

Modelagem De Superfícies De Volatilidade Para Opções Com Baixa Liquidez Sobre Pares De Moedas, Cujos Componentes Apresentam Opções Líquidas Em Outros Pares

Resumo

Este trabalho apresenta um modelo para determinação da superfície de volatilidades de um par de moedas cujas opções têm baixa liquidez, utilizando superfícies de volatilidade com maior liquidez, de pares de moedas em que as moedas estudadas sejam uma de suas componentes. Esse objetivo é atingido através da utilização de um modelo de volatilidade estocástica. A calibração de seus parâmetros é feita a partir dos valores de mercado de *Butterfly Spreads* e *Risk Reversals* dos pares de moedas líquidos. O trabalho contribui em relação à literatura no sentido de ampliar a cobertura de *strikes* e vencimentos considerados, permitindo que, tanto opções pouco líquidas e fora do dinheiro, como notas estruturadas com opções embutidas possam ser mais adequadamente apreçadas.

Palavras-chave: Volatilidade Estocástica, Superfície de Volatilidade, Opções de Câmbio

Abstract

This work presents a model for determining the volatility surface of a currency pair whose options have low liquidity, using higher liquidity volatility surfaces of other currency pairs, in which the desired currencies are one of their components. This goal is achieved through the use of a stochastic volatility model. The calibration of its parameters is done from market values of the Butterfly Spreads and Risk Reversals of the liquid-currency pairs. This work contributes to the literature in an effort to broaden the scope of strikes and maturities considered, allowing for both illiquid and out-of-the-money options, as well as structured notes with embedded options, to be more appropriately priced.

Keywords: Stochastic Volatility. Volatility Surface, Currency Options

JEL: C02, C32

Área Anpec: Área 7 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

Modelagem De Superfícies De Volatilidade Para Opções Com Baixa Liquidez Sobre Pares De Moedas, Cujos Componentes Apresentam Opções Líquidas Em Outros Pares

Ricardo Consonni (EESP/FGV)
Afonso de Campos Pinto (EESP/FGV)

Resumo

Este trabalho apresenta um modelo para determinação da superfície de volatilidades de um par de moedas cujas opções têm baixa liquidez, utilizando superfícies de volatilidade com maior liquidez, de pares de moedas em que as moedas estudadas sejam uma de suas componentes. Esse objetivo é atingido através da utilização de um modelo de volatilidade estocástica. A calibração de seus parâmetros é feita a partir dos valores de mercado de *Butterfly Spreads* e *Risk Reversals* dos pares de moedas líquidos. O trabalho contribui em relação à literatura no sentido de ampliar a cobertura de *strikes* e vencimentos considerados, permitindo que, tanto opções pouco líquidas e fora do dinheiro, como notas estruturadas com opções embutidas possam ser mais adequadamente apreçadas.

Palavras-chave: Volatilidade Estocástica, Superfície de Volatilidade, Opções de Câmbio

Abstract

This work presents a model for determining the volatility surface of a currency pair whose options have low liquidity, using higher liquidity volatility surfaces of other currency pairs, in which the desired currencies are one of their components. This goal is achieved through the use of a stochastic volatility model. The calibration of its parameters is done from market values of the Butterfly Spreads and Risk Reversals of the liquid-currency pairs. This work contributes to the literature in an effort to broaden the scope of strikes and maturities considered, allowing for both illiquid and out-of-the-money options, as well as structured notes with embedded options, to be more appropriately priced.

Keywords: Stochastic Volatility. Volatility Surface, Currency Options

JEL: C02, C32

Área Anpec: Área 7 - Microeconomia, Métodos Quantitativos e Finanças

1. Introdução

O mercado de opções de câmbio é um dos que apresentam grande liquidez há vários anos, e o correto apreçamento de seus instrumentos se torna imperativo para o sucesso de qualquer um dos seus participantes. Este estudo apresenta um modelo que determina os pontos faltantes em uma superfície de volatilidades, principalmente quando os respectivos dados de mercado são escassos. Estas superfícies servem como base para o apreçamento de instrumentos financeiros mais sofisticados, como opções exóticas e notas estruturadas e, neste sentido, a sua adequada construção é de suma importância.

O modelo é aplicado ao caso de opções sobre o Euro x Dólar Canadense (EURCAD), que até meados de 2007 eram muito pouco líquidas, começaram a ganhar liquidez de forma consistente a partir de 2008, e hoje já são bastante negociadas. O modelo utiliza as informações das volatilidades implícitas de opções de pares com maior liquidez (USDCAD - Dólar Americano x Dólar Canadense e EURUSD - Euro x Dólar Americano), tratando os processos de volatilidades como puramente estocásticos. A escolha destes pares de moedas se deu pela falta de liquidez de outros pares de moedas envolvendo o Real como um de seus componentes, e pelo fato das opções sobre o EURCAD ter apresentado um aumento significativo de liquidez nos últimos anos, permitindo que o modelo pudesse ser verificado com maior precisão.

Derman e Kani (1994) mostraram que há um efeito conhecido como ‘sorriso de volatilidade,’ onde as volatilidades implícitas das opções nos seus modelos de apreçamento aumentam à medida que se afastam do preço *spot* do ativo-objeto, tanto para opções *in-the-money* como para opções *out-of-the-money*. Adicionalmente, mostram que a volatilidade também aumenta com o prazo até o vencimento, um fenômeno conhecido como ‘estrutura a termo da volatilidade.’ Esses efeitos se opõem ao que o modelo proposto por Black-Scholes (1973) assume, onde a volatilidade é considerada constante, para qualquer *strike* ou prazo de vencimento. Diversos estudos focam nos fatores que contribuem na formação do sorriso de volatilidade. Fama (1964) demonstrou que os retornos dos ativos não seguem uma distribuição normal. Jarrow e Rudd (1982) e Corrado e Su (1997) estudaram a assimetria e a curtose nas distribuições históricas dos retornos. Merton (1976) aborda a existência de saltos nos preços dos ativos. Hull & White (1987) abordaram o comportamento estocástico da volatilidade. Garman e Kohlagen (1983) adaptaram o modelo de Black e Scholes (1973) para opções de câmbio, mantendo as suas premissas, estendendo-o para lidar com a presença de duas taxas de juros, uma para cada moeda envolvida. A principal contribuição do modelo Garman-Kohlhagen (GK) é que a taxa de câmbio pode ser vista como um ativo que paga um dividendo contínuo. O modelo de Heston (1993) expande este conceito, assumindo que essas taxas variam com o tempo, segundo um modelo estocástico. Com volatilidades também estocásticas.

Recentemente, diversos autores brasileiros utilizaram técnicas para aprofundar o estudo das superfícies de volatilidades implícitas: Oya (2009) utilizou a Análise de Componentes Principais (PCA) para estudar a superfície de volatilidade implícita de opções européias do par de moedas USDBRL (Dólar Americano x Real). Vargas (2010) utilizou a volatilidade histórica do ativo-objeto como parâmetro para determinar a superfície de volatilidades implícitas de ações do Ibovespa. Bustamante (2010) utilizou a Transformada Rápida de Fourier para determinar a superfície de volatilidades das opções USDBRL através do modelo de Heston (1983). Iveson (2010) estudou a determinação de uma superfície de volatilidades de um par de moedas com baixa liquidez, a partir de superfícies de volatilidades com maior liquidez, também com base no modelo de Heston (1983).

Ao utilizar um número maior de prazos até o vencimento e de relações de *moneyness*, buscando obter valores mais precisos para toda a faixa de valores negociados, este trabalho estende o modelo proposto por Iveson (2010), que determina a superfície de volatilidades de um par de moedas cujas opções têm baixa liquidez, utilizando as superfícies de volatilidades de outros pares de moedas com componentes comuns ao par ilíquido, cujas opções são mais líquidas. O objetivo aqui é permitir que se estime com maior acurácia os valores ausentes das superfícies de volatilidades existentes, devido a dados incompletos em função da falta de histórico de negócios. Adicionalmente, o modelo aqui apresentado busca permitir que se determine uma superfície de volatilidades que possibilite identificar eventuais oportunidades de arbitragem devido a desvios na precificação das opções disponíveis no mercado.

Este trabalho está dividido em quatro seções, incluindo esta introdução. A segunda seção descreve o modelo utilizado e as respectivas hipóteses que o permeiam. A terceira seção apresenta tanto a calibração dos parâmetros do modelo a partir dos dados de mercado, como a construção da superfície de volatilidades implícitas e a discussão da qualidade dos resultados obtidos. A última seção conclui o trabalho.

2. Descrição do Modelo

O modelo adotado neste trabalho é uma adaptação do modelo de Heston, pois assume que a taxa de câmbio é estocástica, uma vez que a taxa de câmbio pode ser expressa como uma relação entre as taxas de juros local e externa. Cada par de moedas é identificado por um índice i , para $i = 1, 2, 3$, com as respectivas dinâmicas descritas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} dS_t^i &= \mu_i \cdot S_t^i \cdot dt + \sigma_i \cdot S_t^i \cdot dW_i \\ d\sigma_i^2 &= \alpha_i \sigma_i \cdot dZ_i \\ \langle dW_i, dZ_i \rangle &= \rho_i \cdot dt \end{aligned} \quad [1]$$

A expressão $\langle dW_i, dZ_i \rangle$ denota o produto escalar entre os processos de Wiener dW_i e dZ_i , podendo ser interpretado como a correlação entre ambos. As volatilidades instantâneas σ_i têm taxa de reversão à média nula. O índice i identifica os pares de moedas aqui considerados de acordo com a Tabela 1 abaixo:

Tabela 1: Pares de Moedas considerados

i	Par de Moedas
1	USDCAD
2	EURUSD
3	EURCAD

A escolha destes pares se deu pela falta de liquidez de outros pares de moedas que envolvessem o Real como um de seus componentes, e pelo fato das opções sobre o EURCAD terem apresentado um aumento significativo de liquidez desde 2008, permitindo que o modelo pudesse ser verificado com maior precisão.

