficiente para a convexidade estrita de L que o efeito da variação da oferta de moeda sobre a inflação cresça a taxas decrescentes. Isso indica que nestas situações, o "poder"do instrumento Δm deve ser decrescente conforme seu nível aumenta. De certa forma, essa diferença na resposta exigida do instrumento em cada estado da economia reflete uma assimetria entre situações com inflação acima e abaixo da sua meta. Embora trate de outro tipo de assimetria, nosso resultado pode ser visto como uma justificativa teórica para os modelos de Nobay e Peel (2003) e Ruge-Murcia (2003), por exemplo.

A mesma assimetria pode ser observada no que diz respeito ao produto. Quando este está acima do potencial, é suficiente que a variação da oferta de moeda tenha efeito marginal crescente sobre o seu nível corrente y para garantir L estritamente convexa. Por outro lado, quando o produto está abaixo do seu nível potencial, a condição suficiente é que o efeito marginal de Δm sobre y seja decrescente conforme seu nível aumente.

Corolário 9 *Se* $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ *e* $y(\Delta m, v; \pi^e)$ *são lineares em* Δm*, então* $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ *é estritamente convexa em* Δm *em qualquer um dos estados da economia.*

De fato, o resultado do corolário 9 tem sido amplamente utilizado de maneira implícita na literatura. Considere, novamente, o modelo de Barro e Gordon (1983b), seguido pela maioria dos trabalhos posteriores. As suas equivalentes de nossas funções $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$ são:

$$\pi = \Delta m + u \tag{5}$$

e

$$y = y_n + a(\pi - \pi^e) + v, \tag{6}$$

onde y_n e a são parâmetros exógenos e positivos. Equação (6) é uma função de oferta agregada do tipo Lucas, enquanto (5) explicita a relação direta entre oferta de moeda e inflação. A substituição direta de (5) em (6) é suficiente para nos certificarmos que ambas são lineares em Δm.

Perceba que o corolário 9 é apenas um resultado de suficiência. Portanto, podem existir $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, u; \pi^e)$ não lineares que tornam $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ estritamente convexa, por exemplo, em qualquer um dos quatro estados da economia. Contudo, não parece simples encontrar funções de inflação e produto com estas características e que satisfaçam a proposição 8. Apresentamos abaixo dois exemplos dessa dificuldade. Exemplo 10 substitui (6) por uma curva de Phillips convexa, de maneira que a convexidade da função perda passa a depender do valor dos parâmetros do modelo. Já o exemplo 11 mostra um L que é não convexa para determinados estados da economia.

Exemplo 10 *Seguiremos o modelo básico de Barro e Gordon (1983b), de modo que a função perda do banco central é dada pela forma padrão (1) e a função de inflação é dada por (5). A título de simplificação, assuma também que $u = v = 0$. Adotaremos a curva de Phillips convexa, proposta por Schaling (1999), conforme apresentada em Semmler e Zhang (2004)*[11]*:*

$$y = y^* - \frac{\pi - \beta r}{\phi(\psi\pi + \beta r\psi - \theta)}, \tag{7}$$

onde β mede a sensibilidade da inflação a mudanças na taxa de juros real r, ψ é um índice de curvatura da função, θ mede a sensibilidade da inflação a mudanças no desemprego e ϕ é um parâmetro de uma função não linear auxiliar utilizada na construção de (7). Assumimos que todos os parâmetros são estritamente positivos e $1 > \psi \geq 0$[12]*.*

Substituindo (5) em (7), e ambas em (1), estamos aptos a otimizar L. Sua condição de segunda ordem é dada por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} = \frac{\lambda\theta}{\phi^2}\left[\frac{2\psi(\Delta m + \beta r) + \theta}{(\psi\Delta m + \beta r\psi - \theta)^3}\right] + 1. \tag{8}$$

Suponha, agora, que o produto da economia esteja alto, de maneira que $y - y^* > 0$. Dessa forma,

$$y - y^* = \frac{-(\Delta m + \beta r)}{\phi(\psi\Delta m + \beta r\psi - \theta)} > 0, \tag{9}$$

o que implica que $\psi\Delta m + \beta r\psi - \theta < 0$. Assim, por (8), não é possível afirmar que L é convexa. De fato, neste caso, o sinal de $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2}$ dependerá dos valores dos parâmetros do modelo.

Exemplo 11 *Continuemos com a função perda dada por (1) e com a hipótese de que $u = v = 0$. Seja o produto, agora, dado por (6) e a inflação por*

$$\pi = \ln \Delta m. \tag{10}$$

Note que, neste exemplo simplificado, restringimos o domínio da função inflação a $\mathbb{R}^*_+$, tal que $\Delta m > 0$: o banco central pode escolher apenas variações estritamente positivas na oferta de moeda. Além disso, a hipótese 3 é atendida, ou seja, inflação e produto crescem com aumentos na oferta de moeda. Contudo, esse crescimento acontece a taxas decrescentes, já que $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} < 0$ para todo $\Delta m \in \mathbb{R}^*_+$.

Com a substituição de (10) e (6) em (1), a condição de segunda ordem do problema do banco central é dada por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} = \frac{\lambda a(1 - \ln\Delta m + \pi^e)}{(\Delta m)^2} + \frac{(1 - \ln\Delta m + \pi^*)}{(\Delta m)^2}, \tag{11}$$

a qual pode ser maior ou menor que zero, dependendo do sinal dos dois termos entre parênteses.

