

A CARREIRA CRIMINOSA SOB A ABORDAGEM DE OPÇÕES REAIS

Resumo

Este ensaio propõe um modelo dinâmico baseado em opções reais para avaliar a carreira criminosa. No modelo, os indivíduos podem escolher o melhor momento para se engajar no trabalho em uma atividade ilegal (crime). O modelo proposto permite avaliar os impactos de diferentes preferências quanto ao risco, probabilidade de punição, severidade da punição e, principalmente taxas de desconto intertemporal na decisão dos indivíduos. Através da calibragem do modelo é possível observar que a opção por uma carreira criminosa depende de um retorno alto na atividade ilegal mesmo quando os indivíduos são neutros ao risco e possuem uma taxa de desconto intertemporal baixa. O ensaio também discute a participação de jovens no mercado de trabalho ilegal.

Palavras-chave: Carreira, Crime, Opções Reais, Mercado de Trabalho.

Classificação JEL: J24, K42

A REAL OPTIONS APPROACH TO CRIMINAL CAREERS

Abstract

This essay purpose a dynamic model based on real options to evaluate the criminal career. In the model, individuals can choose the best moment to get in crime and can choose the best moment to engage in the crime. The proposed model allows to evaluate the impacts of different risk preferences, punishment probability, punishment severity and, mainly time discount in the individuals' decision. Through model calibration is possible to observe that the option for a criminal career depends on a high return in the illegal activity even when individuals are risk neutral and when they have a low time discount. The essay also discusses the youths' participation on crime

Keywords: Career, Crime, Real Options, Work Market.

JEL classification: J24, K42

1. Introdução

Uma carreira criminosa é a caracterização longitudinal de uma sequência de crimes cometidos por um indivíduo (BLUMSTEIN et al., 1986), ou seja, representa a trajetória criminal de um indivíduo de seu primeiro até seu último crime (BLUMSTEIN, COHEN e HSIEH, 1982). Embora esta definição seja simples e facilmente compreendida, esta é uma das áreas de pesquisa de maior dificuldade de tratamento na economia do crime. As dificuldades são tanto teóricas quanto empíricas. No que se refere aos modelos empíricos as dificuldades vão desde a forma de mensurar uma carreira, passam pela forma de obter uma amostra e de como delinear um experimento (PIQUERO, BRAME e LYNAM, 2004), até como e quando esta acaba (LAUB e SAMPSON, 2001). Por sua vez, os modelos teóricos que se adéquam à carreira criminosa são necessariamente dinâmicos e isto trás consigo naturalmente uma dificuldade no seu tratamento matemático, pois a maior parte dos modelos apresentados na literatura não possui solução analítica.

Todavia, há um reconhecimento por parte da literatura de que um pequeno grupo de indivíduos (criminosos crônicos) é responsável pela maior parte da atividade criminal (VISHER, 1986; PIEHL E DIJULIO, 1995; BLUMSTEIN et al., 1982; PIQUERO et al, 2007). O comportamento destes criminosos além de ser de grande interesse para o sistema judiciário é o foco deste ensaio, que visa estudar a opção por uma carreira de crimes a partir de uma abordagem teórica.

Os modelos tradicionais de economia do crime são insuficientes para modelar uma carreira criminosa devido a sua natureza estática. O indivíduo faz escolhas em um determinado ponto no tempo, responde a incentivos exógenos e dados as suas preferências e as suas restrições toma decisões, sem considerar o impacto destas decisões (no presente) sobre futuras oportunidades.

Além disso, a forma tradicional de modelagem em economia do crime é a de escolha de portfólio. Nestes modelos¹, o indivíduo representativo deve alocar seu tempo em lazer, atividades legais e ilegais considerando os riscos envolvidos na segunda². Assim, é possível obter a alocação ótima em cada atividade. Contudo, algumas atividades ilegais só são viáveis economicamente se houver a repetição de crimes, o que na linguagem da criminologia é chamado de reincidência (*recidivism*).

Existe um incentivo a reincidência uma vez que a punição pode não incluir todos os crimes praticados pelo indivíduo, pois este pode ser punido apenas por um ou dois deles. Como a utilidade é crescente no número de crimes e a punição cresce a uma taxa inferior, há um ganho de bem estar para o criminoso quando este se engaja na carreira criminosa, devido a uma forma de ganho de escala que o crime apresenta. Ademais, a utilização por parte de potenciais vítimas de novas tecnologias de proteção eleva os custos de se praticar crimes criando uma barreira a entrada na atividade ilegal. No entanto, estes custos podem ser compensados com a repetição dos crimes. Este tipo de incentivo não pode ser captado através de modelos estáticos.

A opção por uma carreira de crimes envolve custos que podem ser pagos ao longo de todo o ciclo de vida do indivíduo. No caso de uma punição pelo sistema legal, o estigma de uma punição pode reduzir significativamente os rendimentos deste indivíduo no futuro (LOTT, 1992). Entretanto, este custo é pago somente no futuro e, portanto, as preferências intertemporais do indivíduo serão relevantes para determinar o impacto deste custo (futuro) na decisão tomada no presente.

Por estes argumentos, efeitos dinâmicos podem ser relevantes na explicação do comportamento do criminoso seja este crônico ou não, pois efeitos de acumulação de capital ou da taxa de desconto intertemporal (FLINN, 1986; MOCAN et al., 2000) ou repetição de crimes (SPELMAN, 1994; PIQUERO et al., 2007; MCCRARY, 2009) não podem ser abordados através de modelos estáticos.

Este ensaio propõe um modelo teórico dinâmico para a carreira do criminoso a partir do arcabouço de opções reais. O modelo parte de algumas premissas a respeito do comportamento destes criminosos que estão relacionadas às características de opções reais.

¹ Ver Schmidt e Witte (1984) para uma resenha dos modelos tradicionais de economia do crime.

² Block e Heinecke (1975) e Heinecke (1978) são os precursores da aplicação a economia do crime. Ehrlich (1973) apresenta uma versão rudimentar de escolha entre o mercado legal e ilegal, no entanto o modelo não envolve alocação do tempo.

Em primeiro lugar, criminosos crônicos não costumam participar de atividades legais e tendem a fazer uma carreira na atividade ilegal. A constituição de uma carreira na atividade ilegal apenas reflete a estabilidade nas oportunidades (incentivos) que o criminoso enfrenta. Por exemplo, ao cometer um crime se supera um custo psicológico que reduz os custos da reincidência. Além disso, uma eventual condenação é capaz de reduzir os possíveis ganhos em uma atividade legal devido ao estigma de ser um ex-condenado. Estas características implicam que é possível modelar o crime considerando a escolha entre um setor e o outro como eventos mutuamente exclusivos ao longo do ciclo de vida do indivíduo. Isto resulta em um caráter irreversível a opção pela atividade ilegal, pois uma vez que o indivíduo exerce esta opção dificilmente retornará ao mercado da atividade legal.

Em segundo lugar, decisões podem ser tomadas em qualquer ponto do tempo com conseqüências para todo o restante do ciclo de vida dos indivíduos. Em modelos estáticos a decisão de engajar na atividade ilegal é feita em um determinado ponto no tempo e não há a opção de adiamento da mesma. Entretanto, na realidade este engajamento pode ser feito em qualquer momento da vida de um indivíduo.

Em terceiro lugar, o rendimento da atividade ilegal é incerto. A possibilidade de sucesso ou fracasso em cada evento (crime) permite supor que o rendimento da atividade ilegal é estocástico. Mocan et al. (2000) e McCrary (2009) associam os rendimentos do crime a distribuições de probabilidade, porém não estabelecem nenhuma distribuição *a priori*. Isto complica significativamente a resolução dos modelos e a interpretação de seus resultados. Este ensaio, assim como os tradicionais modelos de opções reais, propõe que os rendimentos da atividade ilegal seguem um processo misto, parte contínuo e parte discreto, ou seja, um movimento Browniano geométrico sujeito a saltos discretos. Desta forma, estes possuem uma distribuição semelhante à log-normal, porém com caudas mais “pesadas”. Isto permite obter uma solução analítica para o modelo e o torna diferenciado dos demais, pois apresenta uma solução fechada com resultados menos ambíguos.

Apesar de o modelo ter características idênticas de uma opção financeira (americana com dividendos), as dimensões da carreira do criminoso abordadas pelos criminologistas são consideradas³. A literatura em criminologia destaca três dimensões básicas: a participação, a frequência dos crimes e a duração da carreira do criminoso. A participação é modelada a partir da opção que o indivíduo possui de engajar na atividade ilegal (crime) em qualquer ponto no tempo. Esta opção uma vez exercida gera um fluxo contínuo de rendimentos determinado pela frequência dos crimes e pela sua taxa de sucesso. Por sua vez, a duração da carreira é incluída no modelo na forma de um processo de Poisson. Esta é determinada pela probabilidade de receber uma condenação e uma conseqüente punição pelo sistema legal⁴.

Além desta breve introdução, este ensaio apresenta mais três seções. A próxima seção faz uma revisão dos modelos teóricos dinâmicos da carreira do criminoso. A terceira seção apresenta o modelo teórico proposto, bem como os seus resultados e interpretações. A quarta seção apresenta as conclusões baseadas no que foi apresentado nas seções anteriores.

2. Modelos dinâmicos: revisão da literatura

Poucos trabalhos apresentam modelos dinâmicos de crime baseados no ciclo de vida dos indivíduos. Flinn (1986) é um dos precursores. O autor apresenta três modelos de alocação do tempo no trabalho legal e no ilegal (crime) em cada período. O primeiro é um modelo com salários do trabalho legal constantes, o segundo com acumulação de capital humano no setor legal e o terceiro com penas crescentes para a atividade criminal. A sua preocupação era reproduzir os modelos empíricos que mostram que a participação no crime varia com a idade (BLUMSTEIN et al., 1986; ELLIOTT et al., 1989; FARRINGTON, 1986; PIQUERO et al., 2003; WOLFGANG et al., 1987; PIQUERO et al., 2007). Embora o artigo não apresente nenhuma calibragem, o modelo proposto

³ Ver Piquero et al. (2007) para uma resenha de trabalhos empíricos a respeito destas dimensões.