Este trabalho se utiliza, dentre as diversas estruturas presentes no Mercado, de dois produtos largamente negociados, *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* definidos a seguir :

- O *Delta Risk Reversal* (RR_Δ) é a diferença entre as volatilidades implícitas de uma *call* e uma *put*, ambas com mesmo Delta, e nos fornece a inclinação da curva de volatilidade, que pode ser utilizada como uma medida do grau de assimetria da distribuição de retornos do ativo-objeto:

$$RR_\Delta = \sigma_{Call\Delta} - \sigma_{Put\Delta} \quad [2]$$

- O *Delta Butterfly Spread* (BF_Δ) é a diferença entre a média das volatilidades implícitas da *call* e da *put* com mesmo Delta e a volatilidade implícita da opção *at-the-money*, e nos fornece a curvatura da curva de volatilidades, sendo uma boa medida do grau de achatamento da distribuição de retornos do ativo-objeto:

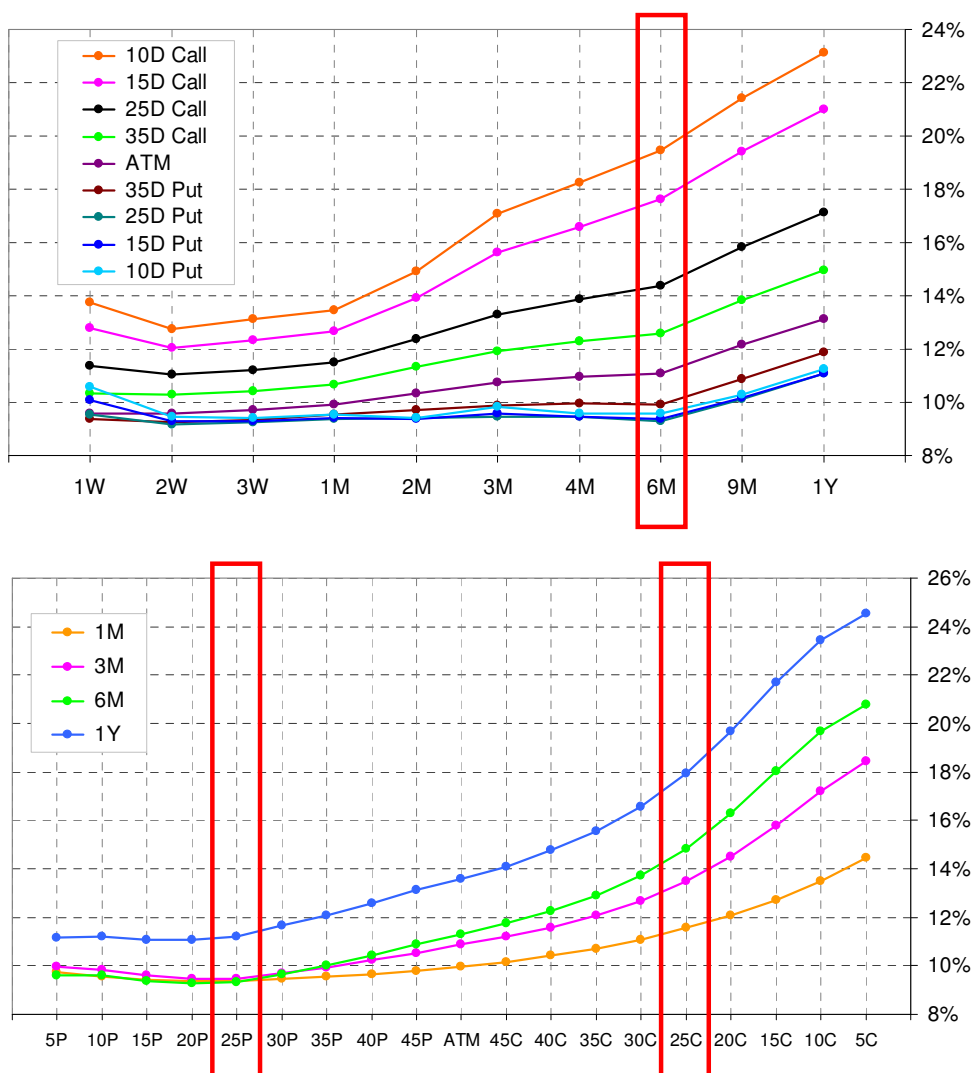
$$BF_\Delta = \frac{\sigma_{Call\Delta} + \sigma_{Put\Delta}}{2} - \sigma_{ATM} \quad [3]$$

Quanto maior for a procura por um contrato de opções, maior será o seu preço e, conseqüentemente, maior será a sua volatilidade implícita associada. Para um dado Delta, um *Risk Reversal* positivo indica

que a volatilidade da *call* é superior ao da *put*, indicando que o mercado atribui a distribuição assimétrica de expectativas de retornos do ativo-base, com maior número de pessoas apostando numa alta de seu preço do que numa baixa. Em seu estudo, Iveson (2010) também utilizou dados de *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* com Delta 0.25 e vencimento de 6 meses, dos pares de moedas USDBRL e EURUSD para determinar a superfície de volatilidades do par EURBRL. Entretanto, os fenômenos do sorriso de volatilidade e da estrutura a termo da volatilidade, descritos por Derman e Kani (1994), mostram que essa abordagem simplificada (com apenas um Delta e um vencimento) pode ser ineficiente para determinar uma superfície de volatilidades implícitas completa, e aqui reside a maior contribuição deste trabalho.

A Figura 1 mostra as volatilidades implícitas de *calls* e *puts* para o par de moedas EURBRL, no dia 15/03/2011, destacando que os valores para um mesmo prazo, ou para um mesmo Delta, podem apresentar grandes variações. Observa-se um crescimento considerável nos valores das volatilidades implícitas, aumentando à medida que cresce o *strike* da opção: as volatilidades implícitas são mais baixas para as *puts* mais *out-of-the-money* (com Deltas menores), aumentando à medida que se aproxima da opção *at-the-money*, continuando seu crescimento, até culminar nas *calls* mais *out-of-the-money* (novamente com Deltas menores). Outro importante fenômeno observado é a pequena variação das volatilidades implícitas das *puts* ao longo do tempo, apresentando um aumento sensível apenas nos prazos de vencimentos acima de 6 meses. Essa característica não se observa nas volatilidades implícitas das *calls*, que exibem um crescimento constante ao longo do tempo, como esperado.

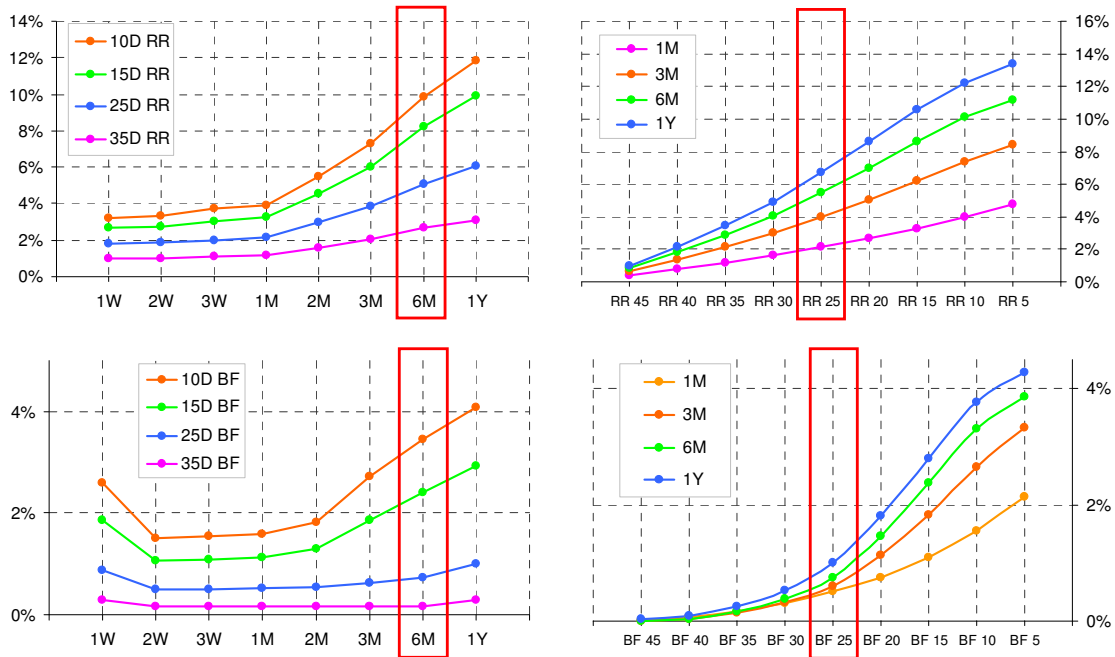
Figura 1: Volatilidades implícitas para o par de moedas EURBRL, no dia 15/03/2011



A Figura 2 abaixo mostra os valores dos *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* observados no mercado no dia 15/03/2011, para o mesmo par de moedas. De forma análoga, os valores para diferentes Deltas e

prazos mostram-se bastante distintos, principalmente nos prazos de 6 meses para o vencimento. As diferenças entre as volatilidades implícitas das *calls* e *puts* de mesmo Delta são evidenciadas nesses gráficos, indicando que a generalização de um valor para todo e qualquer prazo pode se mostrar ineficaz para a correta determinação da superfície de volatilidades.

Figura 2: Risk Reversals e Butterfly Spreads do par de moedas EURBRL, no dia 15/03/2011



Cálculo dos parâmetros α_i e ρ_i dos pares de moedas líquidos a partir dos valores de *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads*

Conforme demonstrado por Iveson (2010), os parâmetros α_i e ρ_i das equações [1] para $i = 1, 2$, podem ser obtidos a partir do *Risk Reversal*, do *Butterfly Spread* e da volatilidade da opção *at-the-money* de um determinado par de moedas i , através das seguintes equações:

$$\alpha_i = \sqrt{T \left(d_1^2 + \frac{BF_{i\Delta}}{2\sigma_{ATMi}} \right)} \quad [4]$$

$$\rho_i = \frac{RR_{i\Delta}}{d_1} \sqrt{\frac{d_1^2 + \frac{BF_{i\Delta}}{2\sigma_{Ai}}}{6\sigma_{ATMi} BF_{i\Delta}}} \quad [5]$$

O valor d_1 é obtido a partir das funções inversas das distribuições normais-padrão de cada um dos Deltas dos contratos de *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* utilizados.

Yekutieli (2004) utilizou as cotações dos contratos de opções *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* como *inputs* em uma rotina de calibração que busca o melhor ajuste (*best-fit*) dos valores para os parâmetros do Modelo de Heston. A função-custo utilizada para o ajuste no estudo era a soma dos quadrados dos erros entre as volatilidades implícitas dos preços de mercado e as volatilidades dos valores obtidos do modelo. Foram encontrados três problemas principais quando se tentou ajustar o modelo de Heston a uma superfície de volatilidades real de mercado:

- Por ser um modelo de 5 parâmetros, o Modelo de Heston não tem a precisão necessária para adequar uma superfície de volatilidades, que muitas vezes contém mais de 30 pontos de informação.