Note acima que, para a convexidade estrita de L, é suficiente que $\ln\Delta m < \min\{1 + \pi^e, 1 + \pi^*\}$. Entretanto, esta condição pode não ser satisfeita para alguns estados da economia. De fato, se a

[11] A discussão sobre a linearidade da curva de Phillips é um tópico relativamente recente na literatura. Um bom *survey* sobre modelos com curvas não lineares e suas justificativas empíricas e teóricas pode ser encontrado em Filardo (1998). Dentre os formatos não lineares mais estudados estão a convexa, a côncava e a convexa-côncava. O primeiro tipo é analisado em Clark, Laxton and Rose (1996), Schaling (1999), Laxton, Meredith e Rose (1998), Tambakis (1998), entre outros. Já o formato cônvaco pode ser encontrado nos trabalhos de Stiglitz (1997) e Eisner (1997). Por fim, Filardo (1998) discute a formulação convexa-côncava.

[12] O modelo de Schaling (1999), apresentado em Semmler e Zhang (2004), utiliza a curva de Phillips sem expectativas $\pi = -\beta r - \theta\mu$. Através da lei de Okun $g = -\mu$, onde $g = y - y^*$ é o *gap* do produto, os autores usam a função $f(g) = \frac{\phi g}{1-\psi\phi g}$, para reescrever a curva de Phillips como $\pi = -\beta r - \theta\Pi(\mu)$, onde $\Pi(\mu) = \frac{\phi\mu}{1+\psi\phi\mu}$. A expressão (7) apenas usa a lei de Okun para substituir μ na curva de Phillips acima.

economia está aquecida o suficiente, tal que $\pi - \pi^* = \ln \Delta m - \pi^* > 1$ *e* $y - y^* = a(\ln \Delta m - \pi^e) > a$*, é fácil ver em (11) que* $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} < 0$ *e, portanto,* L *não é convexa.*

2.2 Mais de um instrumento

Toda a análise da seção 2.1 foi feita baseada na hipótese de que o banco central usa um único instrumento de política monetária para estabilizar preços e produto. É natural supor que, para alcançar suas metas, esta instituição deseje utilizar tantos instrumentos quantos estiverem à sua disposição, se não os utilizando de maneira combinada, ao menos escolhendo o instrumento "ótimo", como estuda Poole (1970), por exemplo. Vamos considerar agora que, além da variação da oferta de moeda, Δm, a taxa de juros básica da economia, i, também é um instrumento de política disponível[13].

Nesse novo contexto, inflação e produto correntes podem ser afetados também pela taxa de juros, tal que $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$. Precisamos, dessa forma, acrescentar uma hipótese para incluir o efeito do novo instrumento no modelo. Assumiremos que aumentos (quedas) em i diminuem (aumentam) a inflação - através da retração da demanda agregada, por exemplo - e o produto - através do aumento do custo de capital e consequente queda do investimento.

Hipótese 12 *A taxa de juros afeta negativamente tanto inflação quanto produto. Formalmente,* $\frac{\partial \pi}{\partial i} < 0$ *e* $\frac{\partial y}{\partial i} < 0$*.*

Para garantirmos a convexidade de L quando existe mais de um instrumento de política monetária não basta mais que as derivadas segundas sejam positivas. Devemos agora analisar o seu Hessiano com relação a Δm e i e impor condições sobre o comportamento das derivadas cruzadas.

Proposição 13 *Considere a função perda do banco central* $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ *e as funções de inflação e produto correntes,* $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ *e* $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$*, respectivamente. Suponha que são satisfeitas as hipóteses 1, 2, 3 e 12. Então, são condições suficientes para que* L *seja estritamente convexa em* Δm *e* i*:*

I. com a economia aquecida:

(i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \geq 0;$

(ii) $0 \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}}$ *e* $0 \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}};$

(iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \min\{A, B, C\};$

II. com a economia em recessão:

(i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \leq 0;$

(ii) $-\sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}} \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0$ *e* $-\sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}} \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0;$

(iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \min\{A, B, C\};$

III. com economia com inflação alta:

(i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \geq 0, \frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \leq 0;$

(ii) $0 \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}}$ *e* $-\sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}} \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0;$

(iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \geq \max\{-A, B, C\};$

IV. com economia com produto alto:

(i) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2} \leq 0, \frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \geq 0;$

(ii) $-\sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}} \leq \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i} \leq 0$ *e* $0 \leq \frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \leq \sqrt{\frac{\partial^2 y}{\partial i^2}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}};$

(iii) $\frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m \partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial \Delta m \partial i} \geq \max\{-A, B, C\};$

Onde $A = \sqrt{\frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial i^2}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}}$, $B = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \Delta m^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2}$ *e* $C = \frac{\partial^2 \pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}$.

[13] Relembre comentário da nota 3.

Observe que o item (i) de cada um dos estados da economia é equivalente ao resultado da proposição 8. Sempre que a inflação corrente está acima (abaixo) da sua meta, necessitamos que ambos instrumentos tenham efeito marginal crescente (decrescente) sobre o nível de preços. Conclusão análoga podemos tirar ao se analisar o comportamento do produto.

As diferenças entre as proposições 8 e 13 estão na inclusão das restrições sobre o sinal e magnitude das derivadas cruzadas. Considere o caso da economia aquecida, por exemplo. Além de efeitos marginais de Δm e i sobre π e y crescentes, é necessário, para garantir a convexidade estrita de L, também que as derivadas cruzadas sejam positivas e limitadas superiormente, bem como seu produto.

