

Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart

João F. Caldeira^b, Guilherme V. Moura^a, André A. P. Santos^a

^a*Departamento de Economia
Universidade Federal de Santa Catarina*

^b*Departamento de Economia
Universidade Federal do Rio Grande do Sul*

Abstract

We use the Fama-French-Carhart factor model to obtain shortselling-constrained and unconstrained minimum variance portfolios. For that purpose, we generate conditional covariance matrices based on a recent multivariate factor GARCH specification with a flexible modeling strategy for the common factors, for the individual assets, and for the factor loads proposed by ?. An application involving 61 stocks traded on the São Paulo stock exchange (BM&FBovespa) shows that the proposed specification delivers less risky portfolios on an out-of-sample basis in comparison to several benchmark models, including existing factor approaches.

Resumo

Neste artigo utilizamos o modelo fatorial Fama-French-Carhart para obter portfólios ótimos de mínima variância irrestritos e restritos para vendas a descoberto. Para esse propósito, geramos matrizes de covariâncias condicionais com base em uma recente especificação GARCH fatorial multivariada proposta por ? a qual adota uma modelagem flexível para os fatores comuns, para os ativos individuais, e para os pesos dos fatores. Uma aplicação envolvendo 61 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBovespa) mostrou que a especificação proposta gera portfólios menos arriscados fora da amostra em comparação com várias especificações *benchmark*, incluindo modelos fatoriais existentes.

Keywords: correlação condicional dinâmica (DCC), previsão, Filtro de Kalman, CAPM com aprendizagem, otimização de carteiras, avaliação de performance

JEL C53, E43, G17

1. Introdução

O modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) de ? e ?, sustentado pela teoria de portfólio eficiente por média e variância, postula que o beta associado ao excesso de retorno da carteira de mercado é suficiente para explicar o retorno esperado dos ativos. O modelo busca determinar a taxa de retorno teórica apropriada de um determinado ativo em relação a uma carteira de mercado perfeitamente diversificada. O modelo leva em conta a sensibilidade do ativo ao risco não-diversificável (também conhecido como risco sistemático ou risco de mercado), representado pelo beta (β), bem como o retorno esperado do fator mercado e o retorno esperado de um ativo teoricamente livre de risco. O modelo CAPM é amplamente utilizado no mundo até hoje, sendo que seus estudos praticamente dominaram os trabalhos acadêmicos na área de apreçamento de ativos durante mais de três décadas. Por este modelo, o retorno de qualquer ativo é determinado pelo retorno do ativo livre de risco e pelo beta multiplicado pelo fator de risco de mercado. Trata-se, portanto, de um modelo de fator único, o fator de risco mercado, que seria o fator que explica a diferença de retorno exigido entre os ativos, numa relação linear.

Diversos estudos passaram a testar empiricamente a validade do modelo CAPM. Muitos estudos encontraram evidências empíricas no sentido de validação do modelo, por exemplo, ? e ?. No entanto, o desenvolvimento de novas técnicas econométricas e avanços computacionais trouxeram ao debate suas deficiências, principalmente por tratar-se de um modelo no qual apenas uma variável é responsável pela determinação do retorno dos ativos. ?, verifica que o modelo CAPM prevê retornos muito baixos para empresas pequenas (*small caps*). ?, mostra que a razão preço/dividendos (*price-to-earnings* - P/E) é negativamente relacionado aos retornos, controlando para o beta de mercado, sugerindo que o modelo CAPM prevê retornos muito altos para firmas com elevada razão P/E. Outros estudos que identificaram tais deficiências e terminaram por caracterizar algumas anomalias de mercado, pode-se citar ?, ? e ?. Entre as explicações concorrentes para a limitada capacidade do modelo CAPM em explicar as variações dos retornos das ações, ? argumentam que as anomalias de mercado são em grande parte explicadas pelos fatores tamanho e *book-to-market*. Fama & French observaram que duas classes de ações tendem a apresentar melhor desempenho do que o mercado como um todo: *small caps* e ações com alta razão *book-to-market* (geralmente denominadas ações de valor, em contraste com ações de crescimento). Adicionaram, então, dois fatores ao modelo CAPM para refletir a exposição de um portfólio a essas duas classes e formularam o modelo de três fatores, em que os fatores de risco do modelo são o mercado, análogo ao modelo CAPM clássico,

o tamanho da empresa, definido pelo valor de mercado do patrimônio líquido e o índice *book-to-market* ou B/M, definido pela relação entre o valor contábil e de mercado do patrimônio líquido. Os dois últimos fatores medem os excessos de retornos de ações *small caps* sobre *large caps* e ações de valor sobre ações de crescimento, respectivamente. Em outra linha, ? observam que algumas dessas anomalias se devem às características específicas das firmas. Ambos os argumentos são amplamente baseados na comparação de retornos esperados, dizendo pouco sobre quão importante é cada uma das explicações para as decisões do investidor em geral e em particular para otimização de portfólios.

?, argumentam que o modelo de três fatores captura a maior parte das anomalias não assimiladas pelo fator mercado, exceto a anomalia denominada momento. Vários estudos mostram que os retornos das ações são relacionados à performance passada, isto é, ações com bom desempenho no passado tendem a apresentar bom desempenho no futuro e mau desempenho passado indica mau desempenho futuro. ?? e ? usam amostras de ações norte-americanas e encontram evidências de que quando são construídos portfólios ao longo de horizontes de curto prazo (de três meses a um ano), a performance das ações em termos de retorno apresentam elevada persistência. Uma estratégia que consiste da compra de ações com bom desempenho nos seis meses anteriores (ações no primeiro decil de performance) e na venda de ações com mau desempenho nos últimos seis meses (ações no último decil de performance) gera um ganho de aproximadamente 1% ao mês. ? identifica o fator momento nos retornos de ações em uma amostra de 12 países europeus para o período de 1980 a 1995. ? mostra que uma estratégia baseada em momento gera ganhos positivos em mercados emergentes, incluindo o Brasil.