- O Modelo de Heston gera dinamicamente a assimetria e a curvatura (curtose) da superfície de volatilidade, devido à natureza estocástica da volatilidade. Em períodos curtos de tempo, essas características fornecidas pelo modelo são muito inferiores àqueles observados nas superfícies de volatilidade presentes no Mercado. Rebonato (2004) aponta que este problema poderia ser solucionado por um modelo que também incluísse saltos, mas que essa solução ‘não seria parcimoniosa.’
- O formato da evolução da curva das volatilidades implícitas das opções *at-the-money* à medida que aumenta o prazo para o vencimento (do curto para o longo prazo) não obedece à forma de transição exponencial prescrito pelo comportamento de reversão à média do Modelo de Heston (situação não relevante neste trabalho dada a adoção da taxa de reversão à média nula).

Em vista de tais observações, Yekutieli (2004) decidiu excluir os dados das opções com vencimentos inferiores a dois meses do conjunto de dados para a calibração do Modelo, assim como as opções com Delta 0.10, que compõem o RR₁₀ e o BF₁₀. Tais características são confirmadas neste estudo.

Cálculo dos parâmetros α_3 e ρ_3 , para o par de moedas com menor liquidez

Uma vez que os dados de *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* para o par EURCAD são demasiadamente escassos para utilizar a mesma metodologia aplicada anteriormente, definimos α_3 e ρ_3 em função de $\alpha_1, \rho_1, \alpha_2$ e ρ_2 , declaradas nas equações [4] e [5]. De [1] decorre que:

$$\alpha_3^2 = \text{Var}(d\sigma_3) \quad [6]$$

onde $\text{Var}(d\sigma_3)$ é a variância de $d\sigma_3$.

Proseguimos assim para o desenvolvimento das expressões de $d\sigma_3$ e dS_3/S_3 , como segue. Partindo do princípio de não-arbitragem do valor da cotação do par de moedas S_3 , onde $S_3 = S_1 \times S_2$, calculamos sua derivada total, dada abaixo:

$$dS_3 = \frac{\partial S_3}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial S_3}{\partial S_2} dS_2 = S_2 dS_1 + S_1 dS_2 \quad [7]$$

Dividindo [7] por S_3 , e usando [1] obtemos [8] indicada abaixo. Por estarmos tratando de uma associação de dois processos estocásticos, o termo determinístico (o *drift* μ_i) pode ser desconsiderado.

$$\frac{dS_3}{S_3} = \frac{dS_1}{S_1} + \frac{dS_2}{S_2} = \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2 = \sigma_3 dW_3 \quad [8]$$

Se tomarmos o produto escalar dos processos estocásticos dos preços dos pares de moedas 1 e 2, podemos definir:

$$\langle dW_1, dW_2 \rangle = \rho_{12} dt \quad [9]$$

Com base em [8] e [9], podemos escrever:

$$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad [10]$$

Fazendo a derivada total de [10]:

$$\begin{aligned} 2\sigma_3 d\sigma_3 &= 2\sigma_1 d\sigma_1 + 2\sigma_2 d\sigma_2 + 2\rho_{12}\sigma_2 d\sigma_1 + 2\rho_{12}\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= 2(\sigma_1 + \rho_{12}\sigma_2) d\sigma_1 + 2(\sigma_2 + \rho_{12}\sigma_1) d\sigma_2 \end{aligned} \quad [11]$$

$$d\sigma_3 = \frac{(\sigma_1 + \rho_{12}\sigma_2)}{\sigma_3} d\sigma_1 + \frac{(\sigma_2 + \rho_{12}\sigma_1)}{\sigma_3} d\sigma_2$$

Chamando

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \frac{\sigma_1 + \rho_{12}\sigma_2}{\sigma_3} \\ \Phi_B &= \frac{\sigma_2 + \rho_{12}\sigma_1}{\sigma_3} \end{aligned} \quad [12]$$

Dado que, de [1], $d\sigma_i = \alpha_i dZ_i$, e substituindo [12] em [11] obtemos:

$$d\sigma_3 = \Phi_A \alpha_1 dZ_1 + \Phi_B \alpha_2 dZ_2 \quad [13]$$

De [6], podemos calcular α_3 como se segue:

$$\begin{aligned} \alpha_3^2 &= \text{Var}(d\sigma_3) = \alpha_1^2 \Phi_A^2 + \alpha_2^2 \Phi_B^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \Phi_A \Phi_B \langle dZ_1, dZ_2 \rangle \\ \alpha_3 &= \sqrt{\alpha_1^2 \Phi_A^2 + \alpha_2^2 \Phi_B^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \Phi_A \Phi_B \langle dZ_1, dZ_2 \rangle} \end{aligned} \quad [14]$$

Por definição, $\rho_3 = \langle d\sigma_3, \frac{dS_3}{S_3} \rangle$. Usando [12], [13] e [8], temos:

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \langle d\sigma_3, \frac{dS_3}{S_3} \rangle = \langle \Phi_A \alpha_1 dZ_1 + \Phi_B \alpha_2 dZ_2, \sigma_1 dW_1 + \sigma_2 dW_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \sigma_1 \Phi_A \langle dZ_1, dW_1 \rangle + \alpha_1 \sigma_2 \Phi_A \langle dW_2, dZ_1 \rangle \\ &\quad \dots + \alpha_2 \sigma_1 \Phi_B \langle dW_1, dZ_2 \rangle + \alpha_2 \sigma_2 \Phi_B \langle dZ_2, dW_2 \rangle \end{aligned} \quad [15]$$

Dentre as correlações presentes em [14] e [15], conhecemos apenas $\langle dZ_1, dW_1 \rangle$ e $\langle dZ_2, dW_2 \rangle$, iguais a ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Ainda não possuímos uma forma analítica para $\langle dW_1, dZ_2 \rangle$, $\langle dW_2, dZ_1 \rangle$ e $\langle dZ_1, dZ_2 \rangle$.

Devido ao fato que as séries históricas dessas correlações não apresentarem um comportamento estável, a utilização dos valores históricos dessas correlações não é viável, pois esta abordagem atenuaria a característica estocástica do modelo, acarretando uma perda de aderência do modelo ao mundo real. Iveson (2010) sugere um artifício algébrico para solucionar este problema. São definidos dois novos processos estocásticos artificiais dW_1' e dW_2' , ortogonais a dW_1 e dW_2 respectivamente, de modo a satisfazer às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \langle dW_1', dW_1 \rangle &= 0 \\ \langle dW_2', dW_2 \rangle &= 0 \\ dZ_1 &= \rho_1 dW_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} dW_1' \\ dZ_2 &= \rho_2 dW_2 + \sqrt{1 - \rho_2^2} dW_2' \end{aligned} \quad [16]$$

Os processos dW_i' podem ser descritos como a decomposição do processo estocástico dZ_i em dois componentes: um que decorre dos movimentos da taxa de câmbio (correspondente a $\rho_i dW_i$), e outro que se origina do ruído do Mercado (correspondente a $\sqrt{1 - \rho_i^2} dW_i'$). Dessa forma, dW_i' pode ser descrito como a parte estocástica do processo de volatilidade dZ_i que não pode ser explicada pelos movimentos da taxa de câmbio.

Com esses dois novos processos é possível calcular as correlações $\langle dW_1, dZ_2 \rangle$, $\langle dW_2, dZ_1 \rangle$ e $\langle dZ_1, dZ_2 \rangle$ em função das correlações $\langle dW_1', dW_2 \rangle$, $\langle dW_1, dW_2' \rangle$ e $\langle dW_1', dW_2' \rangle$. Adicionalmente, estas últimas mostram-se muito mais estáveis que as primeiras. Tais correlações são definidas como segue:

- $\langle dW_1, dW_2' \rangle$: é a correlação da parcela da volatilidade de USDCAD que é explicada pela variação da taxa de câmbio de USDCAD (a equação resultante da regressão dos retornos de USDCAD com sua volatilidade em cada período), com a parcela da volatilidade de EURUSD que não é explicada pela variação da taxa de câmbio EURUSD (os resíduos da regressão dos retornos de EURUSD com sua volatilidade em cada período).
- $\langle dW_1', dW_2 \rangle$: é a correlação da parcela da volatilidade de EURUSD que é explicada pela variação da taxa de câmbio de EURUSD, com a parcela da volatilidade de USDCAD que não é explicada pela variação da taxa de câmbio de USDCAD.

- $\langle dW_1', dW_2' \rangle$: é a correlação da parcela da volatilidade de USDCAD que não é explicada pela variação da taxa de câmbio de USDCAD, com a parcela da volatilidade de EURUSD que não é explicada pela variação da taxa de câmbio de EURUSD.

Expandindo as equações de [16] com as correlações descritas, podemos definir:

$$\begin{aligned}
\langle dW_1, dZ_2 \rangle &= \langle dW_1, \rho_2 dW_2 + \sqrt{1-\rho_2^2} dW_2' \rangle = \rho_{12} \rho_2 + \sqrt{1-\rho_2^2} \langle dW_1, dW_2' \rangle \\
\langle dW_2, dZ_1 \rangle &= \langle dW_2, \rho_1 dW_1 + \sqrt{1-\rho_1^2} dW_1' \rangle = \rho_{12} \rho_1 + \sqrt{1-\rho_1^2} \langle dW_1', dW_2 \rangle \\
\langle dZ_1, dZ_2 \rangle &= \langle \rho_1 dW_1 + \sqrt{1-\rho_1^2} dW_1', \rho_2 dW_2 + \sqrt{1-\rho_2^2} dW_2' \rangle \\
&= \rho_{12} \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \sqrt{1-\rho_2^2} \langle dW_1, dW_2' \rangle + \rho_2 \sqrt{1-\rho_1^2} \langle dW_1', dW_2 \rangle \\
&\quad + \sqrt{1-\rho_1^2} \sqrt{1-\rho_2^2} \langle dW_1', dW_2' \rangle
\end{aligned} \tag{17}$$