No caso da economia aquecida, podemos interpretar as novas restrições da seguinte maneira. Assim como antes, o efeito marginal da variação da oferta de moeda (taxa de juros) sobre produto e inflação correntes deve ser crescente na taxa de juros (variação de oferta de moeda), contudo, tal crescimento agora deve ser limitado. Em outras palavras, é suficiente para que L seja estritamente convexa que individualmente os instrumentos tenham efeitos marginais crescentes sobre π e y - medidos pelas derivadas segundas próprias, porém, quando combinados, existe um limite para o crescimento dos efeitos marginais de Δm e i.

Note que um padrão emerge da proposição 13. Condições suficientes para a convexidade estrita da função perda exigem derivadas cruzadas de π com relação Δm e i positivas (negativas) sempre que $\pi > \pi^*$ ($\pi < \pi^*$). O mesmo vale para as derivadas cruzadas de y. A interpretação é semelhante aquela do caso de um instrumento, apenas incluindo-se agora a limitação da influência de uma variável sobre o efeito marginal da outra, discutido acima.

É natural imaginarmos que exista um corolário para o caso de dois instrumentos de política monetária semelhante ao do problema univariado: o fato de que se $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$ são lineares em Δm e i é suficiente para a convexidade estrita de L. Porém, esta afirmação não é verdade no caso de mais de um instrumento. De fato, outra condição precisa ser acrescentada para garantir a existência de um mínimo único para o problema do banco central.

Corolário 14 *Assuma que as hipóteses 1, 2, 3 e 12 são atendidas. Além disso, são válidas:*
(i) $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ *e* $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$ *são lineares em* Δm *e* i*;*
(ii) e $\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} \neq \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}}$*;*
Então L *é estritamente convexa em* Δm *e* i *em qualquer um dos estados da economia.*

A condição (ii) do corolário 14 afirma que a taxa marginal de substituição da inflação entre variação da oferta de moeda e taxa de juros deve ser diferente da taxa marginal de substituição do produto entre os mesmos instrumentos. Dito de outra forma, além da linearidade de π e y, é suficiente para a convexidade de L que a razão dos efeitos marginais de Δm e i seja diferente para π e y.

Para compreender melhor a importância da hipótese (ii) acima, considere a seguinte modificação do problema de otimização do banco central.

Exemplo 15 *Seja a função perda do banco central dada por*

$$L = \frac{\lambda}{2}(y - y^*)^2 + \frac{1}{2}(\pi - \pi^*)^2, \tag{12}$$

e suponha que a instituição deseja minimizar (12) escolhendo o nível da variação na oferta de moeda, Δm*, e da taxa de juros,* i*.*

Assuma também que as funções de inflação e produto correntes são dadas por

$$\pi = \pi_1 \Delta m + \pi_2 i + u \tag{13}$$

e

$$y = y^* + a(\pi - \pi^e) + v, \tag{14}$$

onde $\pi_1 > 0$*,* $\pi_2 < 0$ *e* $a > 0$*. A substituição de (13) em (14) mostra que ambas* π *e* y *são lineares em* Δm *e* i*, e que as hipóteses 3 e 12 são satisfeitas.*

Deixando L *apenas em função dos instrumentos de política monetária, temos o seguinte problema do banco central:*

$$\min_{\Delta m, i} \frac{\lambda}{2}\left(a\pi_1\Delta m + a\pi_2 i + au - a\pi^e + v\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\pi_1\Delta m + \pi_2 i + u - \pi^*\right)^2, \tag{15}$$

o qual possui solução[14]*:*

$$\Delta m = \frac{\pi^* + \lambda a(a\pi^e - v)}{(\lambda a^2+1)\pi_1} - \frac{u}{\pi_1} - \frac{\pi_2}{\pi_1} i. \tag{16}$$

Observe que o problema não possui mínimo único. Ao contrário, qualquer combinação de Δm *e* i *que satisfaça (16) é solução de (15). Em outras palavras, os instrumentos não são independentes: ou o banco central escolhe a variação de oferta de moeda e a taxa de juros se ajusta à esta escolha; ou escolhe a taxa de juros e a oferta de moeda é quem deve se ajustar.*

A razão para essa dependência é que L *é uma função convexa não estrita. Esse fato é facilmente verificado através do seu hessiano:*

$$H_2 = (\lambda a^2 + 1)\begin{bmatrix} \pi_1^2 & \pi_1\pi_2 \\ \pi_1\pi_2 & \pi_2^2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

da onde concluimos que $|H_2| = 0$ *e* $|H_1| = \pi_1^2(\lambda a^2 + 1) > 0$*. Logo,* L *possui infinitos pontos de mínimo, expressos pela reta (16).*

Podemos agora verificar que a exigência (ii) do corolário 14 não é atendida neste modelo. Note que as taxas marginais de substituição são iguais,

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{a\pi_1}{a\pi_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}}. \tag{18}$$

Outra maneira de visualizarmos a importância da relação entre as taxas marginais de substituição sobre a escolha de Δm *e* y *é através das curvas de nível de* π *e* y*. Para simplificar a análise, assuma que* $\lambda = 1$*,* $y^* = 1$*,* $\pi^* = 1$*,* $\pi_1 = 1$*,* $\pi_2 = -1$*,* $a = 2$*,* $\pi^e = 1$*,* $y_2 = -1$ *e que ambos os choques são constantes e iguais a zero,* $u = v = 0$*. Com essa especificação, temos que as curvas de nível* $\overline{\pi}$ *e* $\overline{y}$ *são expressas por:*

$$\Delta m = \overline{\pi} + i \tag{19}$$

e

$$\Delta m = \left(\frac{\overline{y} + 2}{2}\right) + i. \tag{20}$$

Note que ambas são paralelas, em decorrência da igualdade entre as taxas marginais de substi-

