

# *Regime Switching Copula: uma análise da dependência intra e inter-setorial*

Jéfferson Augusto Colombo (FEE e PPGA-UFRGS)

Rodrigo de Sá da Silva(FEE)

Marcos Vinicio Wink Junior(FEE e PPGE-UFRGS)

Eduardo de Oliveira Horta(PPGE-UFRGS)

19 de julho de 2011

## **Resumo**

Um dos grandes desafios da moderna teoria de finanças é entender a estrutura de dependência entre ativos, setores e mercados. Este artigo objetiva modelar os parâmetros de dependência entre índices setoriais da BM&F Bovespa e seus principais ativos subjacentes. Além da análise intra-setorial, é realizada uma análise entre setores na tentativa de mensurar o impacto dos riscos específicos e também de eventuais mudanças nos parâmetros de dependência diante da crise financeira de 2008. Para modelar esta dependência usa-se a metodologia de cópulas com mudanças de regime, que permite analisar dependências não lineares, diferentes para retornos negativos e positivos e, também, com a possibilidade de alterações em seu nível dado mudanças de regime da economia. Os resultados sugerem que um fundo que invista nas empresas do setor de consumo ou do setor de energia elétrica tem menor risco. Além disso, fundos que invistam na Petrobrás e em outro setor da economia, também apresentam menor risco do que investimento em outras combinações de setores. E, como sugerido na literatura, a dependência na cauda inferior se mostrou maior do que na cauda superior, isto é, os ativos mostraram maior dependência em momentos de queda.

**Palavras-chave:** gestão de carteiras, dependência, regime switching copula

## **Abstract**

One of the challenges of modern finance theory is to understand the dependence structure between assets, markets and sectors. This paper aims to model the parameters of dependence between sector indexes of the BM&F Bovespa and its main underlying assets. Besides the intra-sectoral analysis, a between sectors analysis is performed in an effort to measure the impact of the specific risks as well as any changes in the parameters of dependence on the financial crisis of 2008. To model this dependence we use the approach of the regime switching copula, which allows the analysis of nonlinear dependences, different for positive and negative returns, and also the possibility of changes in their level given by regime changes in the economy. The results suggest that a portfolio which invests in companies of the consumer sector or the electric energy sector has a lower risk. In addition, portfolio which invests in Petrobras and in another sector of the economy, also have lower risk than investment in other combinations of sectors. And, as suggested in the literature, the lower tail dependence was bigger than the upper tail, ie, in the crises the dependence was larger.

**Palavras-chave:** portfolio management, dependence, regime switching copula

JEL Classification: C22,C53,C58

Área 7. Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças.

# Introdução

Identificar e modelar a estrutura de dependência entre mercados financeiros ou entre ativos é um dos principais desafios da moderna literatura de finanças e gerenciamento de risco. Segundo Fermanian e Scaillet (2004), a estrutura de dependência deve sempre ser levada em consideração quando se trata de controle de risco. Retornos financeiros, no entanto, tendem a ter estrutura de dependência assimétrica, como sugerem os trabalhos de Ang e Chen (2002) e Patton (2004). Conforme Chollete et al. (2008), isso significa que em tempos de crise os retornos tendem a ser mais dependentes. Dessa forma, os benefícios da diversificação tendem a ser reduzidos em períodos de crise.

Encontrar ferramentas capazes de modelar corretamente a dependência entre ativos, portanto, surge como um grande tema de pesquisa em finanças e gerenciamento de risco. De forma prática, a medida de dependência mais utilizada é a correlação linear, ou de Pearson. Essa prática, no entanto, apresenta uma série de limitações como discutido em Pereira (2009). Pelletier (2006) propôs um método de correlação dinâmica por *Markov switching*, o que permitiria uma análise de variância e covariância entre séries financeiras variantes no tempo. Outra forma bastante difundida na literatura de dependência entre séries financeira é a utilização de funções cópulas, já que permitem recuperar distribuições conjuntas de ativos financeiros sem restrições de normalidade sobre as distribuições marginais de cada um desses ativos, reproduzindo melhor, portanto, fatos estilizados de séries financeiras como excesso de curtose e assimetria de retornos.

Com o objetivo de modelar o parâmetro de dependência entre retornos de ativos financeiros de maneira mais realista e flexível que o modelo de mudança de regime proposto por Pelletier (2006), Chollete et al. (2008) elaboraram um modelo multivariado de dependência assimétrica chamado *Regime Switching Copula*.

A aplicação da metodologia de cópulas em finanças tem sido, de maneira geral, estudada na análise de dependência de retornos financeiros internacionais, principalmente utilizando índices acionários de diferentes países. Destacam-se nesse sentido os trabalhos de Rockinger e Jondeau (2001), Chollete et al. (2008), Pereira (2009), da Silva Filho e Ziegelmann (2010), entre outros. Trabalhos que estudam a estrutura de dependência entre ativos ou setores dentro do Brasil ainda são escassos na literatura. Assim sendo, o objetivo desse trabalho é modelar a estrutura de dependência intra e inter-setorial de ativos e setores cotados na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&F BOVESPA). Faz-se essa distinção entre ativos de mesmo setor e de setores diferentes em função dos fatores de risco intrínsecos a cada setor, que podem afetar os resultados alcançados pelo estudo. Os índices setoriais utilizados são disponibilizados pela própria Bolsa, que em abril de 2011 divulgou a inclusão de outros quatro índices de acompanhamento de setores. Isso revela a atualidade desse assunto e a necessidade de análises envolvendo índices do mercado acionário brasileiro. A metodologia empregada será a de *Regime Switching Copula*, proposta por Chollete et al. (2008), permitindo, assim, que os parâmetros de dependências variem deterministicamente e que também mudem conforme um processo estocástico markoviano, assim como realizado em da Silva Filho e Ziegelmann (2010). Para a análise intra-setorial, empregaremos essa metodologia em pares de ativos representativos de cada setor. Para a análise inter-setorial, empregaremos a metodologia para os índices setoriais presentes na BOVESPA.

Além desta introdução, o trabalho está dividido em cinco seções e mais uma conclusão ao final. A primeira seção trata dos índices e fundos setoriais, a segunda do modelo de cópulas utilizado, a terceira expõe os métodos de estimação, a quarta apresenta os dados utilizados

pelo trabalho e, por fim, a quinta apresenta os resultados.

## 1 Índices e Fundos Setoriais

Índices setoriais sintetizam o desempenho de um conjunto de ações ao longo do tempo. Sua utilização é importante para analisar o comportamento de um determinado setor da economia e também para estabelecer um *benchmark* para o desempenho de ativos de um mesmo ou de diferentes setores. Atualmente, a BM&F Bovespa disponibiliza 17 índices de ações diferentes, todos com um enfoque próprio. Em comum há a idéia de criar parâmetros para medir o desempenho da própria Bolsa, o que é de grande importância tanto para os operadores de mercado quanto para as pesquisas acadêmicas em finanças. Além dos atuais dezessete, em abril de 2011 a BM&F Bovespa anunciou que prepara o lançamento de quatro novos índices de ações, que deverão estar em operação a partir de maio deste mesmo ano. Um deles, inclusive, será criado para mensurar o desempenho de ações que pagam bons dividendos, algo que já é bastante comum na indústria de fundos setoriais. A notícia revela ainda que, além destes, estuda-se a criação de outros indicadores de ações, como tecnologia e telecomunicações e mídia.