⁴ Não se pode ignorar a possibilidade de o indivíduo ser morto em confronto com as vítimas, policiais ou com outros criminosos. Do ponto de vista do modelo o desfecho é o mesmo, pois, resulta no encerramento da carreira do criminoso.

mostra que a alocação do tempo no crime é maior entre os mais jovens, tal como predizem os modelos empíricos.

Mocan et al. (2000) propõem um modelo estado dependente em que a acumulação de capital humano nos setores legal e ilegal determina os rendimentos obtidos nestes setores. Assim, a acumulação obtida em um dos setores no período anterior implica em maiores rendimentos neste setor no período seguinte levando a um comportamento inercial no ciclo de vida dos indivíduos que tendem a permanecer em um dos setores escolhido inicialmente⁵. Portanto, a carreira na atividade ilegal é um equilíbrio possível do modelo proposto pelos autores, principalmente para indivíduos que acumularam pouco capital humano para trabalhar no setor legal, como por exemplo, jovens que começam a sua carreira na atividade ilegal. Autores como Hamparian et al. (1978) e Krohn et al. (2001) já argumentavam que indivíduos que começam na atividade ilegal mais cedo tendem a desistir mais tarde e, portanto, possuem carreiras mais longas.

O modelo apresentado pelos autores se diferencia dos trabalhos anteriores por considerar os rendimentos do setor legal e ilegal com estocásticos, mas com uma volatilidade maior no setor ilegal. Outra contribuição do trabalho é apresentar a dinâmica de transição no ciclo de vida dos indivíduos, algo que também não está presente nos demais trabalhos a respeito da carreira criminosa. A principal limitação do trabalho é não conseguir obter uma solução analítica para o modelo devido à complexidade de sua formulação, assim seus resultados são interpretados somente através da calibragem do modelo.

Lee e McCrary (2005) não apresentam um modelo dinâmico de crime, mas discutem alguns aspectos fundamentais para a modelagem dinâmica na economia do crime. O trabalho contribui para a literatura ao destacar que crimes mais graves são punidos com penas privativas de liberdade que envolvem uma grande quantidade de tempo e, portanto, o horizonte de tempo do indivíduo é relevante na discussão dos efeitos de dissuasão do sistema legal. Criminologistas, em geral, acreditam que a probabilidade de punição possui um efeito de dissuasão maior do que o tamanho da punição enquanto economistas, tal como foi discutido na introdução, tendem a acreditar que é possível haver uma taxa de substituição ótima entre estes parâmetros. Contudo, este último raciocínio só tem validade se o horizonte dos indivíduos é infinito ou muito longo. Pois, se o seu horizonte for bastante curto, penas de privação de liberdade longas terão pouca importância em sua decisão de praticar crimes. Neste caso, o aumento da probabilidade de punição seria mais eficiente, tal como argumentam os criminologistas. Estes temas voltarão a ser discutidos mais adiante.

Dando continuidade a revisão da literatura, McCrary (2009) apresenta um modelo dinâmico que é a generalização do modelo proposto por Becker (1968). Diferentemente de Mocan et al. (2000), o autor encontra uma solução analítica para o modelo através de um retorno do crime de equilíbrio representado no modelo por um retorno financeiro de reserva, tal qual os modelos tradicionais de mercado de trabalho. O trabalho também apresenta um modelo para demanda por crimes baseado no papel do governo na alocação de recursos no sistema de justiça que determinam a probabilidade de apreensão e condenação e, conseqüentemente, a punição dos criminosos. Os resultados da estática comparativa do modelo com relação aos parâmetros são coerentes com a literatura.

Engelen (2004) e At e Chappe (2005) propõem um modelo alternativo de crime baseado em opções reais. Segundo os autores os modelos dinâmicos baseados na maximização da utilidade esperada se assemelham ao cálculo do valor presente líquido feitos em finanças corporativas e, portanto, apresentam todas as limitações já reconhecidas pela literatura em lidar com incerteza (DIXIT e PINDYCK, 1994). Os autores seguem a linha de trabalhos que aplicam as teorias de opções reais em modelos microeconômicos que não estão relacionados diretamente a investimentos, tais como Suzuki (2008) que modela o comportamento suicida e Mensah (2004) que utiliza opções reais para estudar a corrupção.

Embora o modelo apresentado por Engelen (2004) e At e Chappe (2005) cheguem às mesmas conclusões dos modelos estáticos, os autores concluem que o efeito de dissuasão de um crime não é

⁵ Segundo os autores isto levaria os indivíduos a permanecerem no setor ilegal mesmo em períodos posteriores a recessões econômicas, período em que estiveram fora do setor legal de trabalho.

necessariamente permanente, ou seja, a decisão de não cometer um crime pode ser apenas um simples adiamento desta decisão.

De qualquer forma, os artigos mostram que na presença de três características, a dizer, incerteza, irreversibilidade e liberdade de escolha do momento de praticar o crime, a utilização da modelagem baseada em opções reais apresenta algumas vantagens em relação à modelagem tradicional. Questões como taxas de substituição intertemporal, aversão ao risco, volatilidade dos retornos e impactos da incerteza na decisão de engajar no crime são mais bem tratadas. Por exemplo, tanto o rendimento da atividade legal quanto da atividade ilegal envolvem alguma incerteza (risco), portanto, o maior risco da atividade criminosa deve implicar em uma maior volatilidade dos seus retornos. Por outro lado, isto também deve implicar em maiores retornos, pois, caso contrário a atividade ilegal não seria vantajosa. Assim, tal como a maior parte dos ativos na economia, há uma relação entre risco e retorno.

Mesmo assim, os trabalhos de Engelen (2004) e At e Chappe (2005) deixam algumas lacunas. At e Chappe (2005) apresentam um modelo simples de opções reais em que os indivíduos possuem rendimentos determinísticos em que a única fonte de incerteza é a distribuição de probabilidade associada à punição, portanto, ignoram os efeitos da incerteza dos rendimentos na decisão de cometer um crime. Por sua vez, Engelen (2004) reconhece as limitações de seu trabalho, segundo o autor, p. 344: *“However, it is more realistic to assume that criminals can exercise their criminal option during the whole time to maturity (American option type)”*. Ao utilizar um modelo de opção européia se assume que a opção só pode ser exercida no seu vencimento o próprio autor reconhece que está hipótese não é realista.

Para modelar o crime com a forma de opções reais, mais especificamente como uma opção americana com dividendos, os retornos da atividade criminosa são modelados com um processo estocástico. Um processo estocástico é uma variável que se desenvolve no tempo de uma forma (pelo menos em parte) aleatória e imprevisível. De uma maneira mais formal, um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade para uma variável x durante um tempo t . A forma mais comum e fácil de modelar um processo estocástico é na sua forma contínua. Um processo de Wiener, ou movimento Browniano, é um processo em tempo contínuo que possui incrementos independentes, cujas mudanças no intervalo são normalmente distribuídas e sua variância crescem com o tempo e tudo que se precisa para fazer uma previsão do futuro da variável são a sua distribuição de probabilidade e seu valor atual⁶.

Assim, a próxima seção apresenta um modelo baseado em opções reais para avaliar a decisão de seguir uma carreira criminosa, ou seja, de se engajar em uma atividade ilegal por um longo período até o momento que esta é encerrada por um fator externo, tal como a sua incapacitação através do aprisionamento ou a sua morte.

3. Um modelo dinâmico de carreira criminosa

O modelo apresentado neste ensaio⁷ pode ser considerado uma extensão dos modelos de Becker (1968) e Ehrlich (1973) uma vez que parte dos mesmos princípios. No modelo, os indivíduos podem optar por uma atividade no setor legal ou por uma atividade no setor ilegal.

Embora haja uma diversidade de atividades classificadas como ilegais⁸ estas possuem algumas características comuns, tais como, a possibilidade de um ganho pecuniário e o risco de uma condenação sujeita a uma punição por período de tempo (privação de alguma liberdade) capaz de gerar perdas psíquicas (subjetivas) e monetárias para os indivíduos. Estas perdas monetárias podem

⁶ Estas características (de processos Markovianos) é que garantem a solução analítica dos modelos de opções reais. Ver Trigeorgis (1996) para uma apresentação dos principais modelos.

⁷ Todavia, será visto adiante que o modelo também apresenta características de modelos tradicionais de economia do trabalho, tais como procura por trabalho (*Job Search*) e compensações para trabalhos arriscados (*Risky Job*). Ver Borjas (2005) para uma apresentação simplificada destes modelos.

⁸ Vários trabalhos mostram que a diversificação é mais comum do que a especialização na carreira dos criminosos (Farrington et al., 1988; Nevaes et al., 1990; Tracy et al., 1990; Wolfgang et al., 1972).

ser na forma de multa, na forma de custo de oportunidade (não há geração de rendimentos no período da punição) ou na forma de perda de rendimentos futuros no setor legal devido ao tempo sem acumular capital humano e ao estigma de ter uma condenação. Além disso, como já foi comentado anteriormente determinadas atividades ilegais incorrem no risco de morte. Por estas razões é necessário atribuir um caráter estocástico a atividade ilegal. Por sua vez, por simplicidade, se assume que atividade legal possui rendimentos determinísticos⁹.

Não há a necessidade de treinamento para participar dos setores legal e ilegal e não há um custo de entrada e saída destes setores, embora haja um custo de oportunidade pela opção feita. Se assume que a participação nestes setores são eventos mutuamente exclusivos e que não há possibilidade de retorno a atividade legal após uma condenação. A primeira hipótese se justifica pelo interesse do presente ensaio em estudar a carreira do criminoso crônico e não dos criminosos de ocasião e a segunda se fundamenta na literatura que mostra que condenações implicam em retornos inferiores e na impossibilidade de exercer uma série de atividades legais (LOTT, 1992). Além disso, assume-se a estabilidade dos parâmetros do modelo, a fim de garantir a consistência temporal das escolhas feitas.