[14] As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Delta m} &= \pi_1(\pi_1\Delta m + \pi_2 i + u - \pi^e)(\lambda a^2 + 1) + \lambda a \pi_1 v = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial i} &= \pi_2(\pi_1\Delta m + \pi_2 i + u - \pi^e)(\lambda a^2 + 1) + \lambda a \pi_2 v = 0, \end{aligned}$$

as quais formam um sistema linearmente dependente. Esse fato pode ser constatado através da matriz de seus coeficientes ou de substituição simples.

tuição. Além disso, com os parâmetros assumindo os valores citados acima, a solução (16) torna-se

$$\Delta m = \frac{7}{5} + i, \tag{21}$$

que possui a mesma inclinação das curvas de nível (19) e (20). Para $\overline{\pi} = \overline{y} = 0$*, graficamente temos:*

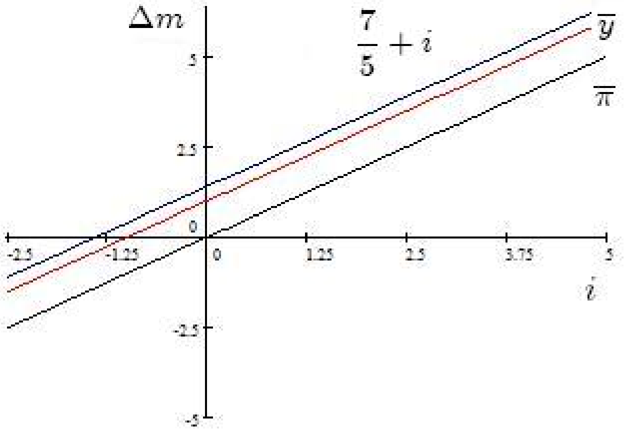

Figura 1: Instrumentos dependentes

Dado o paralelismo entre as curvas de nível e a solução, só existe uma possibilidade de resolução do problema: as três curvas serem sobrepostas. Em outras palavras, é necessário que seus interceptos sejam iguais. Quando isso acontece, temos a reta da solução tocando as curvas de nível em infinitos pontos, gerando, consequentemente, infinitas soluções para (15). No exemplo, $\overline{\pi} = \frac{7}{5}$ *e* $\overline{y} = \frac{4}{5}$ *garantem esse resultado.*

É importante destacar que esse resultado possui uma interpretação econômica interessante. Quando $\pi(\Delta m, i, u; \pi^e)$ *e* $y(\Delta m, i, v; \pi^e)$ *são lineares em* Δm *e* i*, e as taxas marginais de substituição (da variação da oferta de moeda pela taxa de juros) da inflação e do produto correntes são iguais, então não é possível utilizá-los de maneira independente para estabilizar a economia. Podemos pensar que essa igualdade cria uma espécie de substitubilidade entre os instrumentos: deve-se escolher o nível de um e de deixar a dinâmica da economia definir o valor do outro. Neste caso, faz sentido a aplicação de estudos que investigam qual o instrumento ótimo.*

O resultado encontrado no exemplo anterior pode ser generalizado para qualquer número finito $n \geq 2$ de instrumentos de política monetária à disposição do banco central.

Proposição 16 *Considere a função perda do banco central* $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ *e as funções de inflação e produto correntes* $\pi(a_1, a_2, ..., a_n, u; \pi^e)$ *e* $y(a_1, a_2, ..., a_n, v; \pi^e)$*, respectivamente, onde* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são* n *instrumentos de política monetária disponíveis. Sejam* $\pi(a_1, a_2, ..., a_n, u; \pi^e)$ *e* $y(a_1, a_2, ..., a_n, v; \pi^e)$ *lineares em* $a_1, a_2, ..., a_n$*. Além disso, suponha que*

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial a_k}}{\frac{\partial \pi}{\partial a_j}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial a_k}}{\frac{\partial y}{\partial a_j}} \tag{22}$$

para todo $k \neq j$*. Então* $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$ *é convexa (não estrita) em* $a_1, a_2, ..., a_n$*.*

O resultado acima nos diz que, em uma economia onde inflação e produto correntes são funções lineares de todos os instrumentos de política monetária, sempre que houver igualdade entre as taxas marginais de substituição da inflação e do produto entre os instrumentos k e j, estes instrumentos serão dependentes e não será possível escolher seus níveis individualmente. Por outro lado, se o banco central deseja utilizar com independência n destes instrumentos para estabilizar a economia, a única informação que temos é que é condição necessária que as taxas marginais de substituição sejam iguais.

Um resultado de suficiência para independência dos instrumentos seria uma extensão natural do corolário 14 para n instrumentos. Entretanto, em um ambiente linear, exigir apenas que as taxas marginais de substituição sejam diferentes pode não ser o suficiente, porque isso garantiria que uma linha do hessiano de ordem n de L não é múltipla da outra[15], mas não excluiria a possibilidade de outras combinações lineares.

3 Um exemplo simples com dois instrumentos independentes

A seção anterior foi encerrada com um resultado que garante instrumentos de política monetária *dependentes.* Contudo, é mais provável que seja de interesse de um banco central saber sob quais condições poderá escolher o nível de seus instrumentos de maneira *independente.* No exemplo abaixo fornecemos uma modificação simples do modelo utilizado no exemplo 15 e obtemos como escolha ótima do banco central Δm e i independentes.