Utilizando os valores de [17] em [15], podemos definir

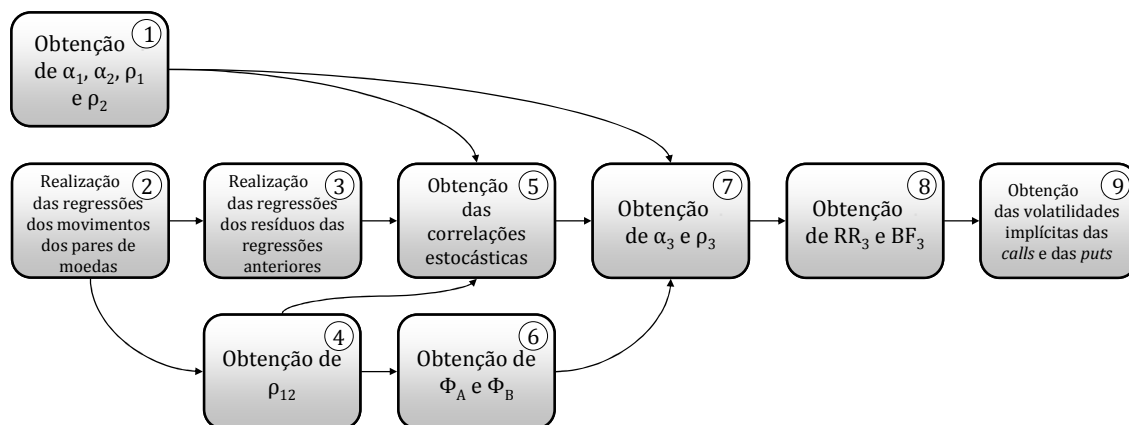
$$\rho_3 = \alpha_1 \sigma_1 \Phi_A \rho_1 + \alpha_1 \sigma_2 \Phi_A \langle dW_2, dZ_1 \rangle + \alpha_2 \sigma_1 \Phi_B \langle dW_1, dZ_2 \rangle + \alpha_2 \sigma_2 \Phi_B \rho_2 \tag{18}$$

O processo de obtenção de valores das volatilidades implícitas das *calls* e *puts* a partir dos dados de mercado é composto por nove fases descritas abaixo.

1. Cálculo das séries históricas de α_1 , α_2 , ρ_1 e ρ_2 , a partir dos valores dos *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads*, para cada um dos pares de moedas, dos dados disponíveis no mercado.
2. Regressão da volatilidade dos pares de moedas em função dos retornos diários. Com os coeficientes obtidos, calcula-se as séries de retornos filtrados dW_1 e dW_2 , e dos resíduos da regressão, obtém-se dW_1' e dW_2' .
3. Com as séries dW_1' e dW_2' , obtidas na fase 2, calculam-se os coeficientes $\langle dW_1', dW_2' \rangle$, $\langle dW_1, dW_2' \rangle$ e $\langle dW_1', dW_2 \rangle$.
4. A partir da regressão dos retornos filtrados, dW_1 e dW_2 , calcula-se o coeficiente ρ_{12} .
5. A partir das séries α_1 , α_2 , ρ_1 e ρ_2 , obtidos na fase 1, e do valor ρ_{12} , obtido na fase 4, são calculadas as séries de correlações estocásticas $\langle dW_1, dZ_2 \rangle$, $\langle dW_2, dZ_1 \rangle$ e $\langle dZ_1, dZ_2 \rangle$.
6. Com os valores das volatilidades históricas dos pares de moedas, σ_1 e σ_2 , e o valor ρ_{12} , obtido na fase 4, são calculados os valores para Φ_A e Φ_B .
7. Com as séries α_1 , α_2 , ρ_1 e ρ_2 , obtidos na fase 1, as séries de correlações estocásticas $\langle dW_1, dZ_2 \rangle$, $\langle dW_2, dZ_1 \rangle$ e $\langle dZ_1, dZ_2 \rangle$, obtidas na fase 5, e os valores de Φ_A e Φ_B , calculados na fase 6, calcula-se as séries de α_3 e ρ_3 .
8. Com as séries α_3 e ρ_3 , calculadas na fase 7, calcula-se as séries dos *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* para o par de moedas 3.
9. A partir das séries dos *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* para o par de moedas 3, determina-se as volatilidades implícitas para as *calls* e *puts* desse par de moedas.

O fluxo a ser seguido para a construção da superfície de volatilidades é ilustrado na Figura 3 abaixo.

Figura 3: Fluxograma do processo de obtenção das volatilidades implícitas



Na próxima seção o processo descrito acima é implementado para se obter as volatilidades implícitas para *calls* e *puts* do par de moedas EURCAD, a partir dos *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* para ambos os pares de moedas USDCAD e EURUSD.

3. Resultados

Foram utilizados dados diários do terminal Bloomberg, para os *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* para os pares de moedas USDCAD e EURUSD, com Deltas de 0.10, 0.15, 0.25 e 0.35, para os prazos de 1 mês (21 dias úteis), 3 meses (63 du), 6 meses (126 du) e 1 ano (252 du), de 06/01/2006 a 15/03/2011. O número total de observações da série é de 1353 dias. Cada dia nos fornece 32 observações, para os diversos prazos e Deltas. Apesar de estarem disponíveis opções com prazos de vencimento de até 7 anos, as opções com prazos acima de 2 anos apresentavam liquidez baixa, e portanto foram descartadas deste estudo pelo número excessivo de *outliers*.

Fase 1: Geração dos α_i e ρ_i para os pares de moedas USDCAD e EURUSD

As séries históricas de α_i e ρ_i para os pares de moedas USDCAD e EURUSD foram calculados a partir dos valores históricos dos *Risk Reversals* e *Butterfly Spreads* de cada um dos pares de moedas.

As Figuras 8 e 9 ilustram as diferenças entre os valores calculados para os diversos Deltas e prazos, fornecendo bons indícios que a segmentação em áreas diferentes pode trazer um refinamento nos resultados. Na figura 4 observamos que os valores dos Alphas para os diferentes Deltas não diferem tanto quando comparados com outro Alphas de mesmo prazo, mas que variam muito para o mesmo Delta, para prazos de vencimento diferentes. Na figura 5, notamos que a mesma característica ocorre, exceto para os Alphas de Delta 0.35, que apresentam valores modulares menores que para os demais Deltas.

Outra característica notável é que a correlação entre os processos estocásticos dW_i e dZ_i , indicado pelos Rhos de cada par de moedas, é negativa para o par USDCAD, enquanto que para o par EURUSD, é positiva. Essa característica indicará a sincronia de direção dos movimentos dos preços e das volatilidades do par de moedas em questão.

Figura 4: Alphas calculados para as moedas USDCAD e EURUSD no dia 15/03/2011

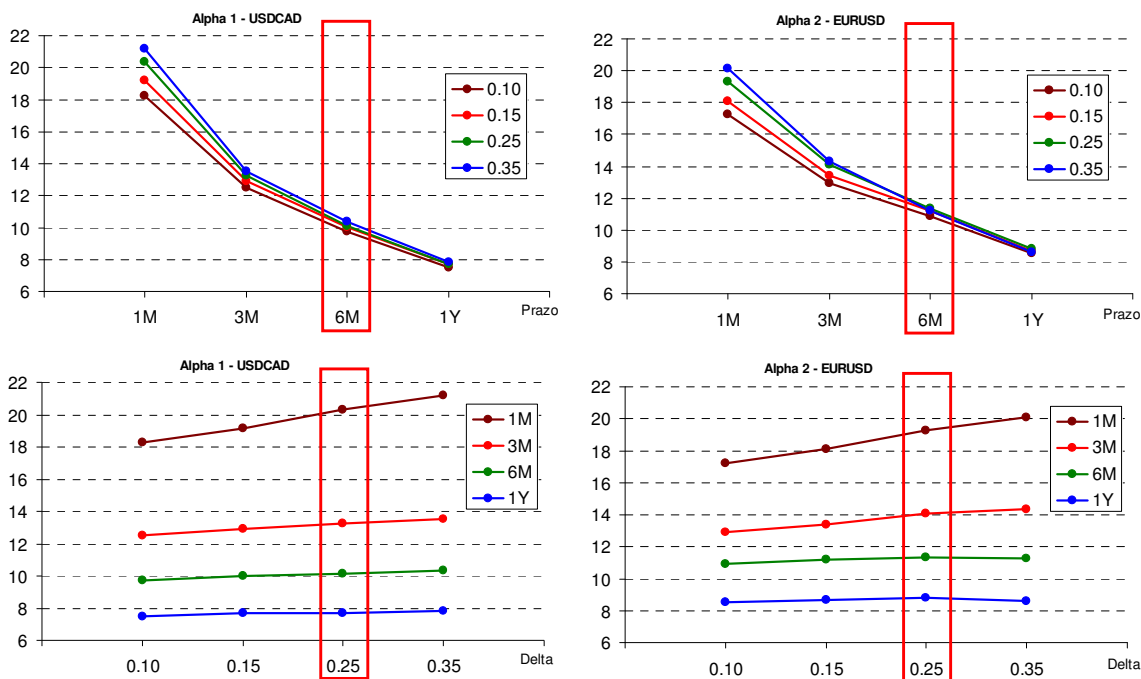
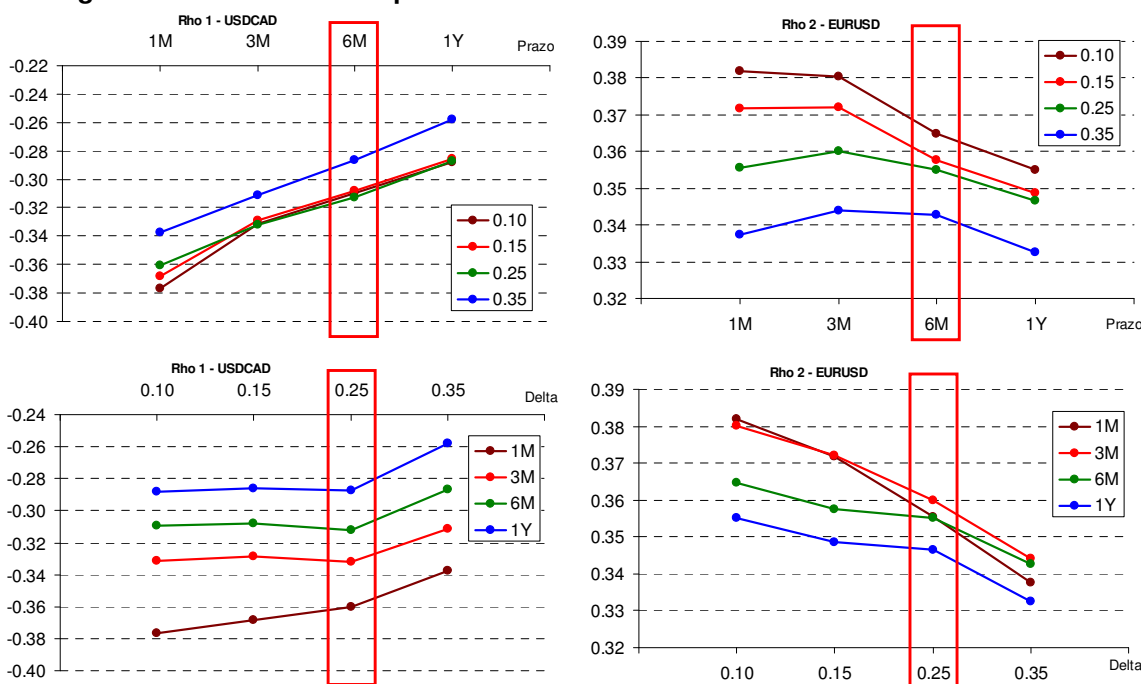