Diante desse cenário, percebe-se na Bolsa de valores brasileira um esforço contínuo no sentido de constituir um número cada vez maior de índices setoriais, visando refletir a realidade do mercado acionário local. Alinhados a essa maior atenção dada pela Bolsa aos índices, novos produtos são sistematicamente lançados para atender a essa crescente demanda. Atualmente há 8 fundos de índices, ou ETFs (*Exchange Traded Funds*), negociados no Brasil. O mais recente deles passou a ser negociado em abril deste ano, e busca replicar o Índice Financeiro (IFNC) da BM&F Bovespa. A negociação das cotas desses fundos é realizada diretamente via *Home Broker*, em lotes cujo preço é reduzido e acessível a grande parte dos investidores. Como vantagens, estão a facilidade em replicar via cotas uma carteira altamente diversificada e a redução de custos que esse tipo de operação propicia.

Esta gama cada vez maior de índices e fundos derivados de índices proporciona uma boa oportunidade de modelagem de carteiras de investimentos. Conforme Reilly e Brown (2003), uma das formas de fundos ativos gerarem retornos acima do mercado ocorre através da análise “*top-down*”, que parte de um estudo macroeconômico, mais genérico, para então entrar na escolha de setores e ativos, que são mais específicos. Uma das análises “*top-down*” mais importantes é conhecida como seleção de setores.

A seleção de setores, comumente conhecida como rotação setorial, é uma forma de gestão ativa bastante utilizada por gestores de fundos. Como destaca ELTON et al. (2004), os investidores que adotam tal estratégia acreditam que os pesos de cada setor na carteira de mercado não estão alocados de forma ótima. Em função disso, acabam aumentando as posições em setores que acreditam que irão performar melhor, e reduzindo participação nos demais.

A partir de uma análise econômica, faz-se um ranking de setores cujo rendimento tende a ser maior, e é nestes que se concentra a alocação do gestor. As classificações podem ser gerais (bens de consumo, bens de capital, serviços), características percebidas (crescimento, ações cíclicas, ações estáveis) ou características amplas (indústria de transformação, instituições financeiras, etc).

Uma das justificativas encontradas na teoria de gestão de carteiras para essa estratégia é a busca por alfas positivos em carteiras de investimento. Segundo Sharpe et al. (1995),

o coeficiente alfa, ou retorno diferencial médio, indica a diferença média entre o retorno de um fundo em relação ao mercado. Um fundo pode obter alfas positivos pela estratégia de *market timing* (selecionando ativos de maior beta antes de períodos de valorização, e os de menores betas antes de períodos de recessão) e/ou por meio da seleção de ativos ou setores (comprando ações ou setores que performem mais que outras com beta semelhante).

Em tese, as perspectivas macroeconômicas e seus impactos setoriais podem sinalizar *upsides* maiores em alguns setores do que em outros. Nesse sentido, há tanto o trabalho de analistas na precificação de ativos e setores quanto um grande leque de fundos de investimentos setoriais colocados no varejo por grandes instituições financeiras. São fundos indexados ao setor de energia elétrica, de consumo, infraestrutura, construção civil, financeiro, entre outros, que movimentam bilhões de reais na indústria de fundos de investimentos.

Na academia, entretanto, carecem estudos que analisem a modelagem de carteiras de investimentos com base em ações e índices, especialmente quando se trata do conceito de dependência. Este tipo de análise torna-se importante na medida em que a análise tradicional de diversificação em gestão de carteiras, baseada na correlação linear entre os ativos, envolve uma série de limitações (Pereira (2009)). Além disso, conforme Ang e Chen (2002) e Patton (2004), os retornos financeiros tendem a ter estrutura de dependência assimétrica. Para Chollete et al. (2008), isso significa que em tempos de crise os retornos tendem a ser mais dependentes, ou seja, mais alinhados. Esta idéia sugere que os benefícios da diversificação tendem a ser reduzidos em períodos ruins, justamente pelo aumento na dependência. Neste caso, é importante analisar os efeitos da redução de risco tanto em períodos de alta quanto em períodos de baixa.

## 2 Cópulas

Como dito anteriormente, cópulas são funções que permitem chegar à função de distribuição acumulada de duas ou mais variáveis aleatórias a partir de suas marginais. A existência dessa função cópula é dada pelo Teorema de Sklar.

**Teorema 1.** (Teorema de Sklar) Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias e  $F_{XY}$  sua função de distribuição acumulada conjunta com marginais  $F_X$  e  $F_Y$ . Então existe uma cópula  $C$  tal que, para todos  $x, y$  em  $\overline{\mathbf{R}}^1$ ,

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (1)$$

Se  $F_X$  e  $F_Y$  são contínuas, então  $C$  é única; caso contrário,  $C$  é unicamente determinada no espaço gerado por  $F_X \times F_Y$ . Ainda, se  $C$  é uma cópula e  $F_X$  e  $F_Y$  são funções distribuição acumulada, então a função  $F_{XY}$  definida por (1) é uma função de distribuição conjunta com marginais  $F_X$  e  $F_Y$ .

*Demonstração.* Ver Nelsen (2006, p. 18). □

O teorema anterior é dado em termos das funções de distribuição, mas pode ser apresentado também em relação às densidades das variáveis aleatórias. Derivando (1) em relação a  $X$  e a  $Y$  chega-se a

---

<sup>1</sup> $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  é a reta real expandida.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_x(x)} \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \\
\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial Xx \partial Yy} &= \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_x(x) \partial F_Y(y)} \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \frac{\partial F_Y(y)}{\partial Yy} \\
f_{XY}(x, y) &= c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y),
\end{aligned} \tag{2}$$

onde  $f_{XY}$  é a densidade conjunta de  $X$  e  $Y$  e  $f_X$  e  $f_Y$  são as suas respectivas densidades marginais.

Esta abordagem pode ser estendida a distribuições condicionais, que é o que será usada aqui. Para maior detalhes, ver, por exemplo, Patton (2006, seção 2).

## 2.1 Cópula Joe-Clayton simetrizada

Um importante aspecto na literatura de cópulas e o objetivo deste trabalho é fazer inferência sobre a estrutura de dependência caudal das variáveis. Informalmente, a dependência caudal superior mede a probabilidade de duas variáveis aleatórias apresentarem valores altos simultaneamente e a inferior a probabilidade de exibirem simultaneamente valores baixos. A definição a seguir formaliza esta assertiva.