Exemplo 17 *Vamos considerar a mesma estrutura do modelo analisado no exemplo 15, apenas substituindo (14) por*

$$y = y^* + a(\pi - \pi^e) + y_2 i + v, \tag{23}$$

onde $y_2 < 0$, para atender a hipótese 12. Podemos justificar a inclusão de i em (23) admitindo que a taxa de juros possui, além do efeito indireto através da taxa de inflação, um efeito direto sobre o produto corrente. Por exemplo, o impacto de mudanças em i sobre o custo de capital pode afetar o investimento e, consequentemente, o produto da economia.

Perceba que já não temos mais igualdade entre as taxas marginais de substituição de π e y:

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \neq \frac{a\pi_1}{a\pi_2 + y_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}} \tag{24}$$

O reflexo da condição acima sobre a convexidade estrita de L em relação a Δm e i pode ser visto no seu hessiano:

$$H_2 = \begin{bmatrix} \pi_1^2(a^2\lambda + 1) & \pi_1[a\lambda(a\pi_2 + y_2) + \pi_2] \\ \pi_1[a\lambda(a\pi_2 + y_2) + \pi_2] & \lambda(a\pi_2 + y_2)^2 + \pi_2^2 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

onde $|H_1| = \pi_1^2(a^2\lambda + 1) > 0$ e $|H_2| = \lambda\pi_1^2 y_2^2 > 0$. Dessa forma, taxas marginais de substituição diferentes, neste contexto, garantem a existência de um mínimo único único para o problema do banco central. Observe o papel de y_2 no resultado: se $y_2 = 0$, então (25) é igual a (17) e $|H_2| = 0$.

Graficamente também é possível ver a unicidade da solução. Considere os valores dos parâmetros propostos no exemplo 15 e $y_2 = -5$. As curvas de nível $\overline{\pi}$ e $\overline{y}$ são expressas por

$$\Delta m = \overline{\pi} + i \tag{26}$$

e

$$\Delta m = \left(\frac{\overline{y} + 1}{2}\right) + \frac{7}{2}i, \tag{27}$$

respectivamente. Observe que agora as inclinações são diferentes, o que indica a possibilidade de cruzamento entre as curvas.

Neste contexto, a autoridade monetária pode escolher a variação da oferta de moeda e taxa de juros de maneira independente, já que uma variável não é mais função da outra. O ponto $A = (1, 0)$

[15] Veja a prova da proposição 16 no apêndice.

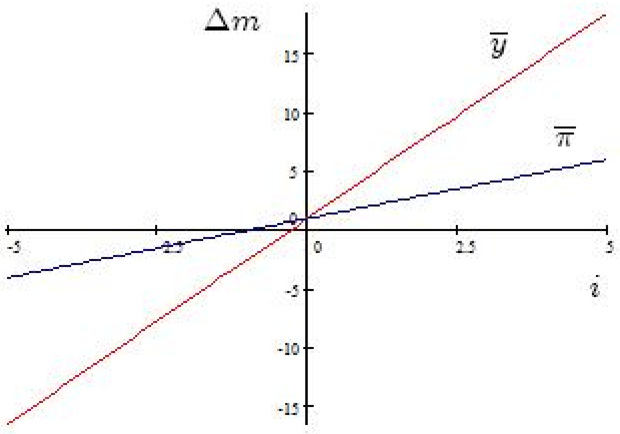

Figura 2: Instrumentos independentes

na figura acima é a solução do problema do banco central para os valores propostos dos parâmetros, obtida através das condições de primeira ordem do problema. Para $\Delta m = 1$ *e* $i = 0$*, temos* $\overline{\pi} = 1$ *e* $\overline{y} = 1$*, ou seja, produto e inflação correntes são iguais a* 1*.*

4 Conclusão

Não é claro que as preferências de um banco central qualquer possam ser expressas por uma função perda estritamente convexa em seus instrumentos de política monetária. Mesmo assim, talvez por conveniência técnica ou teórica, a grande maioria dos modelos que estudam a tomada de decisão da autoridade monetária assumem tal hipótese como válida. Dado que, se de fato a função perda não possui esse formato, as conclusões obtidas nesses modelos podem ser muito enganosas, faz-se necessário estudar sob quais condições a convexidade estrita será garantida.

Nossos resultados partem de algumas hipóteses básicas para obter condições suficientes à desejável propriedade citada acima. Dentre elas, a hipótese 2 não parece ser uma imposição forte, dado que, qualquer banco central que deseje estabilizar preços e produto apresentará tal comportamento. Da mesma forma, na hipótese 3, o fato da oferta de moeda afetar positivamente à inflação não parece questionável. Por outro lado, é possível considerar que o produto pode não ser afetado pelo lado monetário da economia. Como, de qualquer modo, não é plausível que tal efeito seja negativo, modificar a hipótese 3 de maneira que $\frac{\partial y}{\partial \Delta m} = 0$ não afetaria qualitativamente nossos resultados. Ao contrário, conjecturamos que as condições suficientes se tornariam menos restritivas. O mesmo argumento pode ser aplicado à hipótese 12, dado que não parece possível que taxas de juros afetem positivamente inflação e produto.

O relaxamente da hipótese 1, por outro lado, pode modificar de maneira substancial nossas conclusões. Na medida que a convexidade estrita em π e y não é garantida, as derivadas segundas de L podem ter qualquer sinal, o que deixaria a análise muito mais complexa, pois muitas possibilidades seriam abertas - como uma análise das demonstrações no apêndice deixa claro. Contudo, supor que pode não haver inflação e produto ótimos para o banco central faz-nos questionar sobre a própria necessidade de modelar sua tomada de decisão. De qualquer maneira, este parece ser um ponto importante a ser considerado em trabalhos futuros.