Uma vez identificado o fator momento, alguns estudos, sendo pioneiro o trabalho de ?, passaram a adicioná-lo ao modelo de três fatores de ?, construindo o que ficou conhecido como modelo de quatro fatores. ?, encontra evidências empíricas de que a inclusão do fator momento, proposto por ?, melhora a explicação dos retornos. ?, mostra que o efeito momento de um ano identificado em ? é responsável por grande parte da persistência na performance de fundos de investimentos encontrada por ?, e que as diferenças nas despesas e custos de transação podem explicar aproximadamente toda a persistência restante. Outros autores aplicaram o modelo de quatro fatores na tentativa de explicar os retornos de ações, entre os quais podemos citar os trabalhos de ?, ?, ?, ? e ? . ? testaram o modelo de ? para o mercado brasileiro, encontrando evidências de sua superioridade em relação ao CAPM, na explicação das variações dos retornos das carteiras. ? testam empiricamente a capacidade do modelo de quatro fatores em explicar as variações dos retornos das ações listadas

na Bovespa, comparando os resultados com aqueles obtidos com o modelo CAPM e modelo de três fatores. Os autores usaram uma base de dados de 1995 a 2006 e encontram evidências favoráveis à utilização do modelo de quatro fatores no mercado brasileiro. Além disso, encontram que no período analisado o fator momento apresentou sinal negativo.

Neste artigo propomos a utilização do modelo fatorial Fama-French-Carhart para a obtenção de portfólios ótimos de mínima variância (PMV) utilizando uma amostra de ações negociadas no mercado brasileiro. Vale observar que os PMV tem sido amplamente utilizados na literatura (???), em função da sua relevância prática e da disponibilidade de uma solução em forma fechada no caso em que vendas a descoberto sejam permitidas. ? observa que, para obter portfólios de mínima variância, é necessário primeiramente estimar a matriz de covariâncias entre os ativos envolvidos no problema. De fato, a estimação de matrizes de covariância para portfólios com um grande número de ativos se mantém como um dos desafios fundamentais em muitas áreas da economia financeira, tais como apreçamento de ativos, otimização de portfólios e gestão de risco de mercado. A maioria das tentativas iniciais de construir modelos para variâncias condicionais, tais como o modelo VEC de ? e o modelo BEKK de ?, entre outros, sofrem da chamada maldição da dimensionalidade. Nestas especificações o número de parâmetros cresce muito rapidamente a medida que a dimensão do problema aumenta, criando dificuldades no processo de estimação e gerando erro de estimação nas matrizes de covariâncias obtidas.

Como forma de obter matrizes de variâncias condicionais para problemas envolvendo um grande número de ativos, aplicamos neste artigo uma especificação econométrica proposta recentemente por ? denominada DFGARCH (*dynamic factor multivariate GARCH model*) a qual baseia-se em um modelo de fatores dinâmicos flexível. A metodologia proposta estende as especificações econométricas prévias em ao menos dois aspectos. Primeiro, a abordagem proposta é bastante flexível permitindo o uso de diferentes especificações econométricas para os fatores comuns e para os ativos individuais em um portfólio. Em particular, o modelo permite uma especificação multivariada parcimoniosa para as covariâncias entre os fatores com base em um modelo de correlação condicional dinâmica e considera diferentes especificações GARCH univariadas para modelar a volatilidade dos ativos individuais. Além disso, os pesos dos fatores são tratados como variáveis latentes com uma dinâmica baseada em recentes desenvolvimentos na teoria de apreçamento de ativos (?).

Aplicamos o modelo DFGARCH de ? para obter previsões um passo à frente dentro e fora da amostra para as matrizes de covariância de 61 ações negociadas no mercado brasileiro durante o

período amostral e usamos essas matrizes para estimar PMV irrestritos e com restrição de venda a descoberto. A performance do modelo proposto é comparada àquela obtida por diversos modelos *benchmark* alternativos, incluindo modelos fatoriais existentes. Os resultados indicam que o modelo proposto resulta em portfólios com menor nível de risco em comparação aos modelos *benchmark*, além de apresentar melhor performance em termos de retornos ajustados pelo risco na maioria dos experimentos fora da amostra.

O artigo é organizado como segue. Na seção 2 descrevemos a especificação do modelo e fornecemos detalhes da estimação e dos modelos relacionados. Na seção 3 discutimos uma aplicação no contexto de otimização de portfólios e propomos uma metodologia para avaliação da performance para fora da amostra. Finalmente, a seção 4 apresenta uma síntese conclusiva do artigo.

2. O Modelo

A extensão do modelo de três fatores de ? proposta por ? é dada por

$$y_{it} = \alpha_{it} + \beta_{1it}(R_m - R_f) + \beta_{2it}SMB_t + \beta_{3it}HML_t + \beta_{4it}PR1YR_t + \varepsilon_{it} \quad (1)$$

onde $R_m - R_f$ é o excesso de retorno ponderado pelo valor de mercado (capitalização a mercado) de todas as ações que fizeram parte do índice Ibovespa durante o período amostral sobre a taxa de juros do CDI diário. SMB , HML e $PR1YR$ são os retornos de fatores que imitam portfólios que não envolvem investimentos líquidos, em que o primeiro consiste em comprar ações de firmas pequenas (*small caps*) e vender ações de firmas grandes (*large caps*), a segunda envolve a compra de ações com elevada razão *book-to-market* e vender ações com baixa razão *book-to-market*. Já o último fator envolve a compra de ações que tiveram um bom desempenho nos últimos doze meses e venda de ações que apresentaram um mau desempenho nos últimos doze meses. Para construir as carteiras, foi utilizada uma metodologia semelhante a ? e ?. Além disso, o peso de cada ativo na carteira é determinado pela capitalização a mercado da empresa. $\varepsilon_{it} \sim N(0, h_{it})$ é o i -ésimo erro de medida, e β_{it} é a i -ésima linha da matriz contendo os pesos dos fatores β_t com dimensão $N \times K$, onde N é o número de ativos e K é o número de fatores. Por suposição os fatores f_t são i) condicionalmente ortogonais aos erros de medida, $E[f_{it} \varepsilon_{jt} | \mathfrak{S}_{t-1}] = 0 \forall i \in \{1, \dots, K\} \forall j \in \{1, \dots, N\}$ e ii) *não* são condicionalmente mutuamente ortogonais, i.e, $E[f_{it} f_{jt} | \mathfrak{S}_{t-1}] \neq 0 \forall i \neq j$, onde f_i é o i -ésimo fator e \mathfrak{S}_{t-1} denota o conjunto de informações disponíveis até $t - 1$. Além disso, assumimos

que os erros de medida são condicionalmente ortogonais com variância condicional variante no tempo, i.e $E[\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}|\mathfrak{S}_{t-1}] = 0 \forall i \neq j$ and $E[\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}|\mathfrak{S}_{t-1}] = h_{it} \forall i = j$.