Figura 5: Rhos calculados para as moedas USDCAD e EURUSD no dia 15/03/2011



Fase 2: Regressão das volatilidades de cada par de moedas, em função dos movimentos de preços dessa moeda – geração de dW_i e dW_i'

Foram feitas regressões das volatilidades de 1 mês, 3 meses, 6 meses e 1 ano, em função dos movimentos diários (retornos logarítmicos de d-0, d-1 e d-2), AR(1) e AR(2) para cada par de moedas, USDCAD e EURUSD. A utilização de processos autorregressivos de 1ª e 2ª ordens se faz necessário, pois a série apresenta uma forte correlação serial positiva. Essa correlação serial é confirmada pelos resultados dos coeficientes de Durbin-Watson das regressões.

Apresentamos a seguir os resultados obtidos para cada um dos coeficientes, com suas estatísticas t entre parênteses:

USDCAD

Coeficiente	1M	3M	6M	1Y
d-0	0,00158 (1,60)	0,00027 (0,82)	0,00032 (1,77)	0,01317 (1,69)
d-1	-0,25474 (-2,81)	-0,08501 (-2,78)	-0,01812 (-1,09)	-0,00023 (-1,94)
d-2	-0,20948 (-2,32)	-0,07672 (-2,51)	-0,04089 (-2,47)	-0,00028 (-2,34)

EURUSD

Coeficiente	1M	3M	6M	1Y
d-0	0,00097 (0,88)	0,08018 (2,02)	0,0286 (1,46)	0,0249 (2,47)
d-1	-0,37283 (-3,54)	-0,14082 (-2,86)	-0,0762 (-3,89)	-0,02677 (-2,66)
d-2	-0,18924 (-1,8)	-0,11356 (-2,87)	-0,00047 (-2,31)	-

Com os coeficientes obtidos, foram calculados as séries de dW_1 e dW_2 para cada um dos períodos analisados, e a partir dos resíduos das regressões, foram gerados as séries de dW_1' e dW_2' para cada um dos períodos analisados.

Fase 3: Regressão das séries geradas na Fase 2

Utilizando-se as séries dW_1 , dW_2 , dW_1' e dW_2' , geradas pelas regressões anteriores, foram feitas as regressões de $\langle dW_1', dW_2 \rangle$, $\langle dW_1, dW_2' \rangle$ e $\langle dW_1', dW_2' \rangle$. Neste caso também foram utilizados processos autorregressivos de 1ª e 2ª ordens, para corrigir a correlação serial positiva. Os coeficientes obtidos são apresentados abaixo, com suas estatísticas t entre parênteses:

Coeficiente	1M	3M	6M	1Y
$\langle dW_1', dW_2 \rangle$	0,07445 (4,26)	0,05978 (3,61)	0,03984 (2,44)	0,04077 (2,22)
$\langle dW_1, dW_2' \rangle$	0,09924 (4,72)	0,12708 (5,93)	0,15332 (7,39)	0,11496 (5,87)
$\langle dW_1', dW_2' \rangle$	0,22946 (7,65)	0,30128 (9,46)	0,31801 (9,80)	0,27867 (9,11)

Fase 4: determinação de ρ_{12}

A partir de [9], podemos calcular $\rho_{12} dt = \langle dW_1, dW_2 \rangle$ da regressão dos retornos de USDCAD e EURUSD em cada período. Os valores obtidos são mostrados abaixo, com suas estatísticas t entre parênteses:

	1M	3M	6M	1Y
ρ_{12}	0,37757 (15,16)	0,37446 (14,78)	0,37057 (14,21)	0,36212 (13,07)

Neste caso, os valores obtidos para cada prazo são muito próximos, havendo uma diferença menor que 4,3% entre os valores extremos.

Fase 5: Determinação de $\langle dW_1, dZ_2 \rangle$, $\langle dW_2, dZ_1 \rangle$ e $\langle dZ_1, dZ_2 \rangle$

Tendo os valores de ρ_{12} e as séries $\langle dW_1', dW_2 \rangle$, $\langle dW_1, dW_2' \rangle$ e $\langle dW_1', dW_2' \rangle$, são calculadas as séries de correlações estocásticas históricas de $\langle dW_1, dZ_2 \rangle$, $\langle dW_2, dZ_1 \rangle$ e $\langle dZ_1, dZ_2 \rangle$ para cada prazo, através de [17].

Fase 6: Determinação de Φ_A e Φ_B

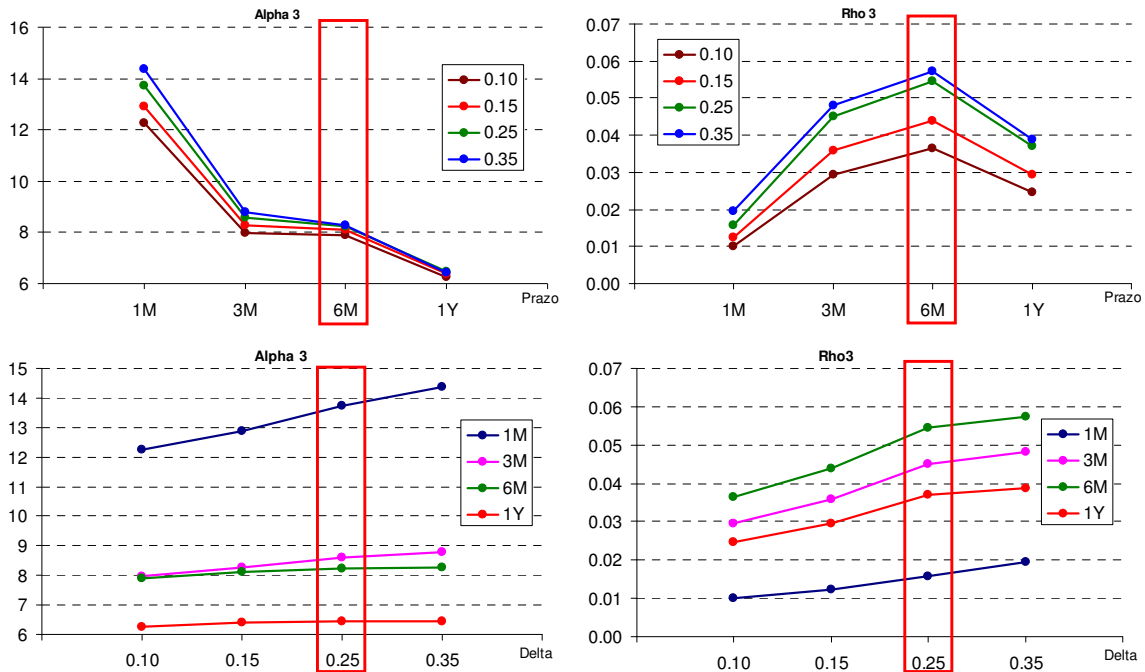
Com os valores das volatilidades históricas para cada período de USDCAD e EURUSD, e com os valores de ρ_{12} , as séries de Φ_A e Φ_B para cada prazo foram calculadas, conforme [12].

Fase 7: Determinação de α_3 e ρ_3

Utilizando as séries e coeficientes obtidos, as séries de valores históricos para α_3 e ρ_3 para cada prazo podem ser calculadas, de acordo com [14] e [18].

A figura 6 apresenta os valores obtidos para os Alphas e Rhos para o dia 15/03/2011.

Figura 6: Alphas e Rhos calculados para o par de moedas EURCAD, no dia 15/03/2011

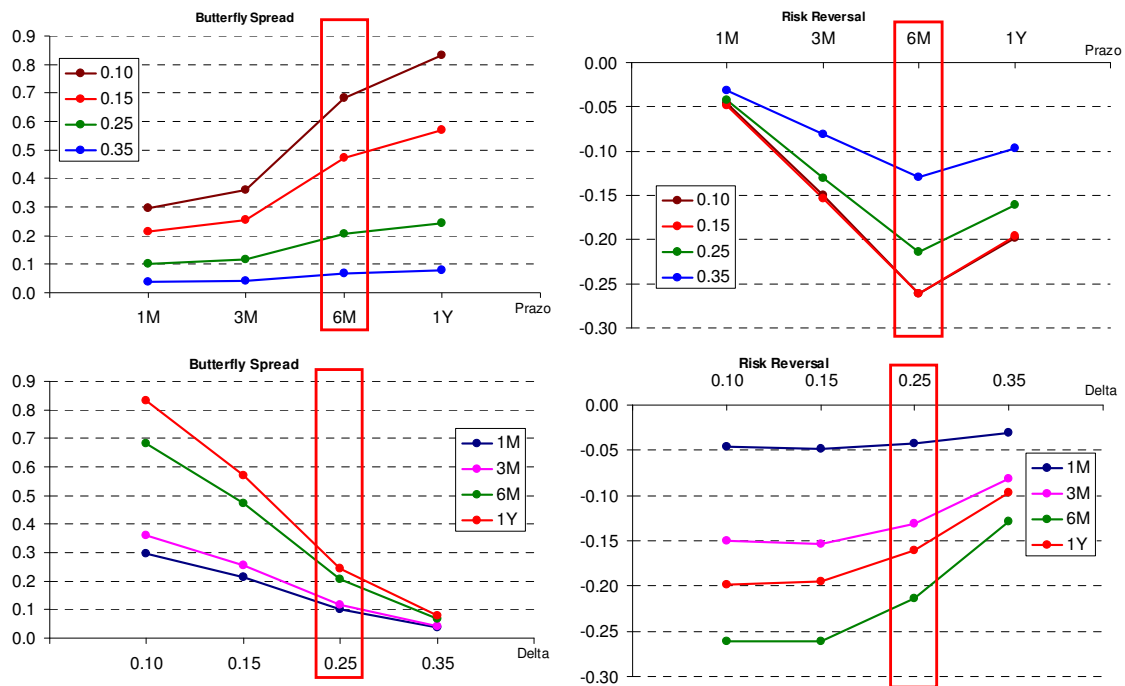


Notamos que o mesmo comportamento apresentado para os Alphas do pares de moedas utilizados anteriormente é repetido para o par de moedas estudado agora: os valores dos Alphas para os diferentes Deltas não diferem muito quando comparados com os de mesmo prazo, mas variam bastante para um mesmo Delta, com prazos de vencimento diferentes. Os valores de Rho, assim como os do par de moedas EURUSD, são positivos, indicando uma correlação positiva entre os os processos estocásticos dW_3 e dZ_3 .