Outra possibilidade de extensão de nossos resultados é considerar que o banco central tenha mais de dois objetivos. Poderia-se, por exemplo, assumir que a autoridade monetária também preocupa-se com o câmbio, além da estabilização do nível de preços e do produto, como faz Ruge-Murcia (2003). Entretanto, novamente conjecturamos que não haverá mudança qualitativa em nossas conclusões. A análise se tornará mais complexa - por ter de lidar com matrizes de dimensões superiores na proposição 13, por exemplo -, mas acreditamos que as principais condições necessárias para a convexidade se mantém: o efeito dos instrumentos deve variar a taxas crescentes ou decrescentes conforme o estado da economia, assim como os efeitos cruzados devem ser limitados.

Também contribuimos à literatura que trata da escolha ótima dos instrumentos de política monetária. Nosso resultado de dependência mostra que modelos como o proposto por Poole (1970) podem não ser os mais adequados: sob condições de linearidade e igualdade entre as taxas marginais de substituição, não é possível escolher o nível dos instrumentos individualmente. Novamente, nossas conclusões são condicionais às hipótses assumidas e, portanto, a mesma observação em relação à possibilidade de relaxá-las feita anteriormente se aplica. Além disso, é importante que trabalhos futuros tentem obter condições suficientes também para a independência entre n instrumentos, como conjecturamos ao final da seção 2.

Por fim, vale destacar que nosso foco neste trabalho recaiu sobre condições suficientes para a obtenção de propriedades desejáveis no problema de otimização do banco central. Uma análise mais completa deve tratar também de condições necessárias. Esta é outra sugestão para trabalhos futuros, embora uma rápida análise nas demonstrações de nossos resultados, contidas no apêndice, deixem claro o grande número de possibilidades abertas e o aumento na complexidade quando se opta por este tipo de análise.

5 Referências

Aragon, E.; Portugal, M. (2010). Nonlinearities in central bank of Brazil's reaction function: the case of asymmetric preferences, **Estudos Econoômicos**, v.40, 373-399.

Backus, D. K. and J. Driffill. (1985). Inflation and Reputation, **American Economic Review**, 75(3),530-538.

Ball, L. (1995). Time Consistent Inflation Policy and Persistent Changes in Inflation, **Journal of Monetary Economics**, 36(2), 329350.

Barro, R. J. and D. B. Gordon. (1983a), A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural-Rate Model, **Journal of Political Economy**, 91(4), 589-610.

Barro, R. J. and D. B. Gordon. (1983b). Rules, Discretion, and Reputation in a Model of Monetary Policy, **Journal of Monetary Economics**, 12(1), 101-121.

Beetsma, R. and H. Jensen. (1998). Inflation Targets and Contracts with Uncertain Central Banker Preferences, **Journal of Money, Credit, and Banking**, 30(3), part 1, 384-403.

Canzoneri, M. B. (1985). Monetary Policy Games and the Role of Private Information, **American Economic Review**, 75(4), 1056-1070.

Clark, P., Douglas M. Laxton, and David E. Rose (1996). Asymmetry in the U.S. output-inflation nexus: Issues and evidence, **IMF Staff Papers**, Vol. 43, No. 1, pp216-250.

Cukierman, A. (1992). **Central Bank Strategies, Credibility and Independence**, Cambridge: MIT Press, 1992.

Cukierman, A. (2002). Are Contemporary Central Banks Transparent about Economic Models and Objectives and What Difference Does It Make?, **Federal Reserve Bank of St. Louis Review**, 84(4), 15-35.

Cukierman, A. and N. Liviatan. (1991). Optimal Accommodation by Strong Policymakers Under Incomplete Information, **Journal of Monetary Economics**, 27(1), 99-127.

Cukierman, A. and A. Meltzer. (1986). A Theory of Ambiguity, Credibility and Inflation under Discretion and Asymmetric Information, **Econometrica**, 54(5), 1099-1128.

Eisner, R. (1997). New view of the NAIRU, in Davidson, P. and Jan A. Kregel, eds., **Improving the Global Economy: Keynesian and the Growth in Output and Employment**, Edward Elgar Publishing Cheltenham: Uk and Lyme, U.S.

Filardo, A. (1998). New evidence on the output cost of fighting inflation, **Economic Review**, third quarter, pp33-61.

Fischer, S. (1977a). Long Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule, **Journal of Political Economy**, 85, 91-205.

Friedman, B. (1990). Targets and Instruments of Monetary Policy, in B. Friedman and F. Hahn (eds.), **The Handbook of Monetary Economics**, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, 11831230.

Giavazzi, F. and M. Pagano. (1998). The Advantage of Tying Ones Hands: EMS Discipline and Central Bank Credibility, **European Economic Review**, 32, 1055-1082.

Jonsson, G. (1997). Monetary Politics and Unemployment Persistence, **Journal of Monetary Economics**, 39, 303325.

Laxton , D., G. Meredith, and D. Rose (1995). Asymmetric effects of economic activity on inflation: Evidence and policy implications, **IMF Staff Papers**, vol. 42, No. 4.

McCallum, B. (1981). Price Level Determinancy with an Interest Rate Policy Rule and Rational Expectations, **Journal of Monetary Economics**, 8, 319-329.

Nobay, A. R., D. Peel. (2003). Optimal Discretionary Monetary Policy in a Model of Asymmetric Central Bank Preferences, **The Economic Journal**, 113, 657-665.