Uma importante característica da especificação em (1) é que os pesos dos fatores são variantes no tempo. As evidências existentes sugerem que permitir que os pesos dos fatores variem ao longo do tempo leva a ganhos em termos de erros de apreçamento e acurácia de previsão; a esse respeito ver, por exemplo, ?, ?, e ?. Neste artigo, seguimos a metodologia proposta por ? e assumimos que cada β_t em (1) evolui de acordo com duas leis de movimento alternativas. A primeira lei de movimento considera que os pesos dos fatores são não-observáveis e seguem um *random walk* (RW),

$$\beta_{it} = \beta_{it-1} + u_{it} \quad (2)$$

onde $u_{it} \sim N(0, \Sigma_{u_i})$ é o vetor de erros $1 \times K$ na lei de movimento dos pesos dos fatores, ε_{it} e u_{it} são independentes. A segunda lei de movimento considerada é baseada no modelo de aprendizagem dos fatores proposto por ?. No modelo de aprendizagem, o peso dos fatores segue um processo de reversão à média no qual investidores desconhecem seu nível de longo prazo. Consequentemente, no modelo de aprendizagem é preciso inferir, por um lado, o nível corrente do peso do fator e, por outro, sua média de longo prazo a partir do histórico dos retornos observados. Desta forma, cada β_{it} evolui de acordo com

$$\beta_{it} = (1 - \phi)B_{it} + \phi\beta_{it-1} + u_{it} \quad (3)$$

$$B_{it} = B_{it-1} \quad (4)$$

onde B_{it} é o valor esperado da média de longo prazo de β_t no tempo t , $u_{it} \sim N(0, \Sigma_{u_i})$ é um vetor de erros $1 \times K$ na lei de movimento dos pesos dos fatores no modelo de aprendizagem. Finalmente, é assumido que ε_{it} e u_{it} são independentes.

A matriz de covariância condicional, H_t , do vetor de retornos em (1) é dada por

$$H_t = \beta_t \Omega_t \beta_t' + \Xi_t \quad (5)$$

onde Ω_t é uma matriz simétrica e positiva definida de covariância condicional dos fatores, e Ξ_t é uma matriz diagonal de covariância dos resíduos do modelo fatorial em (1), ou seja, $\Xi_t = \text{diag}(h_{1t}, \dots, h_{Nt})$, onde *diag* é um operador que transforma o vetor $N \times 1$ em uma matriz dia-

gonal $N \times N$ e h_{it} é a variância condicional do resíduo do i -ésimo ativo. Note que, por definição, os dois termos do lado direito em (5) são positivo definidos de modo que fica assegurado que a matriz de covariância H_t é positiva definida para todo t .

Para obter a matriz de covariância condicional dos fatores, Ω_t , em (5) podem ser consideradas especificações alternativas, incluindo modelos GARCH multivariados (ver ? e ? para uma revisão mais detalhada) e modelos de volatilidade estocástica (??). Neste artigo, consideramos o modelo de correlações condicionais dinâmicas (*dynamic conditional correlation* - DCC) proposto por ?, o qual é dado por

$$\Omega_t = D_t R_t D_t \quad (6)$$

onde $D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{f_{1t}}}, \dots, \sqrt{h_{f_{kt}}})$, $h_{f_{kt}}$ é a variância condicional do k -th fator, e R_t é uma matriz simétrica positiva definida das correlações condicionais com elementos $\rho_{ij,t}$, onde $\rho_{ii,t} = 1$, $i, j = 1, \dots, K$. No modelo DCC a correlação condicional $\rho_{ij,t}$ é dada por

$$\rho_{ij,t} = \frac{q_{ij,t}}{\sqrt{q_{ii,t}q_{jj,t}}} \quad (7)$$

onde $q_{ij,t}$, $i, j = 1, \dots, K$, são colocados na matriz Q_t , $K \times K$, à qual assume-se que segue um processo GARCH,

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{Q} + \alpha z_{t-1} z'_{t-1} + \beta Q_{t-1} \quad (8)$$

onde $z_{ft} = (z_{f_{1t}}, \dots, z_{f_{kt}})$ com elementos $z_{f_{it}} = f_{it} / \sqrt{h_{f_{it}}}$ sendo o retorno padronizado do fator, \bar{Q} é a matriz de covariância incondicional de z_t , $K \times K$, α e β são parâmetros escalares não negativos satisfazendo $\alpha + \beta < 1$.

Assim como em ?, seguimos uma estratégia similar à de ? e consideramos diferentes especificações do tipo GARCH para modelar a variância condicional dos fatores $h_{f_{kt}}$, e a variância condicional dos resíduos, h_{it} . Em particular, utilizamos o modelo GARCH de ?, o modelo GJR-GARCH assimétrico de ?, o modelo exponencial GARCH (EGARCH) de ?, o modelo threshold GARCH (TGARCH) de ?, o modelo exponencial GARCH assimétrico (APARCH) de ?, o modelo GARCH assimétrico de ?, e o modelo GARCH não linear assimétrico (NAGARCH) de ?. Em todos os modelos usamos sua versão mais simples, em que a variância condicional depende apenas em uma defasagem dos retornos e da variância condicional. No Apêndice descrevemos a especificação econométrica de cada um desses modelos.

2.1. Estimação

O modelo DFGARCH é estimado através de um procedimento em multi-etapas. Primeiramente, são estimados os pesos dos fatores variantes no tempo em (1) via máxima verossimilhança (ML). Na segunda etapa, são obtidas as matrizes de covariâncias condicionais dos fatores em (6) ajustando um modelo DCC para as séries temporais dos retornos dos fatores, assumindo que as inovações são Gaussianas. Os parâmetros do modelo DCC são estimados usando o método de máxima verossimilhança composta (CL) proposto por ?. Finalmente, consideramos especificações GARCH univariadas alternativas para obter as variâncias condicionais dos resíduos do modelo de fatores. Para cada série dos resíduos, escolhemos a especificação que maximiza o Critério de Informação de Akaike (AIC). Na próxima seção apresentamos mais detalhes dos procedimentos de estimação.