**Definição 1.** Se o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(U \leq \epsilon | V \leq \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(V \leq \epsilon | U \leq \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C(\epsilon, \epsilon)}{\epsilon} = \tau^L$$

existe, então a cópula  $C$  exibe *dependência caudal inferior* se  $\tau^L \in (0, 1]$  ou não exibe dependência caudal inferior se  $\tau^L = 0$ . Analogamente, se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \mathbb{P}(U > \delta | V > \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 1} \mathbb{P}(V > \delta | U > \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{1 - 2\delta + C(\delta, \delta)}{1 - \delta} = \tau^U$$

existe, então a cópula  $C$  exibe *dependência caudal superior* se  $\tau^U \in (0, 1]$  ou não exibe se  $\tau^U = 0$ .

Aqui utilizamos, como dito anteriormente, a cópula Joe-Clayton simetrizada pois ela permite que estes parâmetros de dependência inferior e superior sejam diferentes. Além disso, o caso simétrico, onde estes são iguais, é um caso particular desta função cópula. Esta pode ser definida como segue.

**Definição 2.** A cópula *Joe-Clayton simetrizada*,  $C_{SJC}$ , é a função

$$\begin{aligned}
C_{SJC}(u, v | \tau^U, \tau^L) &= \\
&= \frac{1}{2} \left( C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1 - u, 1 - v | \tau^L, \tau^U) + u + v - 1 \right),
\end{aligned}$$

sendo que  $C_{JC}$  é a cópula Joe-Clayton dada por

$$C_{JC}(u, v | \tau^U, \tau^L) = 1 - \left( 1 - \left\{ [1 - (1 - u)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - v)^\kappa]^{-\gamma} - 1 \right\}^{-1/\gamma} \right)^{1/\kappa},$$

onde  $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau^U)$  e  $\gamma = -1/\log_2(\tau^L)$ .

Vale ressaltar que na cópula Joe-Clayton (não simetrizada), mesmo quando os parâmetros de dependência caudal inferior e superior são iguais, a cópula ainda apresenta assimetria.

### 3 Método de Estimação

Como a função cópula dá a distribuição conjunta dos dados, a função de verossimilhança pode ser escrita por meio desta. Assim, a função de verossimilhança a ser maximizada é

$$\ell(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X}) = \sum_{t=1}^T \log \left( c(F_1(x_{1t} | \boldsymbol{\theta}_1), F_2(x_{2t} | \boldsymbol{\theta}_2) | \boldsymbol{\theta}_{c,t,S_t}) \prod_{i=1}^2 f_i(x_{it} | \boldsymbol{\theta}_i) \right), \quad (3)$$

onde  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  é a matriz com os dados observados (os retornos) e  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{c,t,S_t}, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2]'$  são os parâmetros do modelo, sendo  $\boldsymbol{\theta}_{c,t,S_t} = [\tau_{S_t}^L, \tau_{S_t}^U]'$  as dependências caudais inferior e superior da cópula, condicionais ao estado no qual a economia se encontrar,  $\boldsymbol{\theta}_i$  são os parâmetros da distribuição marginal do ativo  $i$ , que, no nosso modelo, não depende do estado (ou regime<sup>2</sup>) não observado da economia e  $T$  é o tamanho da amostra.

A equação (3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X}) &= \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{1t}; \boldsymbol{\theta}_1), F_2(x_{2t}; \boldsymbol{\theta}_2); \boldsymbol{\theta}_{c,t,S_t}) \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \log f_1(x_{1t}; \boldsymbol{\theta}_1) + \sum_{t=1}^T \log f_2(x_{2t}; \boldsymbol{\theta}_2) \\ \ell(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X}) &= \ell_c(\boldsymbol{\theta}_{c,t,S_t} | \mathbf{X}) + \ell_{f_1}(\boldsymbol{\theta}_1 | \mathbf{X}) + \ell_{f_2}(\boldsymbol{\theta}_2 | \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (4)$$

Neste trabalho fizemos a maximização da equação (4) separadamente, como em da Silva Filho e Ziegelmann (2010). Os dois últimos termos da equação são as verossimilhanças dos GARCH's de cada um dos ativos, que foram estimadas em um primeiro momento.. Os parâmetros estimados nesta fase foram usados como argumento para a maximização do primeiro termo da equação, referente à cópula.

Definindo as variáveis aleatórias  $u_{i,t} = F_X(x_i; \boldsymbol{\theta}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , isto é, a função de distribuição acumulada de cada um dos dois ativos, avaliada em cada ponto da amostra<sup>3</sup>, podemos reescrever a verossimilhança da função cópula de modo a deixar explícito o papel dos regimes da economia

<sup>2</sup>Ao longo do texto usaremos “estado” e “regime” como sinônimos.

<sup>3</sup>Note que a avaliação da distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$  em um ponto  $x$  é, ela própria, uma variável aleatória com distribuição uniforme entre zero e um,  $F_X(x) \sim U[0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
\ell_c(\boldsymbol{\theta}_{ct, S_t} | \mathbf{X}) &= \sum_{t=1}^T \log c(u_{1,t}, u_{2,t}; \boldsymbol{\theta}_{ct, S_t}) \\
&= \sum_{t=1}^T \log \left[ \sum_{S_t=0}^1 c(u_{1,t}, u_{2,t} | S_t, I_{t-1}) \mathbb{P}(S_t | I_{t-1}) \right], \tag{5}
\end{aligned}$$

onde consideramos que há dois estados na economia,  $S_t = \{0, 1\}$ . Para maximizarmos (5) precisamos das distribuições marginais dos retornos e da probabilidade de cada um dos estados; nas duas próximas subseções será mostrado como calcular estas quantidades.

### 3.1 Distribuições Marginais

Como frisado anteriormente, modelamos as marginais referentes a cada dos retornos como um GARCH(1,1). Ainda, utilizamos para os erros uma distribuição *skewed-t*, que permite a presença de assimetrias já nas marginais. Assim, o log-retorno, já diminuído da sua respectiva média,  $x_{it} = \ln P_{i,t} - \ln P_{i,t-1} - \bar{x}_i$ , onde  $P_i$  é o preço do ativo  $i$ , pode ser descrito por as seguintes equações,

$$\begin{aligned}
x_{it} &= h_{it}^{1/2} \epsilon_{it} \\
h_{it} &= \omega_i + \beta_i h_{it-1} + \alpha_i \epsilon_{it-1}^2,
\end{aligned}$$

onde  $h_{it}$  é a variância condicional de  $x_{it}$  dado o conjunto de informação de  $t$  e  $\epsilon_{it}$  é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída com  $\epsilon_{it} \sim \text{skewed-t}(\nu_i, \lambda_i)$ , onde  $\nu_i$  são os graus de liberdade e  $\lambda_i$  é a assimetria. Desse modo, a taxa de câmbio apresenta uma também uma distribuição *skewed-t*,  $u_{i,t} = F_i(x_{it} | h_{it}) = \text{skewed-t}(x_{it} h_{it}^{-1/2})$ .