Pasca, N.; Aragon, E.; Portugal, M. (2012). Preferences of the central bank of Peru and optimal monetary rules in the inflation targeting regime, **Esttudos Econômicos**, v.42, 5-42.

Persson, T. and G. Tabellini (eds.). (1990). **Macroeconomic Policy, Credibility and Politics**, Chur, Switzerland: Harwood Academic.

Phelps, E. and Taylor, J. (1977). Stabilization Powers of Monetary Policy under Rational Expectations, **Journal of Political Economy**, 85, 163-190.

Poole, W. (1970). Optimal Choice of Monetary Policy Instrument in a Simple Stochastic Macro Model, **Quartely Journal of Economics**, 84, 197-216.

Ruge-Murcia, F. (2003). Inflation Targeting under Asymmetric Preferences, **Journal of Money, Credit, and Banking**, 35 (5), 763-785.

Sargent, T. and Wallace, N. (1975). Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule, **Journal of Political Economy**, 83, 241-254.

Semmler, W. and Zhang, W. (2006). **Monetary Policy with Nonlinear Phillips Curve and Endogenous NAIRU**, in: Chiarella, C., Franke, R., Flaschel, P. and Semmler, W. (eds.), Contributions to Economic Analysis, vol. 277, 483-515.

Schaling, E. (1999). **The nonlinear Phillips curve and infation forecast targeting**, Bank of England.

Stiglitz, Joseph (1997). Reflections on the natural rate hypothesis, **Journal of Economic Perspectives**, Vol. 11, pp3-10.

Tambakis, Demosthenes N. (1998). Monetary policy with a convex Phillips curve and asymmetric loss, **working paper 98/21, IMF**.

Walsh, C. E. (2010). **Monetary Theory and Policy**, 3a ed., Cambridge: MIT Press.

6 Apêndice

Prova. (**Proposição 8**) O primeiro passo é substituir (3) e (4) em $L(\pi, y; \pi^*, y^*)$, de modo que temos $L(\pi(\Delta m, u; \pi^e), y(\Delta m, v; \pi^e); \pi^*, y^*)$. Derivando através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial \pi}\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \Delta m}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}. \tag{28}$$

Pela hipótese 1, $\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$. Assim, utilizando a hipótese 2, temos que:

(i) se a economia está aquecida, $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} > 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} > 0$;

(ii) se a economia está em recessão, $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} < 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} > 0$;

(iii) se a economia está com inflação alta, $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} > 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} < 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} > 0$;

(iv) e se a economia está com produto alto, $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} > 0$ implicam $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} > 0$;

Dessa forma, concluimos a demonstração. ■

Prova. (**Corolário 9**) Se $\pi(\Delta m, u; \pi^e)$ e $y(\Delta m, v; \pi^e)$ são lineares em Δm, então $\frac{\partial^2 \pi}{\partial(\Delta m)^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} = 0$. Por (28), fica claro que $\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} > 0$. ■

Prova. (**Proposição 13**) Considere o hessiano do problema do banco central com dois instrumentos de política monetária

$$H_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m \partial i} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \Delta m \partial i} & \frac{\partial^2 L}{\partial i^2} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

onde as derivadas parciais de segunda ordem da sua função perda são dadas por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\left(\frac{\partial\pi}{\partial i}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial^2\pi}{\partial i^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial i}\right)^2 + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\Delta m\partial i} = \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial\pi}{\partial i}\right) + \frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\frac{\partial y}{\partial i}\right) + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}. \tag{32}$$

Devemos mostrar que $|H_2| > 0$ para cada um dos estados da economia, já que para garantir $|H_1| > 0$ podemos usar o resultado da proposição 8. Note que o determinante de H_2 é dado por

$$\begin{aligned}
|H_2| &= \frac{\partial^2 L}{\partial(\Delta m)^2}\frac{\partial^2 L}{\partial i^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\Delta m\partial i}\right)^2 \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial L}{\partial\pi}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2\pi}{\partial i^2} - \frac{\partial\pi}{\partial i}\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial y}{\partial i} - \frac{\partial\pi}{\partial i}\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial L}{\partial y}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\frac{\partial\pi}{\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial\pi}{\partial i}\left(\frac{\partial\pi}{\partial i}\frac{\partial^2\pi}{\partial(\Delta m)^2} - \frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial\pi}\right)^2\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial i^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial(\Delta m)^2} - \left(\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial i}\left(\frac{\partial y}{\partial i}\frac{\partial^2\pi}{\partial(\Delta m)^2} - \frac{\partial y}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial L}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial(\Delta m)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial L}{\partial\pi}\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\left(\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2\pi}{\partial i^2} - \frac{\partial y}{\partial i}\frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\left(\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \frac{\partial y}{\partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}\frac{\partial\pi}{\partial i}\left(\frac{\partial\pi}{\partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} - \frac{\partial\pi}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial\pi}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial i^2} - \frac{\partial^2\pi}{\partial\Delta m\partial i}\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial i}\left(\frac{\partial y}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2} - \frac{\partial y}{\partial\Delta m}\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2\left[\frac{\partial^2 y}{\partial(\Delta m)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial i^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial\Delta m\partial i}\right)^2\right] \\
&= A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K + L + M
\end{aligned} \tag{33}$$

Vamos analisar cada estado da economia individualmente e mostrar que todos os termos do somatório acima - com a exceção de um, como veremos - são positivos, quando aplicamos as condições que a proposição 13 impõe. A exceção é o termo B, que é não negativo em qualquer estado, dado que $\frac{\partial^2 L}{\partial\pi^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} > 0$ pela hipótese 1.