Estimação dos Pesos dos Fatores Variando no Tempo

Dados os fatores f_t , os sistemas de equações (1)-(2) e (1)-(3) geram um sistema linear e um modelo em espaços de estados Gaussiano para cada ativo i :

$$y_{it} = C_t x_{it} + \varepsilon_{it} \quad (9)$$

$$x_{it} = F x_{it-1} + R u_{it} \quad (10)$$

onde C_t contém os fatores e x_{it} os pesos dos fatores variantes no tempo, os quais são tratados como estados não observados. A matriz de transição F garante que os estados evoluem de acordo com (2) e (3)-(4) no modelo RW e modelo de aprendizagem, respectivamente.¹ O termo de erro u_t é normalmente distribuído com média zero e matriz de covariância Σ_{u_i} , R é uma coleção de vetores em que as entradas são 0 ou 1. Este modelo pode ser estimado por ML usando o filtro de Kalman para construir a verossimilhança da função, a qual é maximizada para obter os parâmetros estimados.

O vetor de estados não observados, x_{it} , o qual no caso do modelo de aprendizagem inclui não apenas β_{it} mas também B_{it} , pode ser estimado condicionado às informações passadas e correntes y_{i1}, \dots, y_{it} via filtro de Kalman. Tomando como base $x_{it|t-1}$ e $P_{t|t-1}$, quando a observação y_{it} é disponível, o erro de predição pode ser calculado $v_{it} = y_{it} - f_t' x_{it|t-1}$. Assim, depois da observação

¹Note que o vetor de estados no modelo de aprendizagem contém não apenas $\beta_{i,t}$ mas também B_{it} , assim, C_t deve incluir algumas colunas de zeros.

y_{it} , uma inferência mais acurada de $x_{it|t}$ e $P_{t|t}$ pode ser obtida:

$$x_{it|t} = x_{it|t-1} + P_{t|t-1}f_t'\Delta_t^{-1}v_t,$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}f_t'\Delta_t^{-1}f_tP_{t|t-1},$$

onde $\Delta_t = f_t'P_{t|t-1}f_t + \sigma_v$ é o erro de predição da matriz de covariância. Uma estimativa do vetor de estados no período $t + 1$ condicional a y_1, \dots, y_t , é dada pelo passo da predição

$$x_{t+1|t} = Fx_{t|t},$$

$$P_{t+1|t} = FP_{t|t}F' + R\Sigma_{u_i}R'. \quad (11)$$

Para uma dada série de tempo y_1, \dots, y_T , os cálculos do filtro de Kalman são realizados recursivamente para $t = 1, \dots, T$. Por causa da não estacionariedade da equação de transição (2), a inicialização foi implementada usando o filtro de Kalman inicial exato proposto por ?. Os parâmetros na matriz de covariância Σ_{u_i} são tratados como coeficientes desconhecidos os quais são colocados no vetor de parâmetros ψ . A estimação de ψ é baseada em otimização numérica da função de verossimilhança, que é construída via decomposição do erro de predição e dada por:²

$$l(\psi) = -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T v_t' \log F_t^{-1} v_t. \quad (12)$$

Estimação da Matriz de Covariância Condicional dos Fatores

Para obter a matriz de covariância condicional dos fatores, Ω_t , usamos uma especificação DCC em (6). A estimação do modelo DCC pode ser convenientemente dividida em uma parte da volatilidade e outra parte da correlação. A parte da volatilidade refere-se à estimação das volatilidades condicionais univariadas dos fatores através de uma especificação do tipo GARCH. Os parâmetros dos modelos de volatilidade univariados são estimados por quase máxima verossimilhança (QML)

²Para detalhes a respeito da estimação dos parâmetros e estados através do filtro de Kalman, ver ?. Para uma derivação completa do filtro de Kalman para o modelo CAPM com aprendizagem, ver o apêndice B em ?.

assumindo inovações Gaussianas.³ A parte da correlação refere-se a estimação da matriz de correlação condicional em (7) e (8). Para estimar os parâmetros da parte da correlação, empregamos o método CL proposto por ?. Como destacaram ?, o estimador CL oferece estimativas mais acuradas dos parâmetros estimados em comparação com procedimento de dois passos proposto por ? e ?, especialmente em problemas com elevada dimensão.

2.2. Previsão

As previsões um passo à frente das matrizes de covariância condicionais baseadas no modelo DFGARCH podem ser obtidas como:

$$H_{t|t-1} = \beta_{t|t-1}\Omega_{t|t-1}\beta'_{t|t-1} + \Xi_{t|t-1}, \quad (13)$$

onde $\beta_{t|t-1}$, $\Omega_{t|t-1}$, and $\Xi_{t|t-1}$ são, respectivamente, previsões dos pesos dos fatores um passo à frente obtidas de acordo com (2), previsão um passo à frente da matriz de covariância condicional dos fatores calculada conforme (6), e previsões um passo à frente das variâncias condicionais dos resíduos obtidas por um modelo do tipo GARCH e colocadas na matriz diagonal $\Xi_{t|t-1}$.

2.3. Modelos benchmark

Também consideramos quatro especificações alternativas de *benchmark* para a matriz de covariância condicional dos retornos. O primeiro modelo *benchmark* é uma versão da especificação presente em (5) com pesos dos fatores constantes ao longo do tempo, ou seja

$$H_t = \beta\Omega_t\beta' + \Xi_t, \quad (14)$$

onde β é a estimativa por mínimos quadrados ordinários (OLS) do modelo de regressão $y_{it} = \beta_i f_t + \varepsilon_{it}$.

O segundo *benchmark* é o modelo GARCH ortogonal (OGARCH) de ? e ?,

$$H_t = W\Lambda_t W', \quad (15)$$

³Uma revisão das questões relacionadas à estimação, tais como, escolha dos valores iniciais, algoritmos numéricos, acurácia, bem como propriedades assintóticas são dadas por ?, ?, ?, e ?. É importante observar que mesmo quando a suposição de normalidade é inapropriada, o estimador QML baseado na maximização das verossimilhanças Gaussianas é consistente e assintoticamente Normal, dado que a média condicional e funções de variância do modelo GARCH são corretamente especificadas; ver ?.

onde W é uma matriz $N \times K$ dos autovetores dos primeiros $K \leq N$ fatores ortogonais obtidos via análise de componentes principais (PCA) e Λ_t é uma matriz de covariância diagonal das variâncias condicionais dos componentes principais, i.e. $\Lambda_t = \text{diag}(h_{PC_{1t}}, \dots, h_{PC_{kt}})$ onde h_{PC_t} segue um modelo GARCH.