### 3.2 Regimes não observados

Para a maximização de (5) é necessário que se conheça a probabilidade de cada estado,  $\mathbb{P}(S_t = k | I_{t-1})$ ,  $k = 0, 1$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Nesta parte do trabalho mostramos o algoritmo apresentado em Kim e Nelson (1999, capítulo 4) para esta estimação.

É assumido existirem apenas dois regimes e que as mudanças entre estes regimes sigam um processo Markoviano de primeira ordem. As probabilidades de transição são dadas por  $\mathbb{P}(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = p$  e  $\mathbb{P}(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) = q$ . O filtro pode ser implementado como segue.

- Passo 1: Inicia-se a recursão com  $\mathbb{P}(S_0 = k | I_0)$ ,  $k = 0, 1$ . Uma possibilidade é utilizar as probabilidades estacionárias da cadeia de Markov,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_0 = 0 | I_0) &= \pi_0 = \frac{1-p}{2-p-q} \\
\mathbb{P}(S_0 = 1 | I_0) &= \pi_1 = \frac{1-q}{2-p-q}.
\end{aligned}$$

- Passo 2: Dadas  $\mathbb{P}(S_{t-1} = k | I_{t-1})$ ,  $k = 0, 1$ , as probabilidades  $\mathbb{P}(S_t = k | I_{t-1})$ ,  $k = 0, 1$  podem ser calculadas como

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_t = k|I_{t-1}) &= \sum_{i=0}^1 \mathbb{P}(S_t = k, S_{t-1} = i|I_{t-1}) \\
&= \sum_{i=0}^1 \mathbb{P}(S_t = k|S_{t-1} = i) \mathbb{P}(S_{t-1} = i|I_{t-1}),
\end{aligned}$$

para  $k = 0, 1$ . Note que  $\mathbb{P}(S_{t-1} = i|I_{t-1})$ ,  $i = 0, 1$  são dadas pelo próprio algoritmo (próximo passo) e  $\mathbb{P}(S_t = k|S_{t-1} = i)$ ,  $k = 0, 1$ ,  $i = 0, 1$  são as probabilidades de transição, que são parâmetros a serem estimados no processo de maximização.

- Passo 3: Uma vez que o processo tenha se realizado no instante  $t$ , as probabilidades podem ser atualizadas através de

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_t = k|I_t) &= \mathbb{P}(S_t = k|I_{t-1}, u_{1,t}, u_{2,t}) \\
&= \frac{f(S_t = k, u_{1,t}, u_{2,t}|I_{t-1})}{c(u_{1,t}, u_{2,t}|I_{t-1})} \\
&= \frac{c(u_{1,t}, u_{2,t}|S_t = k, I_{t-1}) \mathbb{P}(S_t = k|I_{t-1})}{\sum_{j=0}^1 c(u_{1,t}, u_{2,t}|S_t = j, I_{t-1}) \mathbb{P}(S_t = j|I_{t-1})},
\end{aligned}$$

onde  $I_t = \{I_{t-1}, u_{1,t}, u_{2,t}\}$  e  $k = 0, 1$ .

Os passos 2 e 3 devem ser executados alternadamente, para  $t = 1, \dots, T$ , até que se tenha as probabilidades para todos os instantes.

Kim <sup>4</sup> ainda propôs um algoritmo de suavização que usa toda a série para o cálculo das probabilidades de transição, dada por

$$\mathbb{P}(S_t = l|I_T) = \sum_{k=0}^1 \frac{\mathbb{P}(S_{t+1} = k|S_t = l, I_t) \mathbb{P}(S_t = l|I_t) \mathbb{P}(S_{t+1} = k|I_T)}{\sum_{j=0}^1 \mathbb{P}(S_{t+1} = k|S_t = j, I_t) \mathbb{P}(S_t = j|I_t)},$$

que é iterada de  $t = T, \dots, 0$ .  $\mathbb{P}(S_1 = k|I_T)$ ,  $\dots, k = 1, 2$  é então usada como as probabilidades iniciais e repete-se os passos 2 e 3 alternados.

### 3.3 Dependência caudal

Os estados não observados afetam a função cópula através das dependências caudais inferior e superior. Em Patton Patton (2006) e da Silva Filho e Ziegelmann (2010) os parâmetros de dependência seguem um ARMA(1,10) restrito (para que se mantenham entre zero e um). Neste último ainda é permitido que a média de ARMA mude conforme o estado não observável da natureza.

Neste trabalho modelamos estes parâmetros como um MA(10)<sup>5</sup> com mudança de regime no intercepto,

$$\tau_t^N = \omega_{N,0} (1 - S_t) + (\omega_{N,0} + \omega_{N,1}) S_t + \alpha_N \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|, \quad N = L, U.$$

Para evitar problemas de identificação do modelo quanto qual regime significa alta dependência e qual significa baixa, a estimação se dá sob a restrição

<sup>4</sup>ver Kim e Nelson (1999, p. 68) e da Silva Filho e Ziegelmann (2010, p. 51)

<sup>5</sup>A escolha por um MA foi feita devido a restrições computacionais.

$$\omega_{L,1} \geq 0.$$

Assim, o estado 1 apresentará uma maior dependência caudal inferior. Outra restrição necessária sobre o espaço de parâmetros é que o parâmetro de dependência fique limitado entre zero e um, de modo que os parâmetros fiquem restritos ao espaço

$$(\omega_{N,0}, \omega_{N,1}, \alpha_N) \in \left\{ \omega_{N,0}, \omega_{N,1}, \alpha_N \mid 0 < \tau_t^N < 1, t = 1, \dots, T \right\}.$$

## 4 Dados

A amostra é constituída pelos principais índices setoriais da BM&F Bovespa<sup>6</sup>, assim como pelas suas três ações mais representativas. As cotações dos índices e das ações individuais foram coletadas com frequência diária, a partir de janeiro de 2008, mês em que todos os índices e ações utilizados no trabalho já estavam em efetiva negociação na bolsa. A base de dados utilizada para a coleta dos dados é o software Economática®.

São utilizadas séries de consumo (ICON11), energia elétrica (IEE11), imobiliário (IMOB11) e financeiro (IFNC11), todas disponibilizadas através do *site* da Bolsa. Adicionalmente, considera-se PETR4 e VALE5 como setores próprios, pela sua relevância em termos de volume de negócios e também pela ausência de índices específicos para os setores petrolífero e de mineração no mercado de ações brasileiro.

Para definição dos ativos subjacentes a cada índice, foram selecionados aqueles três de maior participação na 1ª prévia da carteira teórica do quadrimestre de maio a agosto de 2011. Assim, para o ICON11 foram utilizados os ativos AMBV4, BRFS4 e NATU3; para o IMOB11, PDGR3, BRML3 e GFSA4; para o IEE, CMIG4, COCE5 e CESP6<sup>7</sup>; finalmente, para o IFNC11, foram selecionados os papéis ITUB4, BBDC4 e ITSA4. A correlação linear entre todos os ativos e setores se encontra no apêndice deste trabalho.