I. Economia aquecida. Neste caso, pela hipótese 2 temos $\frac{\partial L}{\partial\pi}, \frac{\partial L}{\partial y} > 0$. Usando ainda as hipóteses 2, 3 e 12, temos que os termos fora dos parênteses em A, C, E, G, H, I, K e M são positivos. Utilizando-se as condições (i), (ii) e (iii), é possível ver que os termos dentro dos parênteses também serão positivos paara todas as letras. Ainda, para D, F, J e L, os termos fora dos parênteses são negativos. Aplicando (i), (ii) e (iii), temos que o termo dentro do parênteses também será negativo para estas letras. Portanto, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$, o que implica $|H_2| > 0$.

II. Economia em recessão. Agora temos $\frac{\partial L}{\partial \pi}, \frac{\partial L}{\partial y} < 0$. Os termos fora dos parênteses de D, E, F, G, J, K, L e M são positivos. Usando (i), (ii) e (iii), temos que seus termos dentro dos parênteses também o são. Já para A, C e H, os termos fora dos parênteses são negativos, contudo, as condições (i), (ii) e (iii) garantem que os termos dentro do parênteses tenham o mesmo sinal. Logo, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$,implicando $|H_2| > 0$.

III. Inflação alta. Temos $\frac{\partial L}{\partial \pi} > 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} < 0$. Agora, A, E, H, J, L e M possuem seus termos de fora dos parênteses maiores que zero, enquanto que C, D, F, G, I e K possuem tais termos negativos. Aplicando (i), (ii) e (iii), o primeiro grupo tem seus termos de dentro dos parênteses positivos e o segundo, negativos. Logo, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$. Assim, $|H_2| > 0$.

IV. Produto alto. Neste caso, $\frac{\partial L}{\partial \pi} < 0$ e $\frac{\partial L}{\partial y} > 0$. Note que, agora, C, E, I e M têm seus termos de fora dos parênteses positivos, enquanto que A, D, F, G, H, J, K e L têm estes termos com sinal negativo. Como, quando usamos (i), (ii) e (iii), os termos de dentro do parênteses do primeiro grupo são positivos e do segundo, negativos, $A, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M > 0$. Logo, $|H_2| > 0$. ■

Prova. (**Corolário 14**) Observe que (i) implica que todas as derivas parcias de segunda ordem de π e y são nulas. Dessa forma, (33) torna-se

$$|H_2| = B = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial y}{\partial i} - \frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial y}{\partial \Delta m} \right)^2, \tag{34}$$

o qual é não negativo, dada a hipótese 1. Observe, ainda, que $|H_2| > 0$ se, e somente se, $\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m} \frac{\partial y}{\partial i} \neq \frac{\partial \pi}{\partial i} \frac{\partial y}{\partial \Delta m}$. Reescrevendo esta última expressão temos a condição (ii):

$$\frac{\frac{\partial \pi}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial \pi}{\partial i}} \neq \frac{\frac{\partial y}{\partial \Delta m}}{\frac{\partial y}{\partial i}}. \tag{35}$$

■

Prova. (**Proposição 16**) Considere o hessiano do problema com n instrumentos,

$$H_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_n \partial a_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_n \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_n^2} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Devemos mostrar que $|H_i| \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$ e $|H_j| > 0$ para algum j, tal que L é uma função convexa não estrita. Começamos considerando as derivadas que compõe as duas primeiras linhas de H_n:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial a_1^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^2 && (37)\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_1}\frac{\partial \pi}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y}{\partial a_2} && (38)\\
&\vdots\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial a_n} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_1}\frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y}{\partial a_n} && (39)\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_1} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_2}\frac{\partial \pi}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y}{\partial a_1} && (40)\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a_2^2} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_2}\right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\right)^2 && (41)\\
&\vdots\\
\frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_n} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_2}\frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y}{\partial a_n}, && (42)
\end{aligned}$$

onde as derivadas parciais de segunda ordem de π e y estão ausentes porque são nulas pela hipótese de linearidade.

Note que ao multiplicarmos os elementos da primeira linha de H_n por $\frac{\partial y}{\partial a_2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^{-1}$ e usarmos a hipótese de que $\frac{\partial \pi}{\partial a_i}\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_j}\right)^{-1} = \frac{\partial y}{\partial a_i}\left(\frac{\partial y}{\partial a_j}\right)^{-1}$ para $i = 1$ e $j = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial a_2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^2\right] &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_2}\frac{\partial \pi}{\partial a_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y}{\partial a_1}\\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_1} && (43)\\
\frac{\partial y}{\partial a_2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_1}\frac{\partial \pi}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y}{\partial a_2}\right] &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_2}\right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\right)^2\\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial a_2^2} && (44)\\
&\vdots\\
\frac{\partial y}{\partial a_2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^{-1}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_1}\frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y}{\partial a_n}\right] &= \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\frac{\partial \pi}{\partial a_2}\frac{\partial \pi}{\partial a_n} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y}{\partial a_n}\\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial a_2 \partial a_n}, && (45)
\end{aligned}$$

o que mostra que a primeira linha é múltipla da segunda. Dessa forma, $|H_n| = 0$. É possível aplicar o mesmo argumento para qualquer menor principal de dimensão $n > 1$, tal que $|H_n| = 0$.

Para completar a prova, basta lembrarmos que os elementos da diagonal principal de H_n,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_i^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial a_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial a_i}\right)^2 > 0 \qquad (46)$$

para $i = 1, ..., n$ pela hipótese 1. ■