O terceiro *benchmark* é o modelo de fatores proposto por ? (CKL),

$$H_t = \beta_t \Gamma_t \beta_t' + \Upsilon_t, \quad (16)$$

onde a matriz de covariância Γ_t é a matriz de covariância dos fatores do modelo Fama-French-Carhart, modelada com uma amostra *rolling window* de 252 dias, i.e. $\Gamma_t = \frac{1}{252} \sum_{i=t-252}^{t-1} f_i f_i'$, e Υ_t é a matriz diagonal com as variâncias dos resíduos da regressão *rolling window* dos retornos dos ativos contra os fatores.

Finalmente, o quarto modelo *benchmark* é o modelo Risk Metrics (RM), o qual consiste de um modelo de média móvel exponencialmente ponderado para modelar as covariâncias condicionais. Nesta abordagem, a matriz de covariância condicional é dada por

$$H_t = (1 - \lambda) Y_{t-1} Y_{t-1}' + \lambda H_{t-1}, \quad (17)$$

com o valor recomendado para o parâmetro para dados diários sendo $\lambda = 0.94$.

3. Aplicação em Otimização de Carteiras

Para avaliar a performance da especificação DFGARCH em comparação com os modelos *benchmark*, foi considerado o problema do portfólio de mínima variância (PMV). As propriedades do PMV são avaliadas sob duas situações diferentes: com e sem restrição para vendas a descoberto. No caso irrestrito, o MVP pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} & \min_{w_t} w_t' H_{t|t-1} w_t \\ & \text{sujeito a} \\ & w_t' \iota = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

onde ι é um vetor de uns com dimensão $N \times 1$. A solução para o problema PMV irrestrito em (18) é dada por:

$$w_t = \frac{H_{t|t-1}^{-1} \iota}{\iota' H_{t|t-1}^{-1} \iota}. \quad (19)$$

No caso restrito para vendas a descoberto, é adicionada a (18) uma restrição para evitar pesos negativos, ou seja, $w_t \geq 0$. Trabalhos anteriores mostram que adicionar tal restrição pode melhorar substancialmente a performance, principalmente reduzindo o *turnover* do portfólio, ver ?, entre outros. No caso restrito, os pesos ótimos do PMV são obtidos através de métodos de otimização numérica.

3.1. Dados e detalhes da implementação

Foi utilizado um conjunto de dados composto de observações diárias de 61 ações que fizeram parte do índice Ibovespa de Janeiro de 2000 a dezembro de 2010, perfazendo um total de 2722 observações diárias. Os retornos são calculados como a diferença dos logaritmos dos preços. Os dados foram obtidos do Economática.

As primeiras 1722 observações são usadas para estimar os parâmetros de todos os modelos e obter previsões dentro da amostra, enquanto que as últimas 1000 observações são usadas para obter previsões fora da amostra. As previsões são do tipo não-adaptativas, isto é, os parâmetros estimados no período dentro da amostra foram mantidos fixos no período fora da amostra. A tabela 1 apresenta estatísticas descritivas para os períodos dentro e fora da amostra. Podemos observar a ocorrência de um retorno médio inferior e uma curtose média superior no período fora da amostra em comparação com o período dentro da amostra. Estas diferenças nos momentos amostrais se devem ao fato de que o período fora da amostra vai de janeiro de 2007 a dezembro de 2010, incluindo a crise financeira observada naquele período.

É importante ressaltar três questões técnicas relativas à implementação dos modelos *benchmark*. Primeiro, na implementação do modelo CLK foram utilizadas estimações *rolling window* com 252 observações. Portanto, não foram incluídas as primeiras 252 observações quando avaliamos a performance de todos os modelos. Segundo, a abordagem Risk Metrics não envolve nenhum parâmetro desconhecido, uma vez que estabelecemos $\lambda = 0.94$. Finalmente, ao implementar o modelo OGARCH, consideramos diferentes números de fatores. Em particular, implementamos o modelo OGARCH com o número de fatores variando de 1 até N . Para facilitar a discussão e exposição dos resultados, apresentaremos os resultados do modelo OGARCH apenas para a especificação que

apresentou melhor performance.

Tabela 1: Estatísticas descritivas

A tabela apresenta estatísticas descritivas para os períodos dentro e fora da amostra e estatísticas descritivas para o conjunto de dados composto por 61 ações que pertenceram ao índice Ibovespa.

	Dentro da amostra	Fora da amostra
	01/01/2000 - 09/01/2007	09/01/2007 - 31/12/2010
Número de obs.	1722	1000
Retorno médio (%)	0.068	0.042
Desvio padrão	2.887	2.865
Mediana	-0.001	0.025
Curtose	9.166	11.110
Assimetria	0.223	0.113

3.2. Metodologia para avaliação da performance

A performance dos portfólios ótimos é avaliada em termos de variância dos retornos da carteira ($\hat{\sigma}^2$), índice de Sharpe (IS) e *turnover*. Estas estatísticas são calculadas como segue:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (w_t' R_{t+1} - \hat{\mu})^2$$

$$IS = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}, \text{ onde } \hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} w_t' R_{t+1}$$

$$\text{Turnover} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|),$$

onde $w_{j,t}$ é o peso do ativo j no portfólio no tempo $t + 1$ mas antes do rebalanceamento e $w_{j,t+1}$ é o peso desejado do ativo j no tempo $t + 1$. Como destacado por ?, o *turnover*, como definido acima, pode ser interpretado como a fração média da riqueza transacionada em cada período.

Para testar a significância estatística das diferenças entre as variâncias e índices de Sharpe dos retornos de dois portfólios, seguimos ? e usamos o *bootstrap* estacionário de ? com $B=1,000$ reamostragens e tamanho de bloco $b = 5$.⁴ Os p -valores do teste foram obtidos usando a metodologia sugerida em ?, Remark 3.2.