Diferentemente dos modelos tradicionais da economia do crime, o modelo proposto acrescenta uma dinâmica à escolha do indivíduo e permite que a escolha possa ser feita em qualquer ponto no tempo de seu ciclo de vida. Desta forma, o engajamento na atividade ilegal é uma opção que pode ser adiada e exercida no momento conveniente¹⁰. Engelen (2004) argumenta que um crime pode envolver benefícios baixos no presente e que o adiamento da execução pode gerar um ganho se houver um aumento nestes benefícios, assim, valorizando a opção pela atividade ilegal. Cabe salientar que, segundo a teoria tradicional de economia do crime, isto não seria possível porque as decisões são tomadas em um único instante t , pois se tratam de modelos estáticos.

Os indivíduos podem viver por um período infinito e tomam uma decisão que envolve todo o seu ciclo de vida. O valor presente dos rendimentos obtidos na atividade legal representa o custo de oportunidade pago pelos criminosos ao exercer a opção pela atividade ilegal¹¹ e podem apresentar duas formas de acordo com o horizonte considerado para o tempo de permanência neste setor:

a) Infinito:

$$W = \int_0^{\infty} w_t e^{(\mu-\rho)t} dt = \frac{w_t}{\rho-\mu} \quad (1)$$

b) Finito:

$$W = \int_0^T w_t e^{(\mu-\rho)t} dt = \frac{w_t [1 - e^{(\mu-\rho)T}]}{\rho-\mu} \quad (2)$$

Onde w_t representa o rendimento da atividade legal em cada instante t , este é exógeno no modelo porque é determinado no mercado de trabalho no qual o setor ilegal é apenas uma pequena fração dele (EHRLICH, 1996), ρ representa a taxa de desconto intertemporal do indivíduo e μ representa os incrementos (reduções) em w_t . A diferença $(\rho-\mu)$ representa os dividendos associados aos rendimentos (ativos), pois pode ser interpretada como a diferença entre o retorno esperado e a taxa de valorização do ativo (MCDONALD e SIEGEL, 1986). Desta forma, a condição $\rho > \mu$ é necessária para que se tenham dividendos positivos e, por conseqüência, o rendimento do mercado legal terá um valor presente positivo.

⁹ Neste aspecto há uma semelhança com modelos de trabalhos arriscados, pois atividade ilegal pode ser entendida como uma atividade sujeita a risco de morte. Ver Rosen (1974) e Thaler e Rosen (1976) para um estudo formalizado destes mercados.

¹⁰ Embora isto não seja comum em modelos de economia do crime, os problemas de momento ótimo para exercer a opção (aceitar uma oferta de emprego) são estudados através de modelos de "Job Search" introduzidos inicialmente por McCall (1970). Ver Lippman e McCall (1976) para uma resenha destes modelos.

¹¹ Neste caso, se poderiam acrescentar facilmente outros tipos de custo de entrada no mercado ilegal.

Por sua vez, o rendimento obtido na atividade ilegal esta sujeito a incerteza. Neste ensaio se assume que o rendimento monetário deste tipo de atividade é um processo estocástico que segue um Movimento Browniano Geométrico (MBG), ou seja, se assume que as variações percentuais nos rendimentos são normalmente distribuídas. Um rendimento que segue um MBG é a representação contínua do limite de uma árvore binomial com sucessos (crimes que geram rendimentos) ou fracassos (crimes sem rendimentos) em que cada incremento é independente em relação aos demais, ou seja, a probabilidade de sucesso em um período independe do que ocorreu nos períodos anteriores. Portanto, o rendimento do crime é aleatório uma vez que depende da taxa de sucesso na execução dos crimes.

Além da incerteza a respeito dos rendimentos, a atividade ilegal esta sujeita a incerteza associada a uma punição originada em uma condenação cuja probabilidade de ocorrer esta associada a um processo de Poisson tal que a probabilidade de ser punido e conseqüente encerramento da carreira em cada instante t é de λdt e a de continuar na carreira é de $1-\lambda dt$. A probabilidade de praticar crimes por n períodos até o período de encerramento da carreira em $T=\tau$ é $1-e^{-\lambda\tau}$. Após este período, o indivíduo é penalizado com uma fração $0\leq\phi\leq 1$ de seu rendimento que representa o tamanho da punição (severidade). Esta punição é estabelecida pelo sistema legal de forma exógena e depende do tipo de crime praticado¹². Assim, o indivíduo recebe Y do momento T em que exerce a opção pela atividade ilegal até o momento τ em que é punido e recebe $(1-\phi)Y$.

Sob estas condições o problema dinâmico do indivíduo de escolha sob incerteza será¹³:

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathbb{E} & \left[\int_0^\tau U(Y_t) e^{-\rho t} dt + \int_\tau^\infty (1-\phi)U(Y_t) e^{-\rho t} dt \right] \\ \text{s. t. } \quad \frac{dY}{Y} & = \mu dt + \sigma dz - dq \end{aligned} \quad (3)$$

Onde $U(.)$ representa a função de utilidade monetária da atividade criminosa e Y representa o rendimento monetário da atividade criminosa, o parâmetro μ representa os incrementos positivos ou negativos no rendimento monetário da atividade criminosa¹⁴ e σ representa a volatilidade destes incrementos, z representa um processo de Wiener em que $dz = \xi_t \sqrt{dt}$ e $\xi_t \sim N(0,1)$, q representa um processo de Poisson, tal que:

$$dq = \begin{cases} \varepsilon(\phi) \text{ com prob. } \lambda dt \\ 0 \text{ com prob. } (1-\lambda dt) \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde $\varepsilon(\phi)$ representa o impacto de ϕ nos rendimentos da atividade ilegal. Existem duas fontes de incerteza no modelo. A primeira se refere à incerteza a respeito dos rendimentos na atividade ilegal, que por sua vez, depende da taxa de sucesso na atividade, a segunda se refere à incerteza quanto à punição. Isto pode ser resumido na expressão que representa a variância do processo dada por¹⁵:

$$\text{Var}(dY) = \underbrace{\lambda\phi^2 Y^2 dt}_{\text{Punição}} + \underbrace{\sigma^2 Y^2 dt}_{\text{Rendimento}} \quad (4)$$

A opção de ingressar na carreira criminosa é avaliada considerando o valor da opção quando esta é exercida (valor de estar ativo) e o custo de oportunidade por não participar da atividade

¹² Em Merton (1976) e McDonald e Siegel (1986) estes valores são desconhecidos. Aqui se assume que o indivíduo conhece a punição imposta pelo seu crime praticado. Esta suposição não muda significativamente os resultados.

¹³ Note que a agregação feita inclui todos os períodos de atividade e inatividade após o exercício da opção pela carreira criminosa. Se não há custo de entrada e saída destes períodos, é indiferente se estes períodos são alternados ou contínuos, pois a agregação dos mesmos gera a mesma soma (integral).

¹⁴ Este parâmetro, uma vez que a opção pela atividade criminal é exercida, capta o ganho de rendimentos que a repetição de crimes pode gerar. Em outras palavras, este ganho poderia se originar de um processo de aprendizado que não necessariamente é interno e envolver externalidades, tal como o processo de “learning by doing” proposto por Arrow (1962).

¹⁵ Ver apêndice 6.1 para a demonstração deste resultado.

criminosa (valor de estar inativo). O valor de estar ativo é dado pela condição de otimalidade da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\rho F(Y)dt = \mathbb{E}(dF) + U(Y)dt \quad (5)$$

Onde $F(Y)$ representa o valor da opção de ingressar na carreira criminosa. Esta condição determina que o retorno esperado deva ser igual ao ganho de capital (primeiro termo à direita) adicionado ao fluxo de dividendos instantâneo (segundo termo à direita). Este último depende da função de utilidade escolhida. Neste modelo se opta por uma função de utilidade de von Neumann–Morgenstern exponencial dada por $U(Y) = Y^\theta$. Onde o expoente $\theta > 0$ determina a preferência do indivíduo frente ao risco¹⁶, se $\theta > 1$, este é propenso ao risco, se $\theta < 1$, este é avesso ao risco e se $\theta = 1$, este é neutro ao risco.

Para obter $\mathbb{E}(dF)$ se utiliza o lema de Itô e se aplica o operador de esperança. Substituindo esta expressão e a função de utilidade escolhida em (5) tem-se que:

$$\frac{\sigma^2}{2} Y^2 F''(Y) + \mu Y F'(Y) - (\rho + \lambda) F(Y) + \lambda F[Y(1 + \phi)] + Y^\theta = 0 \quad (6)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária não homogênea. Sua solução é composta por uma solução homogênea e outra particular. A solução particular pode ser obtida utilizando o método dos coeficientes indeterminados. Conjecturando uma solução com a seguinte forma:

$$F(Y)_P = c_1 Y^\theta \quad (7)$$

Substituindo esta possível solução em (6) se obtém o seguinte valor para a constante:

$$c_1 = \frac{1}{\Delta'} \quad (8)$$

Onde $\Delta' = \rho - \mu\theta - \frac{\sigma^2}{2}\theta(\theta - 1) + \lambda[1 - (1 - \phi)^\theta]$. Assim, a solução particular será:

$$F(Y)_P = \frac{U(Y)}{\Delta} \quad (9)$$

A solução homogênea pode ser obtida na forma de potências usando Y^γ . Isto resulta em uma equação indicial com duas raízes reais diferentes com sinais opostos, ou seja, esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$F(Y)_H = k_1 Y^{\gamma_1} + k_2 Y^{-\gamma_2} \quad (10)$$

Onde k_1 e k_2 são constantes a serem determinadas. Entretanto, este problema só faz sentido econômico se for excluída a possibilidade de ocorrerem bolhas especulativas¹⁷. Estas são eliminadas considerando as condições de não sobrevalorização e a condição $F(0)=0$. A primeira implica que não é possível obter ganhos vendendo a opção por um valor superior aos seus fundamentos, assim, é necessária a condição $k_1=0$ para que isto não ocorra. A segunda implica que $k_2=0$ é uma condição necessária uma vez que a potência negativa de Y vai para o infinito quando Y vai para zero. Sob estas condições, o valor de estar ativo será determinado somente pela solução particular, ou seja, pelos seus fundamentos.