Fase 8: Determinação de RR_{EURCAD} e BF_{EURCAD}

Utilizando [4] e [5], podemos determinar as séries de valores de RR_{EURCAD} e BF_{EURCAD} a partir de cada um dos valores de α_3 e ρ_3 . A Figura 7 apresenta os valores obtidos para os RR_{EURCAD} e BF_{EURCAD} para o dia 15/03/2011. Todos os valores de BF_{EURCAD} são positivos, assim como os observados para o par EURBRL, mas os valores dos *Butterfly Spreads* calculados para o par EURCAD indicam que sua superfície de volatilidades implícitas possui uma curvatura menor que a da superfície do par EURBRL. Além disso, os valores de RR_{EURCAD} são negativos, ao contrário aos do par EURBRL. Essa característica nos indica que há uma assimetria nas expectativas do mercado, sinalizando uma perspectiva de alta na cotação do par de moedas EURBRL, enquanto que projeta uma queda na cotação do par EURCAD.

Figura 7: Butterfly Spreads e Risk Reversals calculados para o par de moedas EURCAD, no dia 15/03/2011



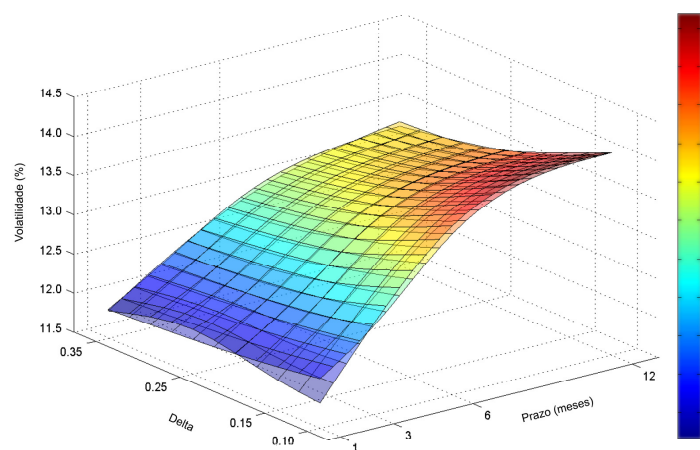
Fase 9: Determinação das volatilidades implícitas das *calls* e *puts* para o par de moedas EURCAD, e sua superfície de volatilidades implícitas.

Tendo os valores dos *Butterfly Spreads* e *Risk Reversals* para o par de moedas EURCAD, é possível calcular as volatilidades implícitas de suas *calls* e *puts*, e construir sua superfície de volatilidades implícitas, utilizando [2] e [3]. A superfície de volatilidades foi construída utilizando-se interpolação através de *splines* cúbicos. Esse método de interpolação foi utilizado para compensar a relativa escassez de pontos para construção da curva, porém não garante que a superfície obtida exiba a característica de um modelo livre de arbitragem, de modo que os preços das opções calculadas com a volatilidade exibidas possam apresentar eventuais oportunidades de arbitragem com seu ativo-objeto. Ainda assim, essas oportunidades só apareceriam entre os vértices, que não são alterados no processo.

Comparação da superfície estimada com a observada no mercado.

Uma vez construída a superfície de volatilidades, podemos compará-la com a superfície de volatilidades real de mercado. A Figura 8 apresenta a superfície de volatilidades para as *calls* do par EURCAD para o dia 15/03/2011.

Figura 8: Superposição das superfícies de volatilidade estimada e de mercado para as *calls* do par EURCAD, para o dia 15/03/2011.



A superfície que está por cima, menos ondulada, é a estimada. A Figura 9 mostra a subtração das superfícies, destacando as diferenças absolutas, em pontos percentuais, entre elas. É possível observar que as diferenças são muito pequenas, excetuando os valores para o prazo de 1 mês para o vencimento, e para Delta 0.10, que apresentam valores discordantes. Essas diferenças, para os prazos mais curtos, mostraram um comportamento errático, de um dia para o outro, no período observado

Figura 9: Resultado da subtração das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das calls do par EURCAD para o dia 15/03/2011.

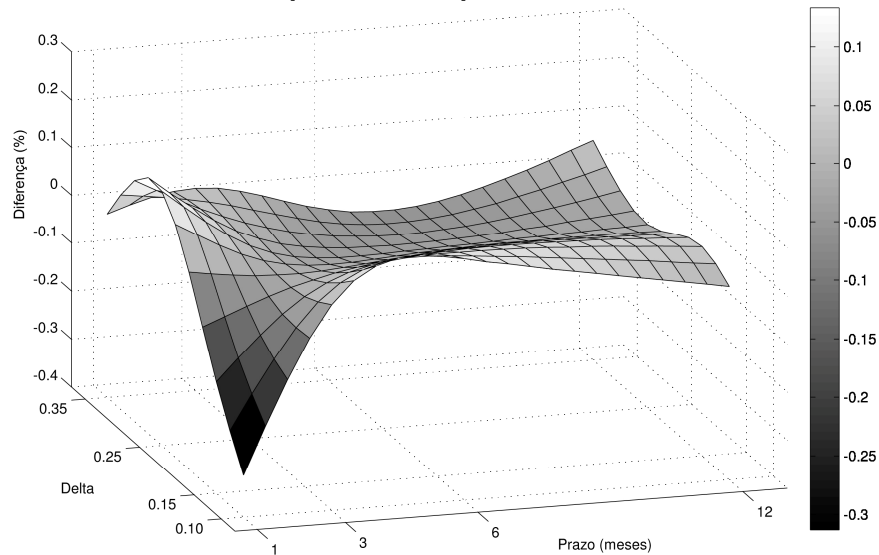
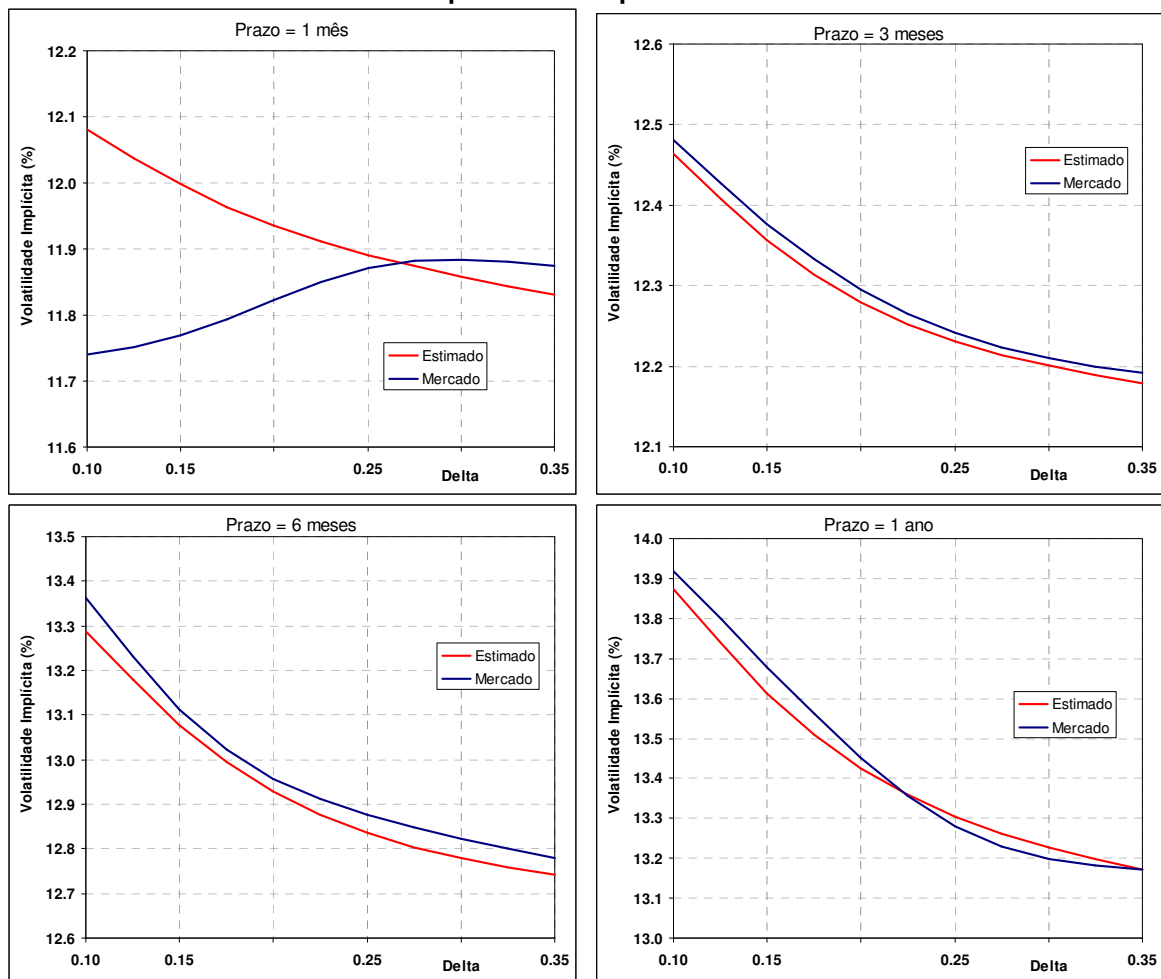
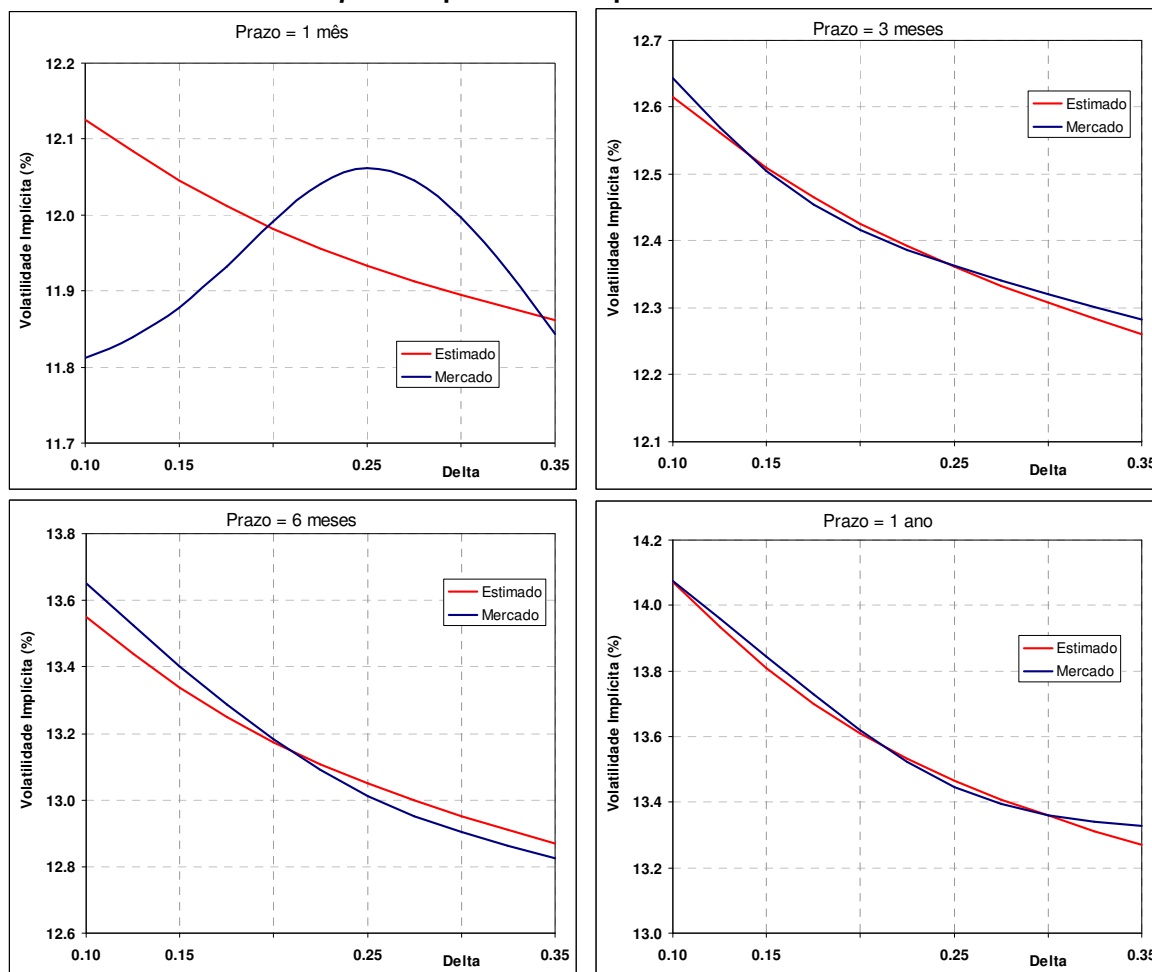