## 5 Resultados das Estimações

Como dito anteriormente, o primeiro passo da estimação foi o cálculo das distribuições marginais através de um GARCH(1,1) com distribuição *skewed-t*. Os resultados desse passo estão na tabela (1). Um resultado encontrado na literatura é que o Índice Bovespa apresenta assimetria negativa ( $\lambda_i < 0$ ), ou seja, apresentam uma maior probabilidade na cauda referente a perdas. Porém, esse resultado apareceu apenas para Petrobrás e Vale, além dos ativos do setor elétrico.

Os resultados apresentados na tabela (2) indicam que não há mudanças de regime na estrutura de dependência dos pares de ativos do setor de consumo. Essa evidência de estado absorvente pode estar ligada ao fato de que o setor de consumo brasileiro se mostrou menos

<sup>6</sup>Os índices da Bolsa de valores de São Paulo são indicadores de desempenho de um conjunto de ações ao longo do tempo, e alocam papéis de acordo com a presença de negócios em pregão. Mais informações sobre os índices e sua metodologia de cálculo podem ser encontradas em <http://www.bmfbovespa.com.br/indices/>.

<sup>7</sup>CESP6 foi adicionada à amostra no lugar de MPXE3 pelo fato desta última não ter apresentado negócios em vários pregões no ano de 2008. Logo, para evitar possíveis vieses nas estimações, optou-se substituí-la pela ação imediatamente a seguir no critério de volume de negócios.

Tabela 1: Resultado das Estimacões das Marginais

<b>Ativo</b>	$w_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$v_i$	$\lambda_i$
<b>AMBV4</b>	5,13E-06	0,074	0,913	13,530	0,041
<b>BRFS3</b>	5,80E-06	0,064	0,926	9,332	0,055
<b>NATU3</b>	4,42E-06	0,057	0,933	19,873	0,075
<b>CMIG4</b>	6,14E-06	0,080	0,906	11,792	-0,011
<b>COCE5</b>	6,39E-06	0,072	0,908	4,720	-0,002
<b>CESP6</b>	3,33E-05	0,134	0,827	7,970	-0,026
<b>PDGR3</b>	1,92E-05	0,072	0,912	12,370	0,033
<b>BRML3</b>	6,23E-05	0,171	0,769	7,095	0,064
<b>GFSA3</b>	1,60E-05	0,100	0,890	21,722	0,092
<b>ITUB4</b>	8,87E-06	0,081	0,907	9,691	0,106
<b>BBDC4</b>	7,21E-06	0,074	0,912	17,581	0,090
<b>ITSA4</b>	8,86E-06	0,089	0,899	9,494	0,095
<b>ICON11</b>	4,88E-06	0,117	0,866	9,414	-0,068
<b>IEE</b>	2,10E-06	0,092	0,894	12,376	-0,077
<b>IMOB11</b>	2,46E-05	0,135	0,835	10,684	0,015
<b>IFNC11</b>	5,34E-06	0,081	0,908	11,602	0,041
<b>PETRA</b>	4,80E-06	0,077	0,914	20,806	-0,083
<b>VALE5</b>	6,92E-06	0,080	0,912	6,551	-0,054

Tabela 2: Resultado das Estimções Intra-setoriais

Ativos	Probabilidades		Cauda Inferior		Cauda Superior		Tempo Médio				
1	2	$p$	$q$	$\omega_{L,0}$	$\omega_{L,1}$	$\alpha_L$	$\omega_{U,0}$	$\omega_{U,1}$	$\alpha_U$	$S_t = 0$	$S_t = 1$
AMBV4	BRFS3	1,00	0,66	-1,47	0,41	-0,90					
AMBV4	NATU3	1,00	0,25	-0,52	0,58	-1,23					
BRFS3	NATU3	1,00	0,48	-1,01	0,44	-0,93					
CMIG4	COCE5	0,59	0,99	0,37	0,59	-0,73	0,13	0,73	-0,25	2,46	137,78
CMIG4	CESP6	1,00	0,46	-0,99	0,70	-1,50					
COCE5	CESP6	1,00	0,23	-0,43	0,23	-0,44					
PDGR3	BRML3	0,46	0,98	0,46	0,48	-0,61	0,23	0,03	-0,31	1,84	64,82
PDGR3	GFA3	0,43	0,78	0,68	0,34	-1,54	0,68	-0,08	-1,34	1,75	4,64
BRML3	GFA3	0,99	0,59	0,45	0,00	-0,94	1,04	-0,54	-1,04	122,67	2,46
ITUB4	BBDC4	0,18	0,84	0,75	0,18	-0,90	0,93	-0,59	-1,36	1,22	6,12
ITUB4	ITSA4	1,00	0,98	-2,39	0,82	-0,11					
BBDC4	ITSA4	0,49	0,54	0,66	0,34	-1,88	0,96	-0,20	-1,63	1,97	2,20

Nota: Os valores foram arredondados na terceira casa decimal. O tempo médio é medido em dias de duração do regime

suscetível a crise do *subprime* que outros setores por depender basicamente do mercado interno e, assim, mesmo que tenha existido queda dos preços desses ativos, não houveram mudanças no nível de dependência entre eles.

No setor de energia elétrica verifica-se também evidências de apenas um regime na estrutura de dependência entre os pares de ativos CEMIG4 e CESP6 e entre COCE5 e CESP6. Como  $q$  é muito próximo de 1 entre CEMIG4 e COCE5, não podemos afirmar que há mudança de regime. Não há indícios, portanto, de mudanças de regime na dependência dos ativos do setor de energia elétrica. Como se sabe, energia elétrica já é um setor consolidado no mercado e, assim como o setor de consumo, se mostrou menos suscetível a crise fazendo com que o nível da estrutura de dependência entre seus ativos se mantivessem relativamente constantes.

Outro par de ativos que não mostrou mudança de regime na estrutura de dependência foi ITUB4 e ITSA4. Este resultado já era esperado, uma vez que a ITSA4 é a *holding* que controla, entre outros, a empresa do ativo ITUB4 e, assim, espera-se um nível constante da dependência desses ativos ao longo da amostra.

Para todos os outros pares de ativos, apresentou-se evidências de mudanças de regime na estrutura de dependência. Dessa forma, verifica-se que, em geral, o nível de dependência de diferentes ativos, mesmo que de mesmo setor, muda de acordo com o estado da economia. Para esses pares de ativos, as evidências são de que a dependência caudal superior do regime 1 é menor que a do regime 0. Da forma como modelamos os regimes, isso significa dizer que em épocas associadas a crises, os ativos sobem com menor dependência. O parâmetro  $\alpha$  é sempre negativo porque quanto mais afastadas estavam as distribuições marginais nos últimos 10 períodos (modelamos com um  $ma(10)$ ), menor a dependência dos ativos. O tempo médio de duração de um regime depende das probabilidades de transição dos regimes. Verifica-se, assim, que em média, os ativos do setor imobiliário mudam de regime em menos tempo.