¹⁶ Neste caso a medida relativa de Arrow-Pratt de aversão ao risco é $1-\theta$.

¹⁷ A equação (7) representa os componentes fundamentais do valor da opção enquanto a equação (10) representa os componentes especulativos. Os componentes especulativos permitem o valor da opção ser superior ao valor de seus fundamentos, desta forma, é possível comprá-la no presente e vendê-la no futuro com algum ganho de capital.

O valor de estar inativo da atividade criminosa não gera rendimentos, uma vez que o potencial criminoso não está exercendo a sua atividade ilegal. Portanto, este é composto pelo custo de oportunidade e pela expectativa de valorização da opção. Neste caso, a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman será:

$$\rho F_0(Y)dt = \mathbb{E}(dF) \quad (11)$$

Utilizando os mesmos procedimentos anteriores, a expressão para o valor de estar inativo será:

$$\frac{\sigma^2}{2} Y^2 F_0''(Y) + \mu Y F_0'(Y) - (\rho + \lambda) F_0(Y) + \lambda F_0[Y(1 - \phi)] = 0 \quad (12)$$

Esta equação diferencial homogênea possui a forma de Cauchy-Euler e sua solução pode ser obtida na forma de potências. A sua equação indicial também possui duas raízes reais diferentes com sinais opostos e, assim, tal como o problema anterior, a raiz negativa é eliminada pelo mesmo argumento. Portanto, a sua solução será dada por:

$$F_0(Y) = k_1 Y^{\gamma_1} \quad (13)$$

Onde k_1 é uma constante a ser determinada e se $\phi=1$, tem-se que $\gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \left[\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2(\rho+\lambda)}{\sigma^2} \right]^{1/2} > 1$ ¹⁸. Para obter esta constante algumas condições de fronteira são utilizadas:

$$\begin{aligned} F_0(Y^*) &= F(Y^*) - W \\ F_0'(Y^*) &= F'(Y^*) \end{aligned} \quad (14)$$

Onde Y^* representa o valor crítico do rendimento monetário da atividade criminosa que torna a carreira criminosa a escolha ótima, ou seja, representa um rendimento de reserva da atividade criminosa. A primeira condição de fronteira estabelece que o valor da opção deve ser igual a valor monetário líquido obtido quando a mesma é exercida (*value matching condition*). A segunda condição estabelece que estes valores devem ser tangentes ao ponto em que é ótimo exercer a opção (*smooth-pasting condition*). Utilizando estas condições, se obtém um sistema não linear com duas equações e duas incógnitas (k_1 e Y^*). Este sistema possui as seguintes soluções:

$$Y^* = \left[\frac{\Delta' \gamma_1 W}{(\gamma_1 - \theta)} \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (15)$$

$$k_1 = \frac{\theta}{\Delta' \gamma_1} \left(\frac{\Delta' \gamma_1 W}{\gamma_1 - \theta} \right)^{\theta - \gamma_1 / \theta} \quad (16)$$

Onde a condição $\gamma_1 > \theta$ é necessária para obter Y^* e k_1 maior do que zero. O resultado para Y^* implica que o valor presente do retorno financeiro da atividade ilegal deve ser superior ao custo de oportunidade de atuar em uma atividade legal. Isto pode ser visto substituindo (15) e em (9), pois desta forma o valor líquido de estar ativo será:

$$F(Y^*)_{liquido} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \theta} \right) W \quad (17)$$

Onde a expressão entre parênteses que multiplica W é maior do que um, uma vez que $\gamma_1 > \theta > 0$. Este resultado é uma consequência da inclusão da incerteza a respeito dos retornos monetários da atividade

¹⁸ Ver o apêndice 6.2 para uma representação geral de γ_1 .

ilegal no modelo. É possível mostrar que $\frac{\partial \gamma_1}{\partial \sigma} > 0$ e $\frac{\partial \gamma_1}{\partial \lambda} > 0$, por conseqüência, o retorno da atividade criminosa deve ser incrementado para cobrir o custo de oportunidade de se inserir em uma atividade legal, ou seja, assim como predizia Adam Smith atividades sujeitas a risco devem incluir compensações nos seus rendimentos (ROSEN, 1974; THALER e ROSEN, 1976). Portanto, assim como os modelos de economia do trabalho, este modelo também encontra um valor crítico Y^* , que representa o rendimento mínimo que um indivíduo estaria disposto a receber para se engajar na atividade ilegal. Todavia, o resultado aqui apresentado é fechado para todos os parâmetros e a sua interpretação é mais simples do que os modelos dinâmicos apresentados na literatura.

3.1. Estática comparativa e simulações

De acordo com Becker (1968) os indivíduos não optam por atividades ilegais porque estes são diferentes de outros indivíduos em termos de suas motivações básicas, estes optam por atividades ilegais porque possuem características diferentes. Estas diferenças no modelo aqui apresentado são representadas por diferentes parâmetros. Em outras palavras, indivíduos diferentes possuem parâmetros diferentes e, portanto, tomam decisões distintas. Os resultados obtidos no modelo podem ser mais bem analisados através de estáticas comparativas e simulações.

O valor do rendimento de reserva obtido em (15) está relacionado aos demais parâmetros do modelo da seguinte forma, este será maior quanto maior for a probabilidade de punição (λ), quanto maior for a punição (ϕ), quanto maior for o custo de oportunidade da atividade legal (w). Uma redução no valor de rendimento de reserva ocorre quanto maior for o coeficiente de preferência ao risco (θ), quanto maior for a taxa de desconto intertemporal (ρ) e quanto maior for a taxa de crescimento média dos rendimentos (μ).

Os resultados são intuitivos e seguem a literatura a respeito da carreira do criminoso. A forma como o modelo é construído implica que W , o valor presente dos rendimentos no mercado legal, represente o custo (de oportunidade) pago pelo indivíduo ao exercer a opção pela atividade ilegal. Este é considerado um pagamento único porque a inclusão no setor ilegal significa a sua exclusão do setor legal. No modelo este custo é exógeno e não há uma referência de como este valor é obtido. Todavia, este valor é definido no mercado de trabalho e depende de características idiossincráticas, tal como o capital humano acumulado pelo indivíduo, e depende de características gerais da economia, tal como a demanda por trabalhadores no setor legal da economia.

Há uma vasta literatura que relaciona o desemprego ao crime. A idéia é que a falta de oportunidades no setor legal leva o custo de oportunidade a valores muito baixos e, assim, torna a opção pela atividade mais atrativa (EIDE et al., 2006). Chiricos (1987) utilizando 288 estimações com dados agregados de 63 trabalhos encontrou que o desemprego apresenta sinal positivo e coeficientes estatisticamente significantes em 31% dos casos e apenas em 2% este sinal era negativo e o coeficiente estatisticamente significativo. Resultados semelhantes são encontrados em Freeman (1995) e Levitt (1995). Portanto, o sinal positivo encontrado para a derivada é corroborado pela literatura empírica.

Ehrlich (1996) destaca que incentivos gerais como os salários no mercado legal possuem um efeito global na criminalidade, no entanto, não se podem ignorar os impactos dos incentivos específicos, que são representados pelos demais parâmetros. Um aspecto essencial do modelo é avaliar como a perspectiva de um fluxo de rendimentos no setor ilegal pode afetar a decisão de exercer a opção por este setor. O horizonte deste fluxo está diretamente relacionado à duração da carreira do criminoso que, por sua vez, depende da probabilidade subjetiva de punição representada no modelo por λ^{19} . Para visualizar melhor os impactos da duração da carreira do criminoso considere uma simulação com $\rho=0.04$, $\mu=0.02$, $\sigma=0.1$, $\theta=1$, $w=1000$ e $t=\infty$. Para obter o rendimento de reserva Y^* é

¹⁹ Cabe salientar que esta pode variar entre os indivíduos, mesmo se tratando do mesmo crime e sistema de justiça, pois, esta depende também da capacidade do indivíduo em ludibriar a polícia e em se defender nos tribunais, por exemplo, contratando bons advogados.

necessário utilizar métodos numéricos para obter γ_1 quando $0 < \phi < 1$. Os resultados estão resumidos na tabela 1.

Tabela 1. Rendimento de reserva (\$ ao ano) como uma função de λ e ϕ

1/ λ	ϕ				
	1	0.75	0.5	0.25	0
35	4052.45	3436.64	2778.45	2109.87	2425.39
20	5250.00	4300.44	3308.54	2302.08	2425.39
15	6172.40	4977.35	3742.82	2488.85	2425.39
14	6434.77	5170.79	3868.36	2545.05	2425.39
13	6736.92	5393.93	4013.69	2610.98	2425.39
12	7088.70	5654.10	4183.73	2689.09	2425.39
11	7503.49	5961.34	4385.16	2782.72	2425.39
10	8000.00	6329.63	4627.33	2896.53	2425.39
9	8605.17	6779.15	4923.67	3037.27	2425.39
8	9359.29	7340.06	5294.30	3215.01	2425.39
7	10325.53	8059.68	5770.71	3445.56	2425.39
6	11608.78	9016.61	6405.24	3755.17	2425.39
5	13397.18	10351.88	7291.74	4190.95	2425.39
4	16065.52	12346.45	8617.21	4846.73	2425.39
3	20484.22	15652.98	10816.13	5940.33	2425.39
2	29250.00	22218.74	15185.55	8121.28	2425.39
1	55250.00	41708.33	28166.51	14610.58	2425.39

A tabela 1 mostra que o aumento da punição e da probabilidade de ser pego aumentam o rendimento necessário para que a opção pela atividade ilegal seja exercida. Por exemplo, um indivíduo neutro ao risco com uma oportunidade de ganhar \$1000 ao ano para sempre em uma atividade legal estaria disposto a se engajar em uma atividade ilegal se receber \$ 4052.45 por ano ao longo de 35 anos.