⁴Foram realizados extensivos testes de robustez para definir o tamanho do bloco, usando valores para b entre 5 e 250. Independente do tamanho do bloco, os resultados dos testes para a variância e índice de Sharpe são similares aos reportados aqui.

3.3. Resultados

A tabela 2 apresenta a variância, o IS e o *turnover* dos portfólios considerando períodos dentro da amostra e fora da amostra, para portfólios de variância mínima com restrição de venda a descoberto e irrestritos obtidos com matrizes de covariância geradas pelo modelo DFGARCH proposto por ? com pesos dos fatores variando no tempo baseado no modelo RW (DFGARCH-RW), modelo de aprendizagem (DFGARCH-learning) e para os modelos benchmark. Os modelos benchmark propostos são o modelo com pesos dos fatores invariantes no tempo (DFGARCH-OLS), o modelo OGARCH, o modelo Risk Metrics e o modelo CKL. A tabela traz também os p -valores para as diferenças entre as variâncias dos portfólios e índice de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo CKL.

Os resultados mostram que em termos de variância o modelo DFGARCH-RW gera os portfólios ótimos com menor risco, tanto no período dentro da amostra como fora da amostra e também considerando as duas políticas de investimento, seja com restrição de venda a descoberto ou irrestrito. Por exemplo, no período fora da amostra o modelo DFGARCH-RW gera um portfólio com variância de 0.511 no caso irrestrito, a qual é substancialmente (e estatisticamente) menor que a variância dos portfólios obtidos com os modelos OGARCH, RiskMetrics e CKL (2.849, 1.560 e 0.874, respectivamente). Podemos observar também que a variância do portfólio obtido com o modelo DFGARCH-RW é menor em comparação aos portfólios resultantes dos modelos DFGARCH-learning e DFGARCH-OLS.

Em termos de IS os resultados indicam que o modelo DFGARCH-learning gera uma melhor performance ajustada pelo risco em comparação aos demais modelos, incluindo todos os modelos *benchmark*. Por exemplo, o modelo DFGARCH-learning apresenta IS de 0.076 para o caso da política de investimentos irrestrito durante o período fora da amostra, enquanto o modelo CKL apresenta um IS de 0.027, sendo as diferenças estatisticamente significantes ao nível de 10%. Em termos de portfólio *turnover* observamos que a melhor performance foi alcançada pelo modelo CKL em todos os casos, seguido pelos modelos OGARCH e DFGARCH-learning. Também podemos observar que em todos os casos o modelo DFGARCH-learning alcança menor *turnover* em comparação com os modelos DFGARCH-OLS e DFGARCH-RW. Estes resultados sugerem que os pesos dos fatores com aprendizagem resultam em portfólios ótimos com menor variância e também com menor *turnover*. Finalmente, observamos que o portfólio *turnover* associado à política de restrição de venda à descoberto tende a ser menor quando comparado com o caso irrestrito. Este resultado

está em linha com resultados empíricos anteriores na literatura, tais como ? e ?.

Para ilustrar ainda mais os resultados, na figura 1 é apresentado o diagrama de caixas (*boxplot*) dos retornos dos PMV para os períodos dentro da amostra e fora da amostra, considerando políticas de investimento com restrição à venda a descoberto e irrestrita. A figura mostra que a dispersão dos retornos do portfólio obtido com o modelo DFGARCH-RW é substancialmente menor em comparação com os demais modelos em todos os casos, o que corrobora com os resultados da tabela 2. Também observamos que a dispersão dos retornos do portfólio durante o período fora da amostra é maior quando comparado com o período dentro da amostra, o que reflete o impacto da crise financeira mundial de 2007-2008.