A tabela (3) apresenta os resultados das estimações inter-setoriais.

Os resultados descritos na tabela (3) indicam que existem mais evidências de dois regimes de estrutura de dependência entre-setores do que intra-setores. Apenas no par IEE e PETR4 não houve evidência de dois regimes de dependência. Como será visto posteriormente, a dependência entre esses setores é menor de toda a análise. Dessa forma, uma possível explicação para a existência de apenas um regime reside no fato de que os determinantes da dependência desses setores não relativamente invariantes a estados econômicos, já que IEE depende muito do mercado interno enquanto PETR4, depende mais do mercado externo.

Como no caso da análise intra-setorial, verifica-se que a dependência caudal superior do regime 1 é sempre menor que a do regime 0. Verifica-se também que o parâmetro  $\alpha$  é sempre negativo, como exposto na tabela (2). Interessante salientar, no entanto, que o tempo médio de permanência nos regimes é maior entre setores do que intra-setores.

Note que a maior dependência em média nos pares entre setores do que nos intra-setores e os entre setores apresentarem dois regimes não é um resultado contraditório. Isto porque haver ou não mudanças de regime não implica uma maior ou menor dependência, mas apenas uma mudança no nível desta.

A tabela(4) mostra os valores médios dos parâmetros de dependência intra-setoriais. Verifica-se que, dos pares de ativos analisados, os que apresentam uma maior dependência caudal, tanto inferior como superior são os do setor financeiro. Conforme De Nicolo e Kwast (2002), esta maior dependência entre o retorno dos ativos dessas empresas pode ser entendida como uma medida de um maior risco sistêmico potencial enfrentado pelo setor, principalmente em reação a cenários macroeconômicos adversos. Já as empresas que

Tabela 3: Resultado das Estimções Inter-Setorias

Ativos	Probabilidades			Cauda Inferior			Cauda Superior			Tempo M3dio		
	1	2	$q$	$\omega_{L,0}$	$\omega_{L,1}$	$\alpha_L$	$\omega_{U,0}$	$\omega_{U,1}$	$\alpha_U$	$S_t = 0$	$S_t = 1$	
<b>ICON11</b>	<b>IEE</b>		0,60	0,11	0,68	0,29	-1,78	0,87	-0,40	-1,22	2,49	1,13
<b>ICON11</b>	<b>IMOB11</b>		0,44	0,47	0,69	0,32	-1,69	0,78	-0,40	-0,92	1,80	1,89
<b>ICON11</b>	<b>IFNC11</b>		0,49	0,35	0,68	0,29	-1,41	0,77	-0,38	-0,75	1,97	1,54
<b>ICON11</b>	<b>PETRA</b>		0,95	0,40	0,71	0,10	-1,56	0,97	-0,49	-1,05	22,15	1,67
<b>ICON11</b>	<b>VALE5</b>		0,91	0,71	0,63	0,27	-1,74	1,00	-0,39	-1,68	11,51	3,42
<b>IEE</b>	<b>IMOB11</b>		0,47	0,52	0,71	0,28	-1,83	0,69	-0,08	-1,58	1,90	2,08
<b>IEE</b>	<b>IFNC11</b>		0,56	0,81	0,63	0,31	-1,09	0,53	-0,17	-0,62	2,25	5,39
<b>IEE</b>	<b>PETRA</b>		1,00		0,73		-1,59	0,90		-0,46		
<b>IEE</b>	<b>VALE5</b>		0,87	0,86	0,72	0,31	-1,95	0,40	-0,19	-0,57	7,49	7,29
<b>IMOB11</b>	<b>IFNC11</b>		0,42	0,02	0,67	0,28	-1,93	1,07	-0,40	-1,94	1,73	1,02
<b>IMOB11</b>	<b>PETRA</b>		0,31	0,87	0,69	0,34	-1,56	0,63	0,00	-1,41	1,45	7,89
<b>IMOB11</b>	<b>VALE5</b>		0,88	0,64	0,72	0,23	-1,94	0,72	0,00	-1,94	8,14	2,82
<b>IFNC11</b>	<b>PETRA</b>		0,84	0,32	0,70	0,07	-1,53	0,97	-0,40	-1,24	6,21	1,48
<b>IFNC11</b>	<b>VALE5</b>		0,22	0,43	0,67	0,34	-1,44	0,61	-0,08	-1,14	1,28	1,76
<b>PETRA</b>	<b>VALE5</b>		0,86	0,74	0,67	0,26	-1,55	0,88	-0,40	-1,12	7,14	3,86

Nota: Os valores foram arredondados na terceira casa decimal. O tempo m3dio 3 medido em dias de dura33o do regime.

apresentam menor dependência entre si são as do setor de energia elétrica.

Entre os pares de ativos, apenas no setor financeiro tem-se uma maior dependência caudal superior em relação a dependência caudal inferior em todos os três pares deste. Além disso, o estado caracterizado por uma maior dependência caudal inferior trouxe uma menor dependência na cauda superior<sup>8</sup>, o que pode indicar que nos períodos associados à crise a probabilidade de um evento marcoeconômico afetar positivamente todo os ativos do setor diminuiu. Como era de se esperar, o desvio padrão dos parâmetros de dependência é maior no pares que apresentam dois estados.

Tabela 4: Valor médio e desvio padrão dos parâmetros de dependência caudais inferior e superior, nos dois estados, para as relações intra-setoriais.

Ativos		Cauda inferior				Cauda superior			
1	2	$\overline{\tau^L}$	$\text{dp}(\tau^L)$	$\overline{\tau_{S=0}^L}$	$\overline{\tau_{S=1}^L}$	$\overline{\tau^U}$	$\text{dp}(\tau^U)$	$\overline{\tau_{S=0}^U}$	$\overline{\tau_{S=1}^U}$
<b>AMBV4</b>	<b>BRFS3</b>	0.29	0.10	-	-	0.18	0.06	-	-
<b>AMBV4</b>	<b>NATU3</b>	0.11	0.03	-	-	0.26	0.08	-	-
<b>BRFS3</b>	<b>NATU3</b>	0.20	0.07	-	-	0.18	0.06	-	-
<b>CMIG4</b>	<b>COCE5</b>	0.17	0.10	0.16	0.76	0.07	0.11	0.06	0.79
<b>CMIG4</b>	<b>CESP6</b>	0.21	0.07	-	-	0.32	0.11	-	-
<b>COCE5</b>	<b>CESP6</b>	0.11	0.03	-	-	0.11	0.03	-	-
<b>PDGR3</b>	<b>BRML3</b>	0.32	0.09	0.31	0.78	0.16	0.02	0.15	0.19
<b>PDGR3</b>	<b>GFA3</b>	0.48	0.17	0.39	0.73	0.40	0.08	0.42	0.34
<b>BRML3</b>	<b>GFA3</b>	0.21	0.07	0.20	0.21	0.24	0.11	0.77	0.23
<b>ITUB4</b>	<b>BBDC4</b>	0.69	0.07	0.66	0.84	0.70	0.22	0.80	0.21
<b>ITUB4</b>	<b>ITSA4</b>	0.80	0.07	-	-	0.81	0.01	-	-
<b>BBDC4</b>	<b>ITSA4</b>	0.60	0.18	0.44	0.78	0.68	0.11	0.77	0.58

Nota: O cálculo da média e do desvio padrão dos parâmetros de dependência caudais, devido a estes não serem observáveis, foi realizado levando em considerando a probabilidade suavizada dos dois estados em cada um dos instantes do tempo.