Contudo, a literatura mostra que a carreira no crime não é tão longa assim. Os primeiros trabalhos feitos por Greene (1977), Greenberg (1975) e Shinnar e Shinnar (1975) estimam uma carreira com duração entre 5 e 12 anos. Blumstein et al. (1982) encontra que a maior parte das carreiras dura pelo menos cinco anos e Spelman (1994) estima um período médio de duração entre 6 e 7 anos. Porém, Piquero et al. (2004) utilizando uma amostra longitudinal encontram um período médio de 17 anos enquanto Laub e Sampson (2003) utilizando a uma amostra semelhante, porém com metodologia distinta, estima uma carreira média de 25 anos.

No modelo, carreiras longas estão associadas diretamente a baixas probabilidades de punição. Kyvsgaard (2004) mostra que estas podem variar bastante entre crimes e entre países. Por exemplo, a probabilidade de ser punido²⁰ por um roubo seria de 11% nos Estados Unidos, 17% na Inglaterra, enquanto que na Dinamarca esta probabilidade seria de 33%. Em outros crimes a probabilidade seria ainda menor, o autor estima que a probabilidade de ser punido por um roubo de veículos seja de 3% nos Estados Unidos e de 8% na Dinamarca e na Inglaterra.

Um aspecto interessante da diversidade de probabilidades de punição entre crimes é que indivíduos racionais podem ser indiferentes entre escolher atividades ilegais com alta probabilidade de punição, e, por consequência, uma carreira mais curta, mas com uma punição menos severa. Poderia ainda optar por uma carreira mais longa em uma atividade que possui uma punição mais severa. Por exemplo, o valor crítico que torna a opção pela atividade ilegal ótima é semelhante em uma carreira de

²⁰ Esta é obtida através da razão entre o número de condenações e o número de crimes para cada 1000 habitantes.

35 anos em que o indivíduo perde toda a sua renda quando é punido e uma carreira de 5 anos em uma atividade em que a punição é de 25% de sua renda obtida na atividade ilegal.

Cabe salientar que a duração da carreira tem implicações a respeito de políticas de punição, pois esta diretamente relacionada à eficiência da incapacitação. Penas privativas de liberdade em prisões longas para indivíduos com uma carreira de crimes residual pequena são um desperdício de recursos. Ademais, a manutenção de indivíduos aprisionados em idades avançadas pode levar a um aumento nos custos com a saúde do mesmo (PIQUERO et. al., 2003).

Ainda com respeito à punição cabe considerar no modelo pelo menos dois estados da mesma. Quando $\phi < 1$ isto significa que a punição não esgota a capacidade de gerar recursos na atividade ilegal. Este seria o caso de penas alternativas ao aprisionamento, tais como serviços comunitários ou regime semi-aberto. Como estas punições envolvem uma alocação significativa de tempo pelo indivíduo este teria uma redução parcial de seu rendimento. Quando $\phi = 1$, então o indivíduo não obtém rendimentos no período da punição. Sieberg (2005) comenta que mesmo penas privativas de liberdade cumpridas em prisões em que não há trabalho podem não ter o efeito de detenção esperado pela sociedade. Isto porque segundo o autor, p.9, “...the leisure of prison, combined with privileges such as access to weights and unlimited phone use, as well as cable television, compact disc players, stereos, and computers in a prisoner's cell, have diminished the punitive effect of prison...”.

Independente da eficiência dos sistemas de punição, o modelo replica a existência de um efeito de “dissuasão” tanto na probabilidade de punição quanto na severidade da punição já consagrados na literatura²¹. Criminologistas normalmente acreditam que a primeira é mais eficiente na redução da criminalidade do que a segunda e economistas, por sua vez, tendem a acreditar que há uma espécie de *trade-off* e que é possível encontrar uma combinação ótima entre elas que podem ser mais eficiente²². Contudo, há neste ponto, muitas divergências (GAROUPA, 2001).

Engelen (2004) afirma que os efeitos de dissuasão podem ser apenas transitórios uma vez que a opção pelo crime pode se valorizar e torna o seu exercício ótimo em um período no futuro. Entretanto, dinâmica do modelo permite que exista uma forma teórica de dissuadir o indivíduo a se engajar na carreira criminosa de forma definitiva. Este resultado é apresentado na forma de uma proposição.

Proposição 1: Se $Y^* > Y(0)$, o efeito de dissuasão ótimo é $\lambda\phi = \mu$ para todo $\mu > 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ e $0 \leq \phi \leq 1$.

Prova: apêndice 6.2.

Como o rendimento esperado do setor ilegal cresce a uma taxa $\mu - \lambda\phi$, se a punição esperada crescer a mesma taxa que os rendimentos, não haverá uma valorização da opção. Assim, os rendimentos do setor ilegal não serão superiores ao rendimento de reserva e a opção pelo crime não será exercida. Alguns autores argumentam que a diferença $\mu - \lambda\phi$ deve ser constante para que exista a viabilidade na atividade e para que a opção possa ser exercida em algum ponto no tempo (MERTON, 1976; MCDONALD e SIEGEL, 1986; DIXIT e PYNDICK, 1994). Portanto, aumentos na probabilidade e na severidade das punições seriam compensados com um aumento nos rendimentos do setor ilegal, ou seja, haveria um ajuste na demanda que garantiria a existência da atividade ilegal. Uma implicação deste resultado é que um aumento em μ implica em um aumento em ρ , pois se assume que os ativos geram dividendos positivos. Assim, crimes com maiores probabilidades de punição (saltos mais frequentes) ou com maior severidade na punição (saltos mais intensos) tendem a ser praticados por indivíduos com uma alta taxa de desconto temporal, ou seja, indivíduos que valorizam pouco o futuro.

No modelo proposto neste ensaio, assim como o modelo proposto por Becker (1968), onde potenciais criminosos não possuem restrições de renda, todas as combinações de probabilidades de punição e severidades na punição são capazes de produzir o mesmo nível de dissuasão se os

²¹ Cabe salientar que vários crimes deixam de ser praticados simplesmente porque não compensam. Portanto, é possível inibir um crime sem que o criminoso seja pego em flagrante antes de cometê-lo. Esta é a essência do conceito de dissuasão.

²² Ver Polinsky e Shavell (2000) para uma revisão sobre o tema.

indivíduos são neutros ao risco. Contudo, os impactos podem ter magnitudes distintas quando são considerados indivíduos que não são neutros ao risco.

Proposição 2: *A elasticidade de Y^* com respeito a probabilidade de punição é superior a severidade da punição se $\frac{U(Y)-U(Y-f)}{f} > U'(Y-f)$, ou seja, se os indivíduos são apreciadores do risco.*

Prova: apêndice 6.3.

A proposição 2, assim como Becker (1968), mostra que para manter o mesmo nível de dissuasão (mesmo valor de Y^*) as probabilidades de punição e a sua severidade devem mudar de acordo com as preferências sobre o risco dos indivíduos. Indivíduos avessos ao risco são mais sensíveis a mudança na severidade da punição enquanto indivíduos apreciadores do risco são mais sensíveis a mudanças na probabilidade de punição. Autores como Witte (1980), Grogger (1991) e Block e Gerety (1995) concluem através de estudos empíricos que os criminosos devem ser apreciadores do risco porque a proposição 2 é verificada tal como proposta por Becker (1968). Isto ocorre porque no modelo a atividade ilegal é uma forma de aposta em que indivíduos apreciadores do risco mostrariam a sua preferência por esta opção.

Eide (1994) encontra um valor mediano para a elasticidade da probabilidade de punição superior a elasticidade da severidade da punição ao coletar informações de 118 estimações apresentadas na literatura. Isto reforça o argumento de que criminosos são em média apreciadores do risco. Todavia, a literatura mostra que a preferência dos indivíduos a respeito do risco pode ser diferente para ganhos e perdas e pode depender também das chances de ganhos e perdas²³. A preferência pelo risco em perdas e a aversão ao risco em ganhos pode ser suficiente para encontrar elasticidades com respeito à probabilidade de punição superiores a elasticidade a respeito da severidade da punição (FOREMAN-PECK e MOORE, 2010). Como a punição é uma perda e o rendimento do crime é um ganho, um aumento na severidade da punição terá um efeito pequeno em indivíduos propensos ao risco, enquanto um aumento na probabilidade de punição irá reduzir a utilidade de um indivíduo que é avesso ao risco em ganhos.

O modelo permite que se avalie como o rendimento de reserva se altera com mudanças nos parâmetros de aversão ao risco e volatilidade dos rendimentos da atividade ilegal. A tabela 2 apresenta os resultados considerando uma simulação com $\rho = 0.04$, $\mu = 0.02$, $\sigma = 0.1$, $\lambda = 0.05$, $\phi = 1$, $w = 1000$ e $t = \infty$.

Tabela 2. Rendimento de reserva (\$ ao ano) como uma função de θ e σ

θ	σ				
	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
0.5	21 339 997.27	23 765 625.00	26 973 523.26	30 920 941.55	35 687 327.37
0.6	1 292 402.80	1 437 723.37	1 627 525.01	1 857 704.11	2 131 204.14
0.7	174 392.11	193 792.62	218 826.79	248 770.04	283 821.45
0.8	38 824.81	43 098.56	48 549.08	54 983.43	62 411.44
0.9	12 068.71	13 383.42	15 041.17	16 973.88	19 176.29
1	4 739.05	5 250.00	5 887.21	6 621.32	7 447.77
1.1	2 205.58	2 440.97	2 731.40	3 062.22	3 430.43
1.2	1 166.03	1 289.22	1 439.65	1 609.15	1 795.81
1.3	679.94	751.07	837.04	932.92	1 037.45
1.4	428.24	472.60	525.69	584.32	647.63
1.5	286.86	316.29	351.17	389.33	430.16

²³ Os avanços em estudos comportamentais sobre decisões mostram que indivíduos são avessos ao risco para ganhos com altas probabilidades e perdas com baixa probabilidade e são apreciadores do risco para ganhos com baixa probabilidade e perdas com altas probabilidades (Tversky e Kahneman, 1992).