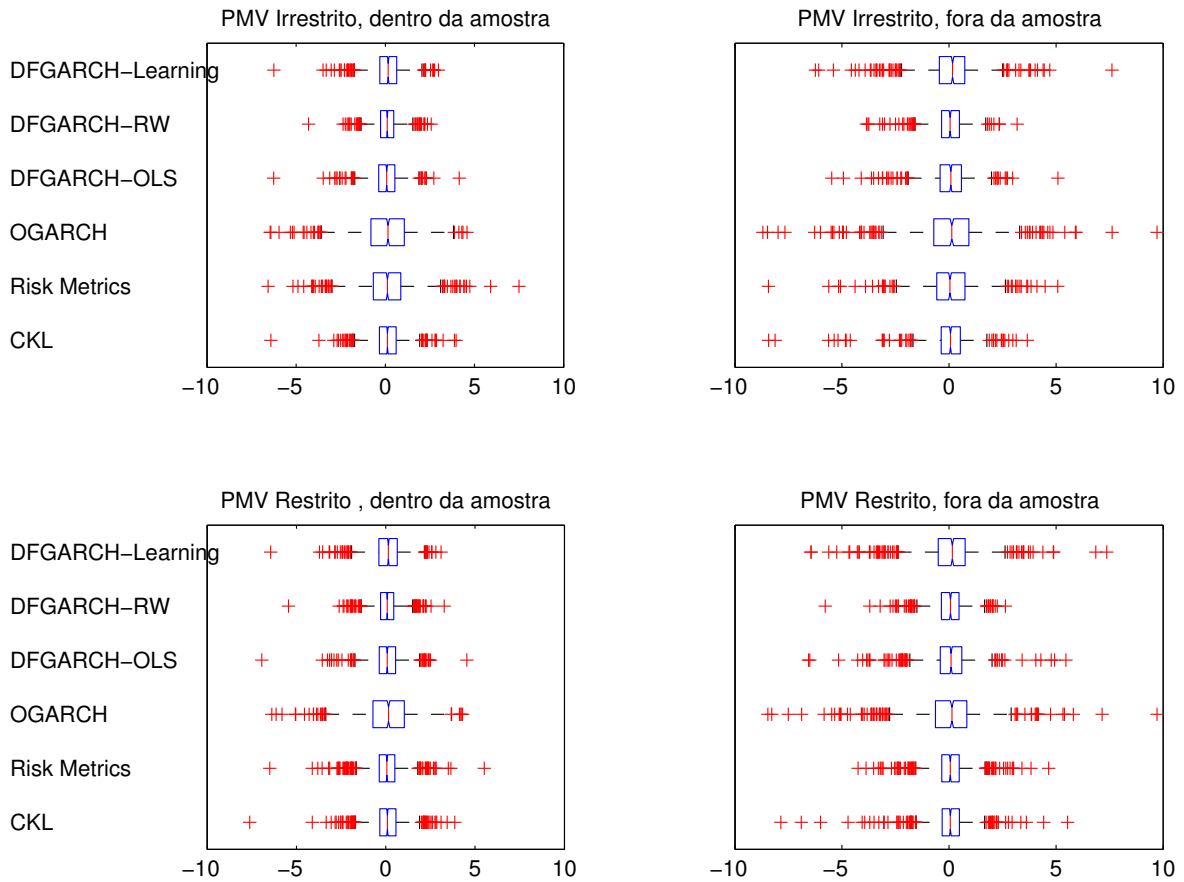


Figura 1: Boxplot dos retornos dos portfólios

3.3.1. Frequências de rebalanceamento alternativas

Os resultados discutidos anteriormente são baseados na suposição de que os investidores ajustam seu portfólio diariamente. Os custos de transação incorridos com tal frequência de negociação pode possivelmente deteriorar a performance líquida do portfólio. Obviamente, este efeito pode ser reduzido ajustando o portfólio numa frequência menor, tal como em base semanal ou mensal, o que na prática é feito pela maioria dos investidores institucionais. A desvantagem de rebalancear o portfólio em menor frequência é que os pesos ficam desatualizados, o que pode ser prejudicial à performance. Dessa forma, também avaliamos a performance do PMV considerando diferentes frequências de rebalanceamento. As tabelas 3 e 4 mostram os resultados para frequências de rebalanceamentos semanal e mensal, respectivamente. Como esperado, verificamos que a diminuição na frequência de rebalanceamento resulta em uma substancial redução no portfólio *turnover*. Podemos observar que o modelo DFGARCH-RW obtém portfólios ótimos com menor variância na maioria dos casos.

Resumindo os resultados nas tabelas 2 a 4, verificou-se que reduzindo a frequência de rebalanceamento não leva a uma melhor performance ajustada ao risco em termos de IS. De fato, a melhor performance geral fora da amostra em termos de variância do portfólio e IS é alcançada quando é usado o modelo DFGARCH-learning para obter MVP irrestrito sob rebalanceamento diário.

4. Considerações Finais

Os modelos de fatores estão atualmente estabelecidos como uma alternativa promissora para reduzir problemas de dimensionalidade e o custo computacional do processo de estimação quando o objetivo é obter matrizes de covariâncias de portfólios contendo um grande número de ativos. Neste artigo, aplicamos uma abordagem recentemente proposta por ? para obter matrizes de covariâncias condicionais baseado em um modelo de fatores que estende especificações econométricas anteriores. A abordagem permite uma especificação mais parcimoniosa para os fatores comuns e especificações alternativas para os ativos individuais do portfólio. Além disso, tratamos os pesos dos fatores como variáveis latentes variando ao longo do tempo e consideramos dinâmicas baseadas em recentes desenvolvimentos na teoria de apreçamento de ativos.

Utilizamos o modelo para obter previsões um passo à frente para dentro e fora da amostra da matriz de covariância condicional de 61 ativos que pertenceram ao índice Ibovespa durante o período amostral, e posteriormente usamos as matrizes estimadas para obter portfólios de mínima

variância com restrição de venda à descoberto e irrestrito. A performance do modelo proposto é comparada àquela de modelos *benchmark* alternativos, incluindo modelos fatoriais existentes. Os resultados indicam que o modelo proposto entrega portfólios com menor risco em comparação aos modelos benchmark, bem como melhor performance ajustada pelo risco. Além disso, os resultados são robustos com relação a frequência de rebalanceamento dos portfólios ótimos.

Tabela 2: Performance dos portfólios de variância mínima com rebalanceamento diário

A tabela apresenta a média diária da variância da carteira, o índice de Sharpe e portfólio *turnover* dos portfólios de variância mínima com restrição de venda a descoberto e irrestrito, obtidos com matrizes de covariâncias geradas pelo modelo DFGARCH-RW e modelo DFGARCH com aprendizagem. Os modelos benchmark são o DFGARCH-OLS, o modelo OGARCH, modelo RiskMetrics e o modelo CKL. *p*-valores para as diferenças entre as variâncias dos portfólios e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo CKL estão entre parênteses abaixo de cada coeficiente.

<i>Dentro da amostra</i>	Variância	Índice de Sharpe	Turnover	Variância	Índice de Sharpe	Turnover
	Restrito			Irrestrito		
DFGARCH-learning	0.721 (0.314)	0.141 (0.084)	0.086	0.642 (0.870)	0.179 (0.474)	0.123
DFGARCH-RW	0.431 (0.000)	0.119 (0.844)	0.105	0.391 (0.000)	0.162 (0.763)	0.167
DFGARCH-OLS	0.642 (0.043)	0.097 (0.195)	0.093	0.586 (0.026)	0.104 (0.000)	0.159
OGARCH	1.910 (0.000)	0.068 (0.026)	0.032	2.116 (0.000)	0.067 (0.000)	0.070
RiskMetrics	0.958 (0.212)	0.074 (0.027)	0.173	1.858 (0.000)	0.074 (0.000)	0.929
CKL	0.693 (1.000)	0.117 (1.000)	0.024	0.636 (1.000)	0.166 (1.000)	0.043
<i>Fora da amostra</i>	Restrito			Irrestrito		
DFGARCH-learning	1.645 (0.010)	0.067 (0.058)	0.094	1.461 (0.000)	0.076 (0.098)	0.139
DFGARCH-RW	0.558 (0.000)	0.052 (0.148)	0.128	0.511 (0.000)	0.042 (0.550)	0.186
DFGARCH-OLS	1.051 (0.883)	0.056 (0.100)	0.108	0.836 (0.655)	0.070 (0.120)	0.179
OGARCH	2.553 (0.000)	0.056 (0.700)	0.108	2.849 (0.000)	0.024 (0.881)	0.063
RiskMetrics	0.806 (0.020)	0.053 (0.186)	0.171	1.560 (0.000)	0.031 (0.868)	0.938
CKL	1.083 (1.000)	0.015 (0.000)	0.026	0.874 (1.000)	0.027 (1.000)	0.048

Tabela 3: Performance dos portfólios de variância mínima com rebalanceamento semanal

A tabela apresenta a média diária da variância da carteira, o índice de Sharpe e portfólio *turnover* dos portfólios de variância mínima com restrição de venda a descoberto e irrestrito, obtidos com matrizes de covariâncias geradas pelo modelo DFGARCH-RW e modelo DFGARCH com aprendizagem. Os modelos benchmark são o DFGARCH-OLS, o modelo OGARCH, modelo RiskMetrics e o modelo CKL. *p*-valores para as diferenças entre as variâncias dos portfólios e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo CKL estão entre parênteses abaixo de cada coeficiente.