A tabela (5) mostra os resultados para as relações entre setores. As dependências caudais, tanto inferior quanto superior, se mostram, para a maioria dos pares, maior entre setores do que intra-setores, exceto em relação aos pares dos ativos listados no índice das instituições financeiras. A explicação para esse fenômeno reside no fato de que os índices setoriais são compostos por várias empresas, o que reduz a variabilidade dos retornos. Os retornos dos índices são, portanto, suavizados e, assim, tendem a ter maior dependência.

As maiores dependências inferiores ocorrem entre os pares índice de consumo-instituições financeiras (0,63) e índice de consumo-índice de energia elétrica (0,59). A menor dependência ocorre entre o índice de energia elétrica e a Petrobrás, o único par que não apresentou dois

<sup>8</sup>Os dois pares que são exceção, CMIG4-COCE5 e PDGR3-BRML3 possuem um estado bastante absorvente, o que dificulta separar os efeitos em dois estados.

regimes. A menor dependência desses setores decorre dos diferentes determinantes de preços que esses setores estão sujeitos. Os determinantes do preço da Petrobrás são, em grande parte, externos, já que o petróleo é uma *comoditie*. Já o setor de energia elétrica tendem a ter determinantes dados pelo mercado interno.

Em todos os pares, o parâmetro de dependência caudal superior foi menor, em média, do que o inferior, indicando uma maior dependência entre os setores da economia nos momentos de perda do que nos de alta, tal como havia sido evidenciado por Patton (2004). As maiores dependências na cauda superior ocorrem entre os pares imobiliário-financeiro (0,48) e consumo-financeiro (0,44), que mostram que as empresas do setor financeiro se beneficiam mais do bom momento dos setores de bens de consumo e imobiliário, cujo aumento das vendas aumenta a demanda por crédito dos consumidores. Outro resultado é que o estado de alta dependência nas perdas implica, assim como antes, em uma menor dependência na alta.

Em termos práticos, como uma menor dependência entre ativos gera uma carteira com menor risco, um fundo que invista nos setores de energia elétrica ou de consumo tende, portanto, a ter menor risco em relação a outros fundos setoriais. Na análise entre setores, verificou-se como estratégia de diminuição a combinação de Petrobrás com outro setor.

Tabela 5: Valor médio e desvio padrão dos parâmetros de dependência caudais inferior e superior, nos dois estados, para as relações entre setores.

Ativos		Cauda inferior				Cauda superior			
1	2	$\overline{\tau^L}$	$\text{dp}(\tau^L)$	$\overline{\tau_{S=0}^L}$	$\overline{\tau_{S=1}^L}$	$\overline{\tau^U}$	$\text{dp}(\tau^U)$	$\overline{\tau_{S=0}^U}$	$\overline{\tau_{S=1}^U}$
<b>ICON11</b>	<b>IEE</b>	0.59	0.17	0.39	0.68	0.39	0.20	0.67	0.27
<b>ICON11</b>	<b>IMOB11</b>	0.56	0.19	0.40	0.73	0.43	0.21	0.63	0.23
<b>ICON11</b>	<b>IFNC11</b>	0.63	0.16	0.46	0.75	0.44	0.19	0.65	0.27
<b>ICON11</b>	<b>PETR4</b>	0.46	0.11	0.37	0.47	0.29	0.15	0.74	0.25
<b>ICON11</b>	<b>VALE5</b>	0.51	0.15	0.30	0.57	0.39	0.20	0.69	0.30
<b>IEE</b>	<b>IMOB11</b>	0.47	0.18	0.33	0.61	0.33	0.10	0.37	0.29
<b>IEE</b>	<b>IFNC11</b>	0.53	0.16	0.43	0.74	0.37	0.08	0.42	0.25
<b>IEE</b>	<b>PETR4</b>	0.37	0.11	-	-	0.23	0.07	-	-
<b>IEE</b>	<b>VALE5</b>	0.46	0.19	0.30	0.61	0.18	0.10	0.27	0.09
<b>IMOB11</b>	<b>IFNC11</b>	0.52	0.17	0.34	0.62	0.48	0.22	0.73	0.33
<b>IMOB11</b>	<b>PETR4</b>	0.40	0.16	0.34	0.68	0.31	0.10	0.31	0.32
<b>IMOB11</b>	<b>VALE5</b>	0.50	0.15	0.33	0.56	0.33	0.11	0.33	0.33
<b>IFNC11</b>	<b>PETR4</b>	0.46	0.11	0.40	0.48	0.41	0.18	0.73	0.33
<b>IFNC11</b>	<b>VALE5</b>	0.56	0.19	0.42	0.76	0.38	0.07	0.41	0.33
<b>PETR4</b>	<b>VALE5</b>	0.56	0.16	0.40	0.66	0.43	0.21	0.69	0.29

Nota: O cálculo da média e do desvio padrão dos parâmetros de dependência caudais, devido a estes não serem observáveis, foi realizado levando em considerando a probabilidade suavizada dos dois estados em cada um dos instantes do tempo.

## Conclusão

Dentro da literatura de gestão de carteiras, um dos desafios a serem transpostos é a questão do risco e da dependência conjunta entre ativos e índices financeiros. A aplicação da metodologia de cópulas em finanças tem sido, de maneira geral, focada na análise de índices acionários internacionais (ver Rockinger e Jondeau (2001), Chollete et al. (2008), Pereira (2009), da Silva Filho e Ziegelmann (2010), entre outros), mas não em índices e ativos locais. Trabalhos que estudam a estrutura de dependência entre ativos ou setores dentro do Brasil ainda são escassos na literatura.

Paralelamente à necessidade de modelar os parâmetros de dependência entre ativos e setores nacionais, a BM&F Bovespa vem focando suas forças na constituição de novos índices setoriais, com o intuito de refletir melhor a realidade do mercado acionário brasileiro. Além dos dezessete índices que atualmente são monitorados no Brasil, pelo menos outros quatro devem iniciar suas atividades em maio de 2011. Essa maior atenção que a Bolsa está dando à criação de novos indicadores é uma boa janela de oportunidade para estudos que visam explorar melhor a incorporação desses índices à gestão ativa de carteiras.