Note que os valores são bastante sensíveis a mudança no parâmetro que determina a preferência quanto ao risco. Um indivíduo avesso ao risco com $\theta=0.9$ estaria disposto a exercer a opção pela atividade ilegal somente se esta apresentar rendimentos iguais ou superiores a 13 vezes ao rendimento obtido no mercado legal, enquanto indivíduos apreciadores do risco com $\theta=1.3$ exerceriam esta opção por um valor 30% inferior ao rendimento que obteriam na atividade legal.

Trabalhos empíricos comportamentais mostram que apenas uma parcela da população é propensa ao risco em ganhos. Cramer et al. (2002) estimou que 1.39% dos trabalhadores e 2.58% dos empregadores são apreciadores do risco. Diaz-Serrano e O'Neill (2004) encontraram 6.5% em 1995 e 0.85% em 2000. Dohmen et al. (2005) identificou 9% de sua amostra como apreciadores do risco. Entretanto, indivíduos avessos ao risco podem se engajar na atividade criminosa se esta for rentável o suficiente para cobrir o seu rendimento de reserva ou simplesmente se este parâmetro de preferência ao risco está associado a outros parâmetros que reduzem este valor crítico, tais como uma remuneração baixa no mercado legal e/ou uma taxa de desconto intertemporal mais alta.

Em geral, criminosos possuem taxas de desconto mais altas (WILSON e HERRNSTEIN, 1985; KATZ et al., 2003). Em um caso extremo, em que criminosos possuem taxas de desconto infinitas, punições por período de tempo não teriam efeito algum. Na verdade, neste caso, os parâmetros relevantes são as preferências do indivíduo quanto ao risco e o seu rendimento do mercado legal.

Proposição 3: *Quando $\rho \rightarrow \infty$ o valor crítico $Y^* \rightarrow w^{1/\theta}$ independente dos demais parâmetros.*
Prova: apêndice 6.4.

A proposição 3 mostra uma taxa de desconto intertemporal infinita torna o indivíduo indiferente entre a atividade legal e a ilegal se este for neutro ao risco. Como o rendimento da atividade legal é determinístico, o papel da preferência quanto ao risco é de somente compensar o fato de o indivíduo optar pela atividade que envolve risco. Portanto, um rendimento pouco superior ao obtido na atividade legal é suficiente para tornar a opção pela atividade ilegal ótima. Embora haja poucos trabalhos que concluam que criminosos podem ser avessos ao risco, já há alguma evidência empírica disto. Shepherd (2003) mostra uma evidência empírica de que criminosos podem ser tão avessos ao risco quanto qualquer cidadão que respeita a lei. A autora mostra que há um estigma associado à condenação e este gera um aumento na punição esperada. Assim, indivíduos que podem optar entre sentenças certas e incertas (loteria) com a mesma sentença esperada optariam pela segunda por causa da maior punição esperada associada à primeira.

Outra linha mais teórica mostra que é possível ter criminosos avessos ao risco através de funções de utilidade espaço-dependentes ou posto-dependentes (NEILSON e WINTER, 1997), no entanto, estas são funções de utilidade atípicas que não possuem amparo na realidade. O modelo apresentado neste ensaio mostra que é possível indivíduos avessos ao risco optarem pela carreira criminosa. Contudo, para indivíduos avessos ao risco o benefício da atividade ilegal deverá sempre ser superior ao rendimento da atividade legal. Mesmo em casos menos extremos do que a proposição 3, ou seja, com taxas de desconto finitas, há a possibilidade de indivíduos avessos ao risco optarem pela carreira criminosa desde que a demanda por crimes seja capaz de gerar os rendimentos suficientes para que esta opção seja ótima.

A tabela 3 mostra como o rendimento de reserva se altera com mudanças na taxa de desconto intertemporal e no período em que o indivíduo obtém rendimentos no setor legal considerando uma simulação com $\theta=1$, $\mu=0.02$, $\sigma=0.1$, $\lambda=0.05$, $\phi=1$ e $w=1000$.

Assim como as preferências quanto ao risco às preferências quanto ao tempo também apresentam heterogeneidade relacionada às circunstâncias. A prática corrente em economia é assumir a taxa de desconto constante para um indivíduo, mas esta pode diferir entre indivíduos (BECKER, 1996; GROSSMAN, 2000). Por exemplo, Kirby et al.(1999) e Gomme et al. (2001) mostram que indivíduos que utilizam drogas tem seu raciocínio afetado e possuem uma taxa de desconto bem superior comparada ao que se assume nos modelos econômicos.

Tabela 3. Rendimento de reserva (\$ ao ano) como uma função de ρ e τ

ρ	τ				
	∞	35	30	25	20
0.02	8637.46	2550.74	2238.67	1910.60	1565.71
0.03	4882.78	2458.06	2203.05	1921.23	1609.76
0.04	3628.67	2358.86	2153.36	1914.61	1637.21
0.05	3000.00	2260.21	2096.42	1896.36	1652.01
0.06	2621.70	2166.12	2036.72	1870.57	1657.23
0.07	2368.70	2078.64	1977.16	1840.17	1655.26
0.08	2187.39	1998.63	1919.53	1807.28	1647.99
0.09	2050.94	1926.22	1864.88	1773.38	1636.86
0.1	1944.44	1861.12	1813.77	1739.50	1623.03
∞	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00

No modelo proposto, a taxa exponencial de desconto intertemporal não permite que se avalie o impacto desta mudança no mesmo indivíduo, entretanto é possível que se analise indivíduos diferentes em diferentes pontos de seu ciclo de vida. Por exemplo, um indivíduo que possui a perspectiva de executar uma atividade legal por 35 anos recebendo \$ 1000 e desconta os rendimentos futuros a uma taxa de 2% estaria disposto a exercer a opção pela atividade ilegal se esta rendesse ao menos \$ 2550.74, porém se a taxa de desconto fosse de 10% este valor se reduziria para \$ 1861.12.

Frederick et al. (2002) mostram que a taxa de desconto constante é mais uma conveniência matemática do que um resultado fundamentado na experiência empírica. Os autores mostram que estas podem variar de acordo com os valores envolvidos, pois ganhos são mais descontados do que perdas. Isto levaria indivíduos a praticar crimes porque o valor presente das punições que ocorrerão no futuro possui um valor baixo no presente. Além disso, valores maiores são mais descontados do que valores menores. O que levaria a uma perda de eficiência nos alongamentos de punições. Todavia, o artifício matemático mais comum para superar as limitações da taxa de desconto constante é considerar que estas se reduzem ao longo do tempo, estas são chamadas de taxas hiperbólicas de desconto. Porém, a sua adoção dificulta a chance de encontrar resultados que sejam consistentes temporalmente (FREDERICK et al., 2002).

Mudanças nas preferências dos indivíduos quanto ao risco e ao tempo são explicações relevantes para a maior participação de jovens no crime. Há evidências empíricas de que existe uma relação positiva entre a idade dos indivíduos e aversão ao risco dos mesmos (JIANAKOPILOS e BERNASEK, 1998; PALSSON, 1996) e uma relação negativa com as taxas de desconto intertemporal (KIRBY, 1997; KIRBY e MARAKOVIC, 1995; MYERSON E GREEN, 1995).

Muito embora existam também autores que atribuam aos baixos rendimentos obtidos no mercado legal de trabalho a causa para esta maior participação. Grogger (1998), p.757, afirma que “*if criminal behavior responds to wages, then the age distribution of crime may well be a labor market phenomenon. Wages represent the opportunity cost of committing crime, and they rise steeply with age during the early part of one’s career.*” Entretanto, Witte e Witt (2000) destacam que a evolução dos rendimentos nas atividades legais não podem ser a única explicação para a participação maior de jovens em atividades ilegais, pois muitos jovens cometem crimes muito antes de terem oportunidades de trabalho no setor legal. Lee e McCrary (2005) destacam a mudança no regime penal para indivíduos que possuem mais de 18 anos. Segundo os autores, a maior idade é responsável por um aumento considerável no custo do crime porque aumentam conjuntamente a probabilidade de punições e a severidade das mesmas.

Em suma, é possível concluir que jovens praticam mais crimes porque possuem taxas de desconto intertemporal maiores, aversão ao risco menor, punições menos severas e menos prováveis e poucas oportunidades no mercado legal de trabalho que se traduzem em um baixo custo de oportunidade. Estas características quando colocadas no modelo proposto levam a uma redução do rendimento de reserva dos indivíduos, que, por sua vez, estariam dispostos a se engajar na carreira de

crimes por um rendimento mais baixo. Na verdade, jovens recebem oportunidades na atividade criminal porque são uma mão-de-obra de custo inferior a de um adulto.

4. Conclusões

Este ensaio apresentou um modelo dinâmico de crime. Vários componentes do crime e do controle do crime são dinâmicos em sua natureza e estes não podem ser captados por modelos estáticos (McCRARY, 2009). Os resultados obtidos estão em consonância com a literatura de economia do crime. Além disso, o modelo proposto apresenta algumas vantagens em relação aos anteriores. Em primeiro lugar, apresenta uma solução analítica fechada para o modelo que evita ambigüidades. Em segundo lugar, permite simular resultados numéricos a partir de um modelo teórico. O modelo também apresenta algumas vantagens em relação ao modelo proposto por Engelen (2004). A utilização de um processo de Poisson para modelar a probabilidade de punição e as suas conseqüências nos rendimentos do setor ilegal aproxima o modelo do mundo real em que existem pelo menos duas fontes de incerteza nestes rendimentos. Outro ponto é que a utilização de uma opção americana é mais realista do que uma opção européia, uma vez que dificilmente os indivíduos possuem opções de carreira com data de vencimento. No mundo real a opção pela carreira criminosa pode ser exercida a qualquer momento do ciclo de vida do indivíduo.