Figura 10: Secções temporais das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das calls do par EURCAD para o dia 15/03/2011



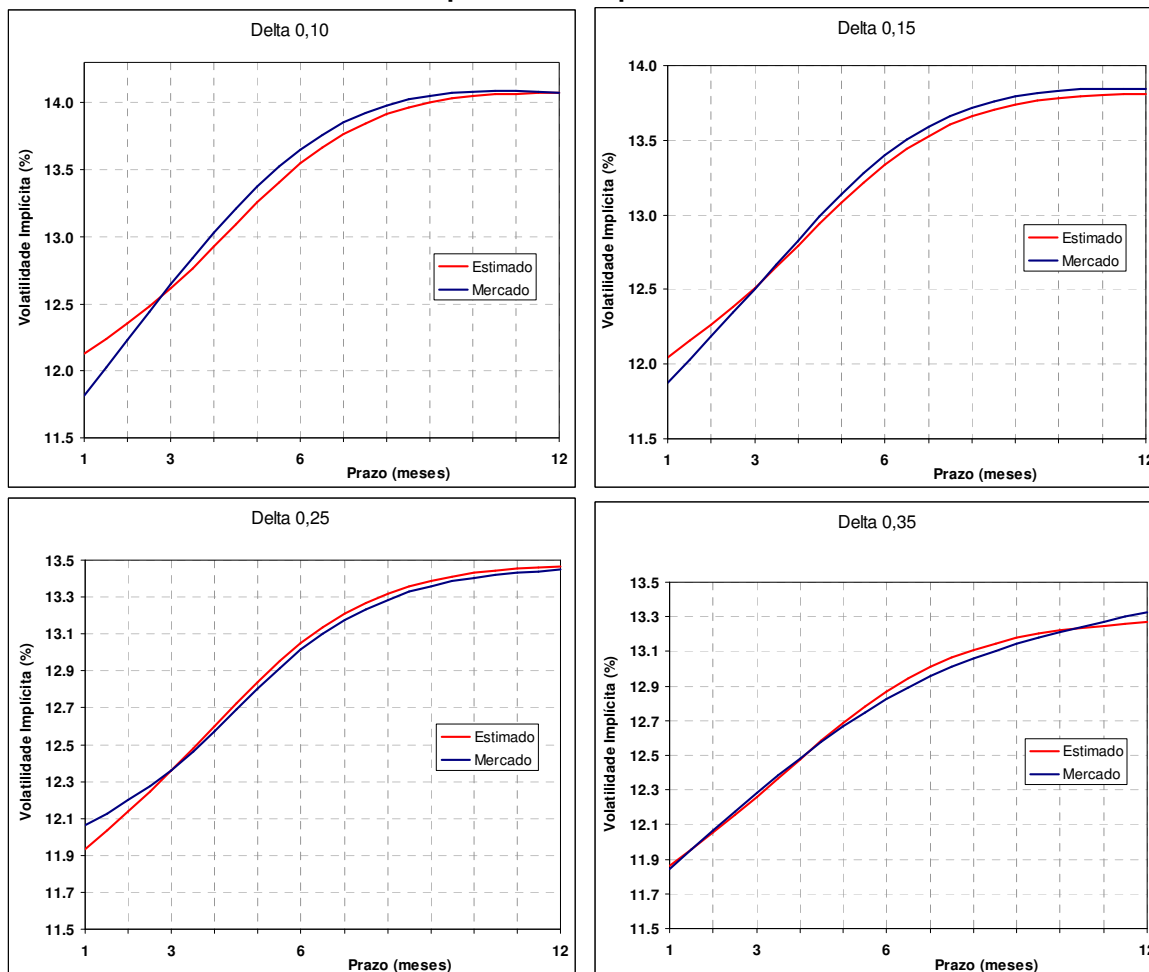
Uma análise diligente da Figura 10 nos permite identificar as razões que ocasionam as flutuações mais acentuadas presentes na Figura 9: o descolamento entre os valores calculados pelo modelo para o prazo de vencimento de 1 mês, comparados aos valores observados no mercado neste dia são muito maiores do que para os demais prazos, chegando a 0,36%.

Figura 11: Secções temporais das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das puts do par EURCAD para o dia 15/03/2011.



As Figuras 10 e 11 comparam as secções temporais das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das *calls* e *puts*, respectivamente, do par EURCAD para o dia 15/03/2011. Observa-se uma semelhança, tanto de valores como de formato, para a evolução das curvas de volatilidades implícitas para os prazos de vencimento acima de 3 meses, tanto para as *calls*, como para as *puts*, indicando a boa aderência do modelo ao mercado para esses prazos. Para o prazo de vencimento de 1 mês, o formato da curva de mercado varia muito, dependendo do dia observado, mas o formato da curva do modelo é muito estável, gerando diferenças maiores ou menores, de acordo com a inquietação dos participantes do mercado no dia analisado. Essas diferenças são anacrônicas, e podem apresentar excelentes oportunidades de arbitragem.

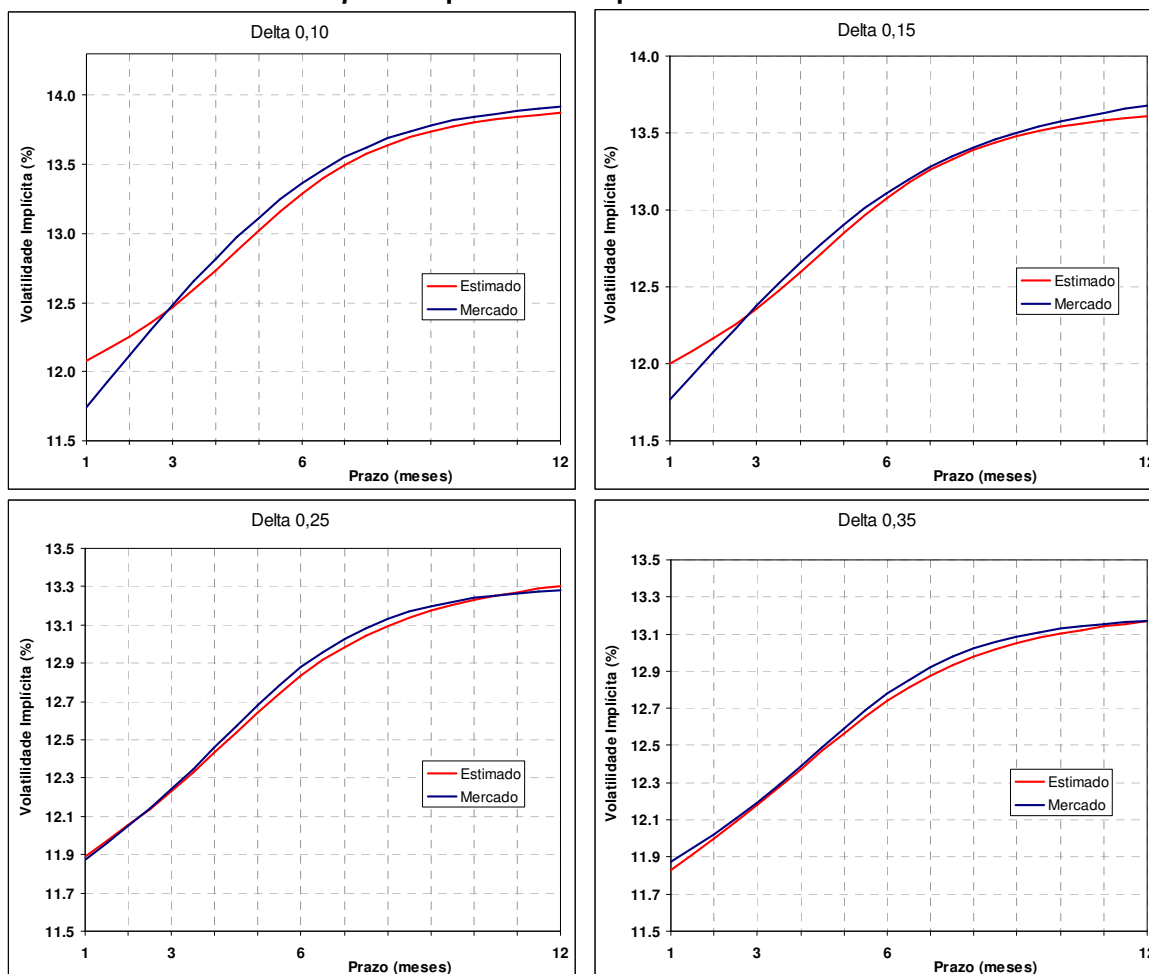
Figura 12: Secções por Delta das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das *calls* do par EURCAD para o dia 15/03/2011



