Equilíbrio Estatístico no Mercado de Trabalho

Jorge Eduardo de Castro Soromenho

Professor do Departamento de Economia da Universidade de São Paulo (FEA-USP), Brasil

Resumo

Neste artigo, apresentamos um modelo macroeconômico kaleckiano no qual o mercado de trabalho é analisado por meio do conceito de equilíbrio estatístico. No modelo o gasto autônomo parametriza as distribuições estatísticas de trabalhadores e firmas e o markup apresenta um comportamento anticíclico. Na abordagem do equilíbrio estatístico, o desemprego não resulta de uma rigidez nominal ad hoc; ele se apresenta como um fenômeno estatístico no qual o investimento desempenha um papel crucial.

Palavras-chave: Modelo kaleckiano, Equilíbrio Estatístico

Classificação JEL: E24, E12

Abstract

In this article, we propose a kaleckian macroeconomic model in which the labor market is analyzed using the concept of statistical equilibrium. We show that autonomous spending parameterizes the statistical distributions of workers and firms and that the markup has an anti-cyclical behaviour. In this approach, unemployment is not a result of an ad hoc nominal rigidity, but arises as a statistical phenomenon in which the investment plays a crucial role.

⋆ Recebido em maio de 2010, aprovado em agosto de 2011. Agradeço a Eleutério Prado e Décio K. Kadota pelos comentários ao artigo e discussões a respeito do formalismo do equilíbrio estatístico. Sou igualmente grato aos autores dos pareceres. Naturalmente, os erros são de minha responsabilidade
E-mail address: `jecs@usp.br`

1. Introdução

O emprego do formalismo do equilíbrio de estatístico na ciência econômica foi proposto por Ducan Foley em diversos artigos. [1] No seu primeiro trabalho (1994), esse formalismo é utilizado numa economia estruturalmente semelhante à do modelo de equilíbrio geral. A característica distintiva da abordagem de Foley é o abandono da hipótese de que os equilíbrios walrasianos são os únicos possíveis, ou, se preferirmos, o descarte da figura coordenadora do leiloeiro. Os agentes são classificados em tipos, definidos por seus conjuntos oferta (*offer sets*), que são formados pelas transações que lhes são desejáveis e possíveis. No contexto altamente descentralizado do modelo, eles se encontram aleatoriamente e realizam trocas. O tipo de interações permitidas é o mais amplo possível: podem ocorrer transações bilaterais, coalizões, sequências de transações, etc. Consequentemente, não vigora, em geral, um preço único para cada mercadoria. Assim, agentes do mesmo tipo podem realizar transações a preços distintos e, portanto, auferir resultados diferentes. O sentido de aplicar esse formalismo à economia foi sintetizado com precisão por Ragab:

> Foley argues there are a numerous small factors that can affect why a certain agent might carry a certain trade but all these factors can be captured or estimated for by assuming some kind of randomness or disequalizing effect that comes as a direct result of how the agents actually behave. (...)
>
> Using randomness in maximum entropy models is not suggesting that the agents act randomly but that each agent has a complicated and rich layer of numerous microscopic factors that determine where they actually end up on the distribution. Despite all of these micro factors, because of the way they are distributed within the population they constantly produce one universal distribution on the macro behaviour. (Ragab 2008, p. 3)

A questão que se coloca, então, é a de caracterizar o que se pode entender por equilíbrios e identificar qual deles é o mais provável, que Foley denomina de *equilíbrio estatístico de mercado*. O equilíbrio estatístico – cuja definição mais precisa deixamos, por ora, em aberto –, não é um ótimo de Pareto. É compatível, portanto, com falhas de coordenação. Ao contrapor os seus resultados aos do modelo tradicional, Foley demonstra que o equilíbrio walrasiano apresenta, na verdade, entropia mínima e, por conseguinte, sua probabilidade tende a zero. [2]

Um dos estudos mais interessantes dessa linha de pesquisa é *Statistical Equilibrium in a Simple Labor Market* (Foley 1996). Nesse artigo, o autor define conjuntos oferta de trabalhadores e empresários bastante específicos, o que lhe permite elaborar um modelo simples, porém com resultados expressivos. Com

[1] Ver Foley (1994, 1996, 2002). Parece-nos que o primeiro trabalho a propor esse tipo de abordagem foi Farjoun e Machover (1983), que se insere no contexto da Economia Política e trata, em particular, da controvérsia sobre a questão da transformação.

[2] Para uma apreciação do formalismo do equilíbrio estatístico como crítica à teoria neoclássica, ver Prado (1999).

efeito, uma vez identificado o equilíbrio mais provável, Foley o compara com o marshalliano e demonstra que, ao contrário do que ocorre no caso do conceito tradicional, o equilíbrio estatístico não descarta um tipo de desemprego que o autor classifica de keynesiano.