No entanto, cabe salientar que o modelo proposto possui algumas limitações. O modelo aqui apresentado só modela a oferta de crimes e, portanto, não avalia os custos de mudanças nos parâmetros do modelo, que poderiam ser modelados na demanda por crimes. Assim, não foi possível inferir a respeito de políticas ótimas de punição, que é um tema relevante e com vasta literatura. As conclusões aqui apresentadas, portanto, estão limitadas a oferta de crimes, assim como os demais modelos dinâmicos encontrados na literatura, tais como Mocan et al. (2000) e McCrary (2009). Esta limitação dos modelos de economia do crime já foi destacada por Merlo (2001), que enfatiza a importância de utilizar equilíbrio geral dinâmico para modelar o comportamento criminoso. Esta é uma limitação que deve ser superada em novos trabalhos.

Por fim, este ensaio deixa outras lacunas que podem ser abordadas em trabalhos futuros. Seria interessante considerar os rendimentos dos indivíduos estado dependentes através de uma formalização da acumulação de capital humano e suas implicações para a inserção no mercado de trabalho de ambos os setores. Outra possibilidade é considerar a alternância e a concomitância entre os setores. Esta uma característica que se adaptaria ao comportamento de criminosos esporádicos que não se enquadrariam na definição de um criminoso crônico. Além disso, modelos dinâmicos que possuíssem formas diferentes para a taxa de desconto intertemporal também poderiam gerar resultados interessantes. Há uma literatura robusta indicando que taxas de desconto exponenciais são insatisfatórias para modelar o comportamento dinâmico dos indivíduos.

5. Referências Bibliográficas

- ARROW, K. J. "The Economic Implications of Learning by Doing". *The Review of Economic Studies*, 29(3), 155-173, 1962.
- BECKER, G.S. "Crime and punishment: an economic approach". *Journal of Political Economy*, 76, 169-217, 1968.
- _____. *Accounting for tastes*. Cambridge: Harvard University Press, 1996.
- BLOCK, M. K.; HEINEKE, J.M. "A labor theoretic analysis of the criminal choice". *American Economic Review*, 65, 314-325, 1975.
- BLOCK, M. K., GERETY, V.E. "Some experimental evidence on differences between student and prisoner reactions to monetary penalties and risk". *Journal of Legal Studies*, 24, 123-132, 1995.
- BLUMSTEIN, A.; COHEN, J.; ROTH, J.; VISHER, C.A. (eds) *Criminal Careers and Career Criminals*. 2 vols. Washington, D.C.: National Academy Press, 1986.

- BLUMSTEIN, A.; COHEN, J.; HSIEH, P. *The Duration of Adult Criminal Careers*. Final report submitted to National Institute of Justice, August 1982. Pittsburgh: School of Urban and Public Affairs, Carnegie Mellon University, 1982.
- BORJAS, G.J. *Labor economics*. New York: McGraw-Hill. 3rd Edition, 2005.
- CASE, A. C.; LAWRENCE F. K. “The company you keep: The effects of family and neighborhood on disadvantaged youths.” *NBER Working Paper 3705*, 1991.
- CHIRICOS, T. G. “Rates of crime and unemployment: An analysis of aggregate research evidence”. *Social Problems*, 34, 187-212, 1987.
- CRAMER, J. S.; HARTOG, J.; JONKER, N.; VAN PRAAG, C. M. “Low risk aversion encourages the choice of entrepreneurship: An empirical test of a truism”. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 48, 29–36, 2002.
- DIAZ-SERRANO, L.; O’NEILL, D. “The relationship between unemployment and risk-aversion”. *IZA Discussion Paper*, DP 1214, 2004.
- DIXIT, A.K.; PINDYCK, R. S. *Investment under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- DOHMEN, T., FALK, A., HUFFMAN, D., SUNDE, U., SCHUPP, J., WAGNE, G. G. “Individual risk attitudes: new evidence from a large, representative, experimentally-validated survey”. *IZA Discussion Paper*, DP 1730, 2005.
- EHRlich, I. “Participation in illegitimate activities: A theoretical and empirical investigation,” *Journal of Political Economy*, 81 (3), 521–565, 1973.
- _____. “Crime, punishment and the market for offenses”. *Journal of Economic Perspectives*, 10, 43-67, 1996.
- EIDE, E. *Economics of Crime: Deterrence and the Rational Offender, Contributions to Economic Analysis*. Amsterdam, Oxford e Tokyo: North-Holland, 1994.
- EIDE, E.; RUBIN, P.H.; SHEPHERD, J.M. *Economics of Crime*. (Foundations and Trends in Microeconomics vol. 2), 2006.
- ELLIOTT, D.S.; HUIZINGA, D.H.; MENARD, S. *Multiple Problem Youth: Delinquency, Substance Use, and Mental Health Problems*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- ENGELN, P-J. “Criminal behavior: A real option approach with an application to restricting illegal insider trading” *European Journal of Law and Economics*, 17: 329–352, 2004.
- FARRINGTON, D. P. “Age and crime”. In: Michael Tonry and Norval Morris (eds). *Crime and Justice: An Annual Review of Research*, vol. 7. Chicago: University of Chicago Press, 1986.
- _____. “Predictors, causes and correlates of male youth violence”. *Crime and Justice*, 24, 421-475, 1998.
- _____. “Behavioral economic analysis of crime: A critical review”. *European Journal of Law and Economics*, 15(1), 2003.
- FARRINGTON, D. P.; SNYDER, H.N.; FINNEGAN, T.A. “Specialization in juvenile court careers”. *Criminology*, 26, 461–487, 1988.
- FLINN, C. “Dynamic models of criminal careers” In: *Criminal Careers and Career Criminals*, A. Blumstein, J. Cohen, J. A. Roth e C. A. Visher, (eds). Vol. 2, 356-379. Washington, D.C: National Academy Press, 1986.
- FOREMAN-PECK, J.; MOORE, S.C. “Gratuitous violence and the rational offender model”. *International Review of Law and Economics*, 30, 160–172, 2010.
- FREDERICK, S.; LOEWENSTEIN, G.; O’DONOGHUE, T. “Time discounting and time preference: a critical review”. *Journal of Economic Literature*, 40 (2), 351-401, 2002.
- FREEMAN, R. B. “The labor market”. In: J. Q. Wilson; J. Petersilia (eds.). *Crime*. 171–191, Institute for Contemporary Studies, 1995.
- GAROUPA, N. “The theory of optimal law enforcement”, *Journal of Economic Surveys*, 11, 267-295, 1997.
- _____. “Optimal magnitude and probability of fines,” *European Economic Review*, 45, 1765–1771, 2001.

- GAVIRIA, A.; RAPHAEL, S. "School-based peer effects and juvenile behavior," *Review of Economics and Statistics*, 83 (2), 257–268, 2001.
- GREENE, M. A. *The Incapacitative Effect of Imprisonment on Policies of Crime*. Unpublished Ph.D. thesis, School of Urban and Public Affairs, Carnegie Mellon University, Pittsburgh. Ann Arbor, MI: University Microfilms, 1977.
- GREENBERG, D. F. "The incapacitative effect of imprisonment: Some estimates". *Law and Society Review*, 9, 541–580, 1975.
- GROGGER, J. "Certainty vs. severity of punishment". *Economic Inquiry*, 29, 297-315, 1991.
- _____. "Market wages and youth crime". *Journal of Labor Economics*, 16(4), 756-791, 1998.
- GROSSMAN, M. "On the concept of health capital and the demand for health". *Journal of Political Economy*, 80, 223-255, 1972.
- HAMPARIAN, D.; SCHUSTER, R.; DINITZ, S.; CONRAD, J. *The Violent Few: A Study of Dangerous Juvenile Offenders*. Lexington, MA: D. C. Heath, 1978.
- HEINEKE, J. M. (ed.) *Economic Models of Criminal Behaviour*. Amsterdam: North Holland, 1978.
- JIANAKOPOLOS, N. A.; BERNASEK, A. "Are women more risk averse?". *Economic Inquiry*, 36(4), 620-630, 1998.
- KATZ, L. F.; LEVITT, S.D.; SHUSTOROVICH, E. "Prison conditions, capital punishment and deterrence". *American Law and Economics Review*, 5 (2), 318-343, 2003.
- KIRBY, K. N. "Bidding on the future: Evidence against normative discounting of delayed rewards". *Journal of Experimental Psychology*, 126(1), 54-70, 1997.
- KIRBY, K. N.; MARAKOVIC, N. N. "Modeling myopic decisions: Evidence for hyperbolic delay-discounting within subjects and amounts". *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 64(1), 22-30, 1995.
- KIRBY, K. N.; PETRY, N. M.; BICKEL, W. "Heroin addicts have higher discount rates for delayed rewards than non-drug-using controls". *Journal of Experimental Psychology*, 128(1), 78-87, 1999.
- KROHN, M. D.; THORNBERRY, T.P.; RIVERA, C.; LE BLANC, M. "Later delinquency careers". In: Loeber, R.; Farrington, D. P. (eds.) *Child Delinquents: Development, Intervention, and Service Needs*. Thousand Oaks: Sage, 2001.
- KYVSGAARD, B. *The Criminal Career: The Danish Longitudinal Study*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- LAUB, J. H.; SAMPSON, R.J. "Understanding desistance from crime". In: Michael Tonry, (ed.) *Crime and Justice: A Review of Research*, vol. 28. Chicago: University of Chicago Press, 2001.
- LEE, D. S.; MCCRARY, J. "Crime, punishment, and myopia". *NBER Working Paper*, WP 11491, 2005.
- LEVITT, S. D. "Why do increased arrests rates appear to reduce crime: Deterrence, incapacitation, or measurement error?". *Economic Inquiry*, 36, 353–372, 1995.
- LIPPMAN, S.A; MCCALL, J.J. "The economics of job search: a survey". *Economic Inquiry*, 14(2), 155-189, 1976.
- LOTT JR., J. R. "Do we punish high income criminals too heavily?". *Economic Inquiry*, 30, 583-608, 1992.
- MCCALL, J. J. "Economics of information and job search". *Quarterly Journal of Economics*, 84(1), 113-126, 1970.
- MCDONALD, R.; SIEGEL, D. R. "The value of waiting to invest". *Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707-727, 1986.
- MCCRARY, J. "The deterrence effect of prison: Dynamic theory and evidence". Mimeo, UC Berkeley, 2009.
- MOCAN, H. N; BILLUPS, S.C.; OVERLAND, J. "A dynamic model of differential human capital and criminal activity". *NBER Working Paper*, WP 7584, 2000.
- MENSAH, J. A. "The valuation of corruption: An option pricing approach". *UNECA Working paper*, 2004.
- MERLO, A. "The research agenda: dynamic models of crime and punishment". *Economic Dynamics*, 2(2), 2001.