Nesse sentido, este trabalho objetivou modelar os parâmetros de dependência entre índices setoriais da BM&F Bovespa e seus principais ativos subjacentes, classificados segundo critérios de liquidez, no período de 01/01/2008 a 31/03/2011. Utilizou-se a metodologia de *Regime Switching copula* que permite analisar dependências não lineares, diferentes para retornos negativos e positivos e, também, com a possibilidade de alterações em seu nível dado mudanças de regime da economia. Os resultados sugerem que um fundo que invista nas empresas do setor de consumo ou do setor de energia elétrica tem menor risco. Além disso, fundos que invistam na Petrobrás e em outro setor da economia, também apresenta menor risco do que investimento em outras combinações de setores. E, como sugerido na literatura, a dependência na cauda inferior se mostrou maior do que na cauda superior, isto é, os ativos mostraram maior dependência em momentos de queda.

A partir da realização deste trabalho, sugere-se mais estudos, como o realizado aqui, que estudem a estrutura dependência de ativos dentro dos países. Ainda, para inferir medidas de risco, surge como possibilidade a aplicação de modelos de Valor em Risco (VaR) nos resultados expostos nesse trabalho.

## Referências

- ANG, A., E CHEN, J. Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63(3):443–494, March 2002.
- CHOLLETE, L., HEINEN, A., E VALDESOGO, A. Modeling international financial returns with a multivariate regime switching copula. CORE Discussion Papers 2008013, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), March 2008.
- DA SILVA FILHO, O., E ZIEGELMANN, F. Dinâmica da Dependência Usando Cópulas com Mudança de Regime. 2010.
- DE NICOLO, G., E KWAST, M. Systemic risk and financial consolidation: Are they related? *Journal of Banking & Finance*, 26(5):861–880, 2002. ISSN 0378-4266.

- ELTON, E., GRUBER, M., BROWN, S., GOETZMANN, W., ET AL. Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos. *São Paulo: Atlas*, 2004.
- FERMANIAN, J.-D., E SCAILLET, O. Some statistical pitfalls in copula modeling for financial applications. FAME Research Paper Series rp108, International Center for Financial Asset Management and Engineering, March 2004.
- KIM, C., E NELSON, C. State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications. *MIT Press Books*, 1999.
- NELSEN, R. *An introduction to copulas*. Springer Verlag, 2006. ISBN 0387286594.
- PATTON, A. Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review*, 47(2):527–556, 2006.
- PATTON, A. J. On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1):130–168, 2004. doi: 10.1093/jjfinec/nbh006.
- PELLETIER, D. Regime switching for dynamic correlations. *Journal of Econometrics*, 131(1-2):445 – 473, 2006. ISSN 0304-4076. doi: DOI:10.1016/j.jeconom.2005.01.013.
- PEREIRA, P. L. V. Cópulas: uma alternativa para a estimação de modelos de risco multivariados. Textos para discussão 179, Escola de Economia de São Paulo, Getulio Vargas Foundation (Brazil), 2009.
- REILLY, F., E BROWN, K. Investment Analysis and Portfolio Management, 7 th. *Mason, Ohio: South-Western, Thomson*, 2003.
- ROCKINGER, M., E JONDEAU, E. Conditional dependency of financial series: An application of copulas. Documents de travail, Banque de France, 2001.
- SHARPE, W., ALEXANDER, G., E BAILEY, J. Investments. *Englewood Cliffs, NJ*, 1995.

## A Apêndice

Na próxima página será apresentado a matriz de correlação dos retornos

### Correlação dos Retornos

	AMBV4	BRFS3	NATU3	CMIG4	COCE5	CESP6	PDGR3	BRML3	GFS3	ITUB4	BBDC4	ITSA4	ICON11	IEE	IMOB11	IFNC11	PETRA4	VALE5
AMBV4	1.00	0.82	0.95	0.81	0.89	0.30	0.92	0.95	0.29	0.88	0.85	0.93	0.94	0.94	0.72	0.91	-0.12	0.69
BRFS3	0.82	1.00	0.73	0.74	0.72	0.53	0.86	0.88	0.56	0.84	0.89	0.84	0.92	0.85	0.84	0.86	0.22	0.83
NATU3	0.95	0.73	1.00	0.84	0.94	0.09	0.88	0.88	0.17	0.86	0.77	0.93	0.88	0.94	0.61	0.89	-0.24	0.53
CMIG4	0.81	0.74	0.84	1.00	0.80	0.09	0.79	0.77	0.19	0.80	0.75	0.85	0.81	0.88	0.57	0.80	-0.08	0.54
COCE5	0.89	0.72	0.94	0.80	1.00	0.08	0.87	0.84	0.24	0.87	0.75	0.91	0.85	0.96	0.63	0.89	-0.05	0.54
CESP6	0.30	0.53	0.09	0.09	1.00	0.08	0.44	0.48	0.71	0.39	0.55	0.32	0.49	0.27	0.71	0.39	0.52	0.72
PDGR3	0.92	0.86	0.88	0.79	0.87	0.44	1.00	0.95	0.58	0.96	0.95	0.96	0.98	0.95	0.90	0.98	0.16	0.79
BRML3	0.95	0.88	0.88	0.77	0.84	0.48	0.95	1.00	0.47	0.90	0.91	0.92	0.96	0.93	0.84	0.93	0.08	0.79
GFS3	0.29	0.56	0.17	0.19	0.24	0.71	0.58	0.47	1.00	0.58	0.69	0.47	0.56	0.37	0.86	0.56	0.76	0.75
ITUB4	0.88	0.84	0.86	0.80	0.87	0.39	0.96	0.90	0.58	1.00	0.95	0.98	0.96	0.93	0.87	0.99	0.21	0.79
BBDC4	0.85	0.89	0.77	0.75	0.75	0.55	0.95	0.91	0.69	0.95	1.00	0.92	0.96	0.87	0.94	0.95	0.29	0.88
ITSA4	0.93	0.84	0.93	0.85	0.91	0.32	0.96	0.92	0.47	0.98	0.92	1.00	0.96	0.96	0.82	0.99	0.07	0.74
ICON11	0.94	0.92	0.88	0.81	0.85	0.49	0.98	0.96	0.56	0.96	0.96	0.96	1.00	0.95	0.90	0.97	0.14	0.84
IEE	0.94	0.85	0.94	0.88	0.96	0.27	0.95	0.93	0.37	0.93	0.87	0.96	0.95	1.00	0.76	0.95	0.03	0.69
IMOB11	0.72	0.84	0.61	0.57	0.63	0.71	0.90	0.84	0.86	0.87	0.94	0.82	0.90	0.76	1.00	0.88	0.47	0.89
IFNC11	0.91	0.86	0.89	0.80	0.89	0.39	0.98	0.93	0.56	0.99	0.95	0.99	0.97	0.95	0.88	1.00	0.18	0.78
PETRA4	-0.12	0.22	-0.24	-0.08	-0.05	0.52	0.16	0.08	0.76	0.21	0.29	0.07	0.14	0.03	0.47	0.18	1.00	0.50
VALE5	0.69	0.83	0.53	0.54	0.54	0.72	0.79	0.79	0.75	0.79	0.88	0.74	0.84	0.69	0.89	0.78	0.50	1.00