As Figuras 12 e 13 comparam as secções por Delta das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das *calls* e *puts*, respectivamente, do par EURCAD para o dia 15/03/2011. As curvas observadas nestas figuras são mais alinhadas com os resultados esperados do modelo. Ainda se observa um descolamento mais acentuado nos valores das volatilidades implícitas para o prazo de vencimento de 1 mês, principalmente nas opções com Delta mais baixo, mas essa característica é atenuada pela escala dos valores das escalas dos gráficos.

A aderência das curvas de volatilidades implícitas calculadas pelo modelo ao mercado variou pouco ao longo do tempo, apresentando baixa eficácia apenas em períodos turbulentos, quando a volatilidade das cotações do ativo-objeto cresceu muito. Nestes casos, o modelo demonstrou pouca estabilidade para determinar curvas de volatilidades com a precisão desejada.

Figura 13: Secções por Delta das superfícies de volatilidade estimada e de mercado das puts do par EURCAD para o dia 15/03/2011



Diferença entre as volatilidades calculadas pelo modelo e as observadas no mercado em 15 de Março de 2011

Calls

Delta	Prazo (meses)			
	1	3	6	12
0.10	+2,89%	-0,14%	-0,57%	-0,32%
0.15	+1,94%	-0,16%	-0,26%	-0,48%
0.25	+0,16%	-0,09%	-0,32%	+0,18%
0.35	-0,36%	-0,10%	-0,31%	+0,00%

Puts

Delta	Prazo (meses)			
	1	3	6	12
0.10	+2,65%	-0,22%	-0,74%	-0,01%
0.15	+1,42%	+0,04%	-0,46%	-0,26%
0.25	-1,07%	-0,01%	+0,28%	+0,13%
0.35	+0,15%	-0,18%	+0,35%	-0,44%

As volatilidades implícitas apresentam uma diferença percentual maior para as opções com menor prazo até o vencimento, e para Deltas menores. Em geral, as diferenças percentuais entre as volatilidades observadas no mercado e as calculadas pelo modelo são inferiores a 0,5%, atribuindo um elevado fator de confiabilidade ao modelo.

4. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma maneira de determinar a superfície de volatilidades para opções pouco líquidas, cujo ativo-objeto é um par de moedas cujos componentes tenham opções com maior liquidez quando pareadas com uma terceira moeda. O par de moedas escolhido para este estudo foi o Euro x Dólar Canadense, que apresentava baixa liquidez e, para possibilitar a execução do estudo,

foram utilizadas as opções destas moedas pareadas com o Dólar Americano, que possuíam liquidez elevada.

O estudo estendeu o modelo proposto por Iveson (2010), que somente utiliza os valores dos *Butterfly Spreads* e *Risk Reversals* de Delta 0.25 e prazo de vencimento de 6 meses, expandindo o escopo para utilizar também os Deltas de 0.10, 0.15 e 0.35, e os prazos de 1, 3 e 12 meses para o vencimento, buscando uma maior aderência das curvas de volatilidades. Embora os resultados obtidos reiterem aqueles observados por Iveson (2010), confirmando que, para determinar apenas o ponto da superfície de volatilidades referente à opção de maior liquidez, e portanto, a de maior interesse, com prazo de vencimento de 6 meses e Delta 0.25, o modelo proposto por ele é suficiente e eficaz, os resultados obtidos no presente trabalho demonstram que, para a determinação de uma superfície de volatilidades implícitas completa, é necessária a utilização de um número maior de Deltas e prazos, cobrindo assim de maneira mais abrangente todas as possíveis faixas de negociação de interesse.

Os problemas enfrentados por Yekutieli (2004) também foram observados neste estudo: os valores das volatilidades implícitas para o Delta 0.10 e para o prazo de vencimento de 1 mês de fato se mostraram mais inconstantes, ora muito acima, ora muito abaixo dos valores projetados pelo modelo. Esse comportamento já era esperado, pois estas opções são ou claramente *out-of-the-money*, ou têm um prazo de vencimento muito curto, e seus preços são mais sujeitos a flutuações do mercado, e podem apresentar eventuais oportunidades de arbitragem. Em oposição ao proposto por Yekutieli (2004), estes dados não devem ser desprezados, mas tratados com cautela, pois as condições descritas acima provavelmente se devem à baixa liquidez desses vértices, muito próximos do vencimento ou com *strikes* muito conservadores, e sujeitos a oscilações mais acentuadas.

O modelo demonstrou algumas limitações, por utilizar tanto dados de mercado, com dados históricos, e por vezes percebe-se um evidente descolamento do modelo em relação ao Mercado em momentos de crise, como durante a crise econômica de 2008/9. Contudo, o modelo mostra boa aderência quando o Mercado passa por momentos de maior tranquilidade, provando ser uma ferramenta valiosa para completar os pontos faltantes de uma superfície de volatilidades de pares de moedas, a partir das superfícies (mais) completas de outros pares de moedas que tenham as moedas de interesse como um de seus componentes.

Bibliografia

- ALEXANDER, C., “Modelos de Mercado: um guia para a análise de informações financeiras”, São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005
- BLACK, F., SCHOLES, M., “The pricing of options and corporate liabilities”. *Journal of Political Economy*, Vol 81, 1973
- BOSENS, F., RAYÉE, G., SKANTZOS, N., DEESLTRA, G., “Vanna-Volga Methods applied to FX derivatives: from theory to market practice”, CEB Working Paper N° 09/016, 2009
- BUSTAMANTE, P. Z., “Construção de superfície de volatilidade para o mercado brasileiro de opções de dólar baseado no modelo de volatilidade estocástica de Heston”, Dissertação de Mestrado, EESP-FGV, 2010
- CARR, P., WU, L., “Stochastic skew in currency options”, *Journal of Financial Economics* 86, p 213-247, 2007
- CASTAGNA, A., MERCURIO, F., “The Vanna-Volga method for implied volatilities”, *Risk* (January 2007) 106-111
- CORRADO, C. J., SU, T., “Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P 500 Index option prices”, *The Journal of Derivatives*, p. 8-19, Summer 1997.
- COX, J. C., INGERSOLL J. E., ROSS S. A., “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”, *Econometrica*, Vol 53, n. 2, 1985
- DERMAN, E., “Laughter in the Dark: An Introduction to the Volatility Smile”, 2008
- DERMAN, E., KANI, I. “Riding on a smile”, *RISK*, v.7, n.2, p. 32-39, 1994
- FAMA, E. F. “The Behavior of Stock Market Prices”, *The Journal of Business*, v.38, p.34, 1964.

- FENGLER, M. R., HÄRDLE, W. K. E MAMMEN, E., “A Semiparametric Factor Model for Implied Volatility Surface Dynamics”, *Journal of Financial Econometrics*, 2007, Vol. 5, No. 2, 189–218
- GARDINER, C. W., “Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences”, Springer, 2004
- GARMAN, M. B. E KOHLHAGEN, S. W. "Foreign Currency Option Values." *J. International Money and Finance* 2, 231-237, 1983.
- HESTON, S. “A closed-form solution for options with stochastic volatility”, *Review of Financial Studies*, 6, 327-343, 1993
- HULL, J., “Options, Futures and other Derivatives”, 7th ed, Prentice Hall, Inc, 2008
- HULL, J., WHITE, A., “The pricing of options on assets with stochastic volatilities”, *The Journal of Finance*, v.42, n.2, p. 281-300, June 1987.
- IVESON, C., “Um Modelo de Volatilidade Estocástica para Opções de Câmbio Sobre o Par EUR/BRL a partir de seus componentes mais líquidos USD/BRL e EUR/USD”, *Dissertação de Mestrado, EESP-FGV*, 2010
- JARROW, R., RUDD, A., “Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes”, *Journal of Financial Economics*, v.10, n.3, p.347-369, November 1982.
- KAMAL, M., GATHERAL, J., “Implied Volatility Surface”, in *Encyclopedia of Quantitative Finance*, Ed. Rama Cont, Wiley, 2010
- MERTON, R. C., “Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous”, *Journal of Financial Economics*, v.3, p.125-144, January-March 1976.
- OYA, D. K., “Estudo Sobre o Risco de Uma Carteira de Opções Através da Análise de Componentes Principais”, *Dissertação de Mestrado, EESP-FGV*, 2006
- REBONATO, R., “Volatility and Correlation - The Perfect Hedger and the Fox”, 2nd Ed, Wiley, 2004
- STEIN, E. M., STEIN, J. C., “Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach,” *Review of Financial Studies*, 4, 727-752. , 1991
- VARGAS, E., “Modelagem de superfícies de volatilidades para opções pouco líquidas de ações”, *Dissertação de Mestrado, EESP-FGV*, 2010
- WILMOTT, P., “Paul Wilmott on Quantitative Finance”, 2nd ed, Wiley, 2006
- WYSTUP, U. “Vanna-Volga Pricing”, *Waldens Mathfinance*, 2008
- YEKUTIELI, I. “Implementation of the Heston Model for pricing FX options, Bloomberg IDOC #2006728, 2004
- YOSHINO, J, COSTA, M, “Calibração do modelo de Heston para o mercado brasileiro de Opções de Câmbio (FX)”, *Revista Brasileira de Finanças*, Rio, v. 2, 2004