Como uma extensão que nos parece natural do trabalho de Foley – e inspirados, em especial, no expressivo resultado por ele obtido em relação ao desemprego –, utilizamos neste artigo o formalismo do equilíbrio estatístico aplicado ao mercado de trabalho num contexto macroeconômico kaleckiano básico. O artigo tem o propósito de mostrar como é possível associar esse formalismo a uma estrutura macroeconômica extremamente simplificada de modo a prover microfundamentos estatísticos para relações típicas dos modelos macro. Em particular, centramos nossa atenção no markup médio. Mostramos que a abordagem de equilíbrio estatístico permite torná-lo endógeno e anticíclico.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, formalizamos o mercado de trabalho com base no conceito de equilíbrio estatístico. Ao longo dessa seção, esclarecemos o significado desse conceito e assinalamos as diferenças entre a nossa abordagem e a de Foley. Na Seção 3, modificamos a estrutura básica do modelo kaleckiano de modo a torná-la adequada ao formalismo do equilíbrio estatístico. Na Seção 4, mostramos a compatibilidade do modelo modificado com o modelo tradicional no caso em que a distribuição do trabalho entre empresas é uniforme. Na Seção 5, resolvemos por simulação o modelo macroestatístico e interpretamos os resultados com particular incidência sobre a questão da endogeneidade da participação dos lucros na renda. Na última seção apresentamos as conclusões.

2. O Mercado de Trabalho

Considere um mercado no qual se trocam trabalho (x_1) por moeda (x_2). Podemos, igualmente, interpretar x_2 como um *quantum* de produto, adquirindo x_2, então, o caráter de um salário real. Há dois grupos de agentes: trabalhadores e firmas (ou capitalistas) indexados por $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, h$, respectivamente.

Admita que as mercadorias não sejam infinitamente divisíveis. Uma transação é o vetor $x = (x_1, x_2)$ no qual uma entrada negativa designa uma venda e uma entrada positiva uma compra. O conjunto enumerável de transações de um particular agente pode ser compreendido como um conjunto de "pontos isolados" contido no R^2.

Seguindo o procedimento de Foley (1996), adotamos um conjunto oferta dos trabalhadores bastante simples supondo que eles aceitam trocar uma unidade de trabalho por quantidades de x_2 superiores ou iguais a um salário de reserva, e, para admitir a possibilidade de desemprego, incluímos no conjunto oferta o vetor nulo. Afastando-nos ligeiramente do modelo original de Foley, fazemos duas hipóteses adicionais: a) consideramos que os intervalos entre sucessivos valores de x_2 sejam uniformes e iguais; e b) estabelecemos um salário máximo para o trabalhadores, $w_{\max}$, que discutiremos posteriormente.

É conveniente estabelecer um indexador para os elementos do conjunto oferta do trabalhador. Nesse sentido, definimos as transações que compõem esse conjunto por

$$x^i[v] = \begin{cases} \left(x_1^i[v], x_2^i[v]\right) = (0,0), & \text{se } \; v = 0; \\ \\ \left(x_1^i[v], x_2^i[v]\right) = (-1, w[v]), & \text{se } \; v = 1, \ldots \bar{v}. \end{cases} \tag{1}$$

Interpretamos a indexação da seguinte forma: $w[v] < w[v']$ se, e somente se, $v < v'$. Consequentemente, $w[1]$ é o salário reserva dos trabalhadores. O conjunto oferta do trabalhador típico é apresentado na Figura 1.

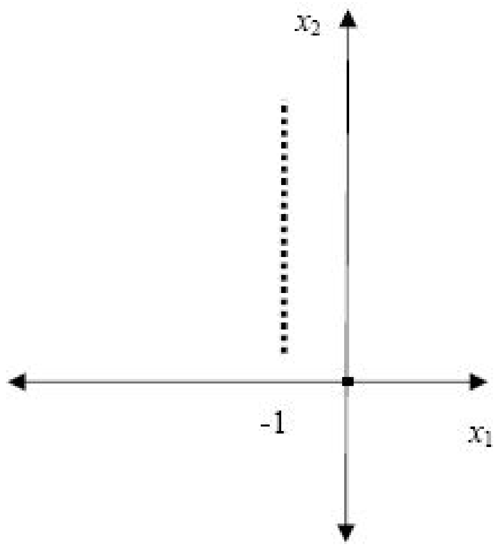

Fig. 1. Conjunto oferta do trabalhador

Em relação às firmas, supomos que cada uma possui um fundo de salários W que é integralmente gasto na compra de força de trabalho. O vetor nulo não pertence, por conseguinte, ao conjunto oferta dos capitalistas. A firma paga o mesmo salário a todos os seus trabalhadores e estabelece um limite superior para o mesmo. Consideramos que, embora firmas distintas possam pagar salários diferentes, o salário máximo é idêntico para todas elas. Esse limite corresponde, portanto, ao salário de máximo que os trabalhadores podem obter, $w_{\max}$.

Como $w[v]$ é a remuneração de uma unidade de trabalho, a quantidade mínima de mão de obra que a firma pode adquirir é $W/w[\bar{v}]$, e a máxima, $W/w[1]$. Tendo em vista que o trabalhador só vende uma unidade de x_1^i, a quantidade de trabalho adquirida por uma empresa é necessariamente um número inteiro compreendido no intervalo $[W/w[\bar{v}], W/w[1]]$.[3] Por construção, portanto, o número de elementos do conjunto oferta das firmas é igual ao dos trabalhadores menos um, ou seja, $\bar{v}$, o que nos permite utilizar o mesmo indexador para os dois tipos de agentes. As transações da empresa j são

$$x^j[v] = \left(x_1^j[v], x_2^j[v]\right) = \left(\frac{W}{w[v]}, -W\right), \qquad v = 1, \dots, \bar{v}, \tag{2}$$

e o seu conjunto oferta é apresentado na Figura 2. Observe que a contagem dos pontos inicia-se da direita para a esquerda.