- MERTON, R. C. "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous". *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144, 1976.
- MYERSON, J.; GREEN, L. "Discounting of delayed rewards: Models of individual choice". *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 64, 263-276, 1995.
- NEVARES, D.; WOLFGANG, M.E.; TRACY, P.E. *Delinquency in Puerto Rico: The 1970 Birth Cohort Study*. New York: Greenwood Press, 1990.
- NIELSON, W. S., WINTER, H. "On criminals' risk attitudes". *Economic Letters* 55, 97-102, 1997.
- PALSSON, A-M. "Does the Degree of Relative Risk Aversion Vary With Household Characteristics?". *Journal of Economics Psychology*, 17(6), 771-787, 1996.
- PIEHL, A. M.; DIJULIO, J.J. "Does Prison Pay? revisited: Returning to the crime scene". *Brookings Review*, 21-25, 1995.
- PIQUERO, A. R.; BRAME, R.; LYNAM, D. "Studying the factors related to career length". *Crime and Delinquency*, 50, 412-435, 2004.
- PIQUERO, A. R.; FARRINGTON, D.P.; BLUMSTEIN, A. "The Criminal career paradigm". In: Michael Tonry (ed). *Crime and Justice: A Review of Research*, vol. 30. Chicago: University of Chicago Press, 2003.
- _____. *Key issues in criminal career research: New analyses of the Cambridge study in delinquent development*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- POLINSKY, A, M.; SHAVELL, S. "The economic theory of public enforcement of law". *Journal of Economic Literature*, 38(1), 45-76, 2000.
- ROSEN, S. "Hedonic prices and implicit markets: product differentiation in pure competition". *Journal of Political Economy*, 82 (1), 34-55, 1974.
- SHEPHERD, J.M. "Are criminals like us? Risk attitudes, sentencing guidelines, and increased crime". *Law & Economics Research Paper Series*. Emory School of Law. WP 04-03, 2003.
- SHINNAR, S; SHINNAR, R. "The effects of the criminal justice system on the control of crime: A quantitative approach". *Law and Society Review*, 9, 581-611, 1975.
- SIEBERG, K.K. *Criminal Dilemmas: Understanding and Preventing Crime*, second edition, Berlin: Springer, 2005.
- SPELMAN, W. *Criminal Incapacitation*. New York: Plenum, 1994.
- SUZUKI, T. "Economic modeling of suicide under income uncertainty: for better understanding of middle-aged suicide". *Australian Economic Papers*, 47 (3), 296-310, 2008.
- THALER, R.; ROSEN, S. "The value of saving a life: evidence from the labor market". In: Terleckyj, N.E. (ed.) *Household Production and Consumption*, NBER, 265-302, 1976.
- TRACY, P.E.; WOLFGANG, M.E.; FIGLIO, R.M. *Delinquency Careers in Two Birth Cohorts*. New York: Plenum, 1990.
- TRIGEORGIS, L. *Real Options*. Cambridge: MIT Press, 1996.
- TVERSKY, A., KAHNEMAN, D. "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty". *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323, 1992.
- VISHER, C. A. "The rand inmate survey: a reanalysis". In: *Criminal Careers and Career Criminals*, A. Blumstein, J. Cohen, J. A. Roth e C. A. Visher, (eds). Vol. 2, 161-211. Washington, D.C: National Academy Press, 1986.
- WILSON, J.Q.; HERRNSTEIN, R.J. *Crime and human nature*. New York: Simon and Schuster, 1985.
- WITTE, A. D. "Estimating the economic model of crime with individual data". *Quarterly Journal of Economics*, 94, 57-84, 1980.
- WITTE, A. D.; WITT, R. "Crime causation: economic theories". In: *Encyclopedia of Crime Justice*. New York: Free Press, 2000.
- WOLFGANG, M. E.; THORNBERRY, T.P.; FIGLIO, R.M. *From Boy to Man, from Delinquency to Crime*. Chicago: University of Chicago Press, 1987.
- WOLFGANG, M. E.; FIGLIO, R.M.; SELLIN, T. *Delinquency in a Birth Cohort*. Chicago: University of Chicago Press, 1972.

6. Apêndice

6.1 Momentos de dY

$$\begin{aligned}
 E(dY) &= (\mu Y dt + \sigma Y \varepsilon \sqrt{dt}) \left(\frac{1 - \lambda dt}{2} \right) + (\mu Y dt - \sigma Y \varepsilon \sqrt{dt}) \left(\frac{1 - \lambda dt}{2} \right) - \phi Y \lambda dt \\
 &= \mu Y dt (1 - \lambda dt) - \phi Y \lambda dt \\
 &= \underbrace{(\mu - \phi \lambda)}_{\text{taxa de mudança esperada em } Y} Y dt
 \end{aligned} \tag{A1}$$

$$E(dY^2) = E(\mu^2 Y^2 dt^2 + \sigma^2 Y^2 dz^2 + (-Y)^2 dq^2) = \sigma^2 Y^2 dt + Y^2 \lambda \phi^2 dt$$

Onde $E(dz^2) = dt$ e $E(dq^2) = \lambda \phi^2 dt$ e todos os termos com dt^2 são ignorados, portanto, a variância do processo será:

$$\begin{aligned}
 Var(dY) &= E(dY^2) - [E(dY)]^2 \\
 Var(dY) &= \underbrace{\lambda \phi^2 Y^2 dt}_{\text{Poisson}} + \underbrace{\sigma^2 Y^2 dt}_{\text{MBG}}
 \end{aligned} \tag{A2}$$

6.2. Prova da proposição 1

De (A1) pode se extrair a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \mu - \lambda \phi \tag{A3}$$

A sua solução é dada por:

$$Y_t = Y_0 e^{(\mu - \lambda \phi)t} \tag{A4}$$

Substituindo (11.1) em (A16) e rearranjando os termos, tem-se que:

$$t = \frac{\ln Y_t^* - \ln Y_0}{\mu - \lambda \phi} \tag{A5}$$

Sabendo que o momento ótimo para o exercício da opção é quando $Y_t \geq Y^*$ e que se $Y^* > Y_0$ a opção não é exercida em $t = 0$ (o numerador é um valor positivo), então, tem-se que $t \rightarrow \infty$ quando $\lambda \phi \rightarrow \mu$.

6.3. Prova da proposição 2.

Iniciando pelo modelo de Becker (1968), a utilidade esperada de cometer um crime é dada por²⁴:

$$E[U] = pU(Y - f) + (1 - p)U(Y) \tag{A6}$$

Onde $U[\cdot]$ é a função utilidade, Y é a renda do crime, monetária mais a psíquica, f é o equivalente monetário da punição e p é a probabilidade de ser pego e condenado. Desta forma, um indivíduo comete um crime se a utilidade esperada é positiva e não comete caso esta seja negativa. Note que:

$$\frac{\partial E[U]}{\partial p} = U(Y - f) - U(Y) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial E[U]}{\partial f} = -pU'(Y - f) < 0 \tag{A7}$$

²⁴ Becker (1968), pág. 177.

Através da equação (A18) é possível construir as elasticidades em relação aos dois parâmetros. Estas são dadas por:

$$\frac{-\partial E[U] p}{\partial p} \frac{p}{U} = U(Y - f) - U(Y) \frac{p}{U} \quad \text{e} \quad \frac{-\partial E[U] f}{\partial f} \frac{f}{U} = -pU'(Y - f) \frac{f}{U} \quad (\text{A8})$$

Portanto, a elasticidade com relação à probabilidade de punição será maior do que com relação à punição se:

$$\frac{U(Y) - U(Y-f)}{f} > U'(Y - f) \quad (\text{A9})$$

Isto ocorre se $U''(Y-f) > 0$, ou seja, quando os indivíduos são apreciadores do risco.

No modelo, a elasticidade com relação à probabilidade de punição ($E_{Y\lambda}$) será maior do que com relação à punição ($E_{Y\phi}$) se $\frac{\lambda}{Y^*} \frac{\partial Y^*}{\partial \lambda} > \frac{\phi}{Y^*} \frac{\partial Y^*}{\partial \phi}$.

Utilizando $\frac{\partial Y^*}{\partial \lambda}$ e $\frac{\partial Y^*}{\partial \phi}$ do apêndice 6.3 a desigualdade após retirar os termos em comum será:

$$1 - (1 - \phi)^\theta > \phi\theta(1 - \phi)^{\theta-1} \quad (\text{A10})$$

Denotando $\phi = \frac{f}{Y}$ e $1 - \phi = \frac{Y-f}{Y}$ e substituindo em (7) tem-se que:

$$\frac{Y^\theta - (Y-f)^\theta}{f} > \theta(Y - f)^{\theta-1} \quad (\text{A11})$$

Usando que $U(Y) = Y^\theta$ as equações (A21) e (A23) são equivalentes.

6.4. Prova da proposição 3.

Quando $\rho \rightarrow \infty$, $\Delta' \rightarrow \infty$ e $\gamma_1 \rightarrow \infty$. Assim, substituindo (1) em (15) tem-se que:

$$Y^* = \Lambda w_t^{\frac{1}{\theta}} \quad (\text{A12})$$

Onde $\Lambda = \left[\frac{\Delta' \gamma_1}{(\gamma_1 - \theta)(\rho - \mu)} \right]^{\frac{1}{\theta}}$ e $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \Lambda \rightarrow 1$, portanto, $Y^* \rightarrow w_t^{\frac{1}{\theta}}$.