<i>Dentro da amostra</i>	Variância	Índice de Sharpe	Turnover	Variância	Índice de Sharpe	Turnover
	Restrito			Irrestrito		
DFGARCH-learning	0.757 (0.036)	0.132 (0.308)	0.040	0.681 (0.158)	0.166 (0.907)	0.055
DFGARCH-RW	0.734 (0.824)	0.095 (0.365)	0.050	0.620 (0.701)	0.141 (0.273)	0.076
DFGARCH-OLS	0.664 (0.233)	0.106 (0.393)	0.043	0.604 (0.175)	0.113 (0.002)	0.072
OGARCH	1.910 (0.000)	0.068 (0.018)	0.014	2.117 (0.000)	0.067 (0.000)	0.033
RiskMetrics	1.075 (0.106)	0.069 (0.024)	0.091	1.973 (0.000)	0.066 (0.000)	0.475
CKL	0.698 (1.000)	0.118 (1.000)	0.013	0.640 (1.000)	0.167 (1.000)	0.023
<i>Fora da amostra</i>	Restrito			Irrestrito		
DFGARCH-learning	1.681 (0.022)	0.053 (0.144)	0.042	1.531 (0.000)	0.057 (0.310)	0.061
DFGARCH-RW	0.821 (0.049)	0.035 (0.352)	0.059	0.710 (0.069)	0.038 (0.498)	0.085
DFGARCH-OLS	1.056 (0.745)	0.058 (0.108)	0.050	0.865 (0.723)	0.072 (0.080)	0.081
OGARCH	2.553 (0.000)	0.026 (0.642)	0.013	2.854 (0.000)	0.022 (0.945)	0.031
RiskMetrics	0.888 (0.075)	0.041 (0.310)	0.093	1.583 (0.000)	0.019 (0.873)	0.486
CKL	1.122 (1.000)	0.012 (1.000)	0.016	0.905 (1.000)	0.024 (1.000)	0.027

Tabela 4: Performance dos portfólios de variância mínima com rebalanceamento mensal

A tabela apresenta a média diária da variância da carteira, o índice de Sharpe e portfólio *turnover* dos portfólios de variância mínima com restrição de venda a descoberto e irrestrito, obtidos com matrizes de covariâncias geradas pelo modelo DFGARCH-RW e modelo DFGARCH com aprendizagem. Os modelos benchmark são o DFGARCH-OLS, o modelo OGARCH, modelo RiskMetrics e o modelo CKL. *p*-valores para as diferenças entre as variâncias dos portfólios e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos com o modelo CKL estão entre parênteses abaixo de cada coeficiente.

<i>Dentro da amostra</i>	Variância	Índice de Sharpe	Turnover	Variância	Índice de Sharpe	Turnover
	Restrito			Irrestrito		
DFGARCH-learning	0.780 (0.116)	0.124 (0.330)	0.016	0.710 (0.230)	0.159 (0.996)	0.021
DFGARCH-RW	0.695 (0.575)	0.095 (0.523)	0.021	0.632 (0.519)	0.136 (0.323)	0.031
DFGARCH-OLS	0.688 (0.149)	0.108 (0.871)	0.017	0.633 (0.106)	0.115 (0.012)	0.028
OGARCH	1.912 (0.000)	0.068 (0.065)	0.006	2.125 (0.000)	0.065 (0.000)	0.014
RiskMetrics	0.902 (0.006)	0.077 (0.126)	0.041	1.796 (0.000)	0.092 (0.006)	0.209
CKL	0.733 (1.000)	0.109 (1.000)	0.008	0.674 (1.000)	0.159 (1.000)	0.014
<i>Fora da amostra</i>	Restrito			Irrestrito		
DFGARCH-learning	1.700 (0.076)	0.049 (0.278)	0.017	1.562 (0.004)	0.051 (0.576)	0.0239
DFGARCH-RW	1.048 (0.255)	0.044 (0.226)	0.026	0.911 (0.635)	0.055 (0.348)	0.037
DFGARCH-OLS	1.050 (0.345)	0.064 (0.072)	0.021	0.892 (0.521)	0.077 (0.091)	0.032
OGARCH	2.552 (0.000)	0.026 (0.798)	0.006	2.854 (0.000)	0.023 (0.737)	0.014
RiskMetrics	1.310 (0.628)	0.037 (0.452)	0.047	1.997 (0.000)	0.032 (0.919)	0.224
CKL	1.243 (1.000)	0.020 (1.000)	0.010	0.979 (1.000)	0.034 (1.000)	0.017

Apêndice: Modelos de volatilidade univariados

Neste apêndice descrevemos as especificações GARCH univariadas que foram usadas para modelar a variância condicional dos fatores e variância condicional dos resíduos do modelo de fatores.

GARCH:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma I[\epsilon_{t-1} < 0] \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Exponential GARCH (EGARCH):

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \frac{|\epsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \gamma \frac{\epsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Threshold GARCH (TGARCH):

$$\sigma_t = \omega + \alpha |\epsilon_{t-1}| + \gamma I[\epsilon_{t-1} < 0] |\epsilon_{t-1}| + \beta \sigma_{t-1}$$

Asymmetric power GARCH (APARCH):

$$\sigma_t^\lambda = \omega + \alpha (|\epsilon_{t-1}| + \gamma \epsilon_{t-1})^\lambda + \beta \sigma_{t-1}^\lambda$$

Asymmetric GARCH (AGARCH):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (\epsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Nonlinear asymmetric GARCH (NAGARCH):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (\epsilon_{t-1} + \gamma \sqrt{\sigma_{t-1}^2})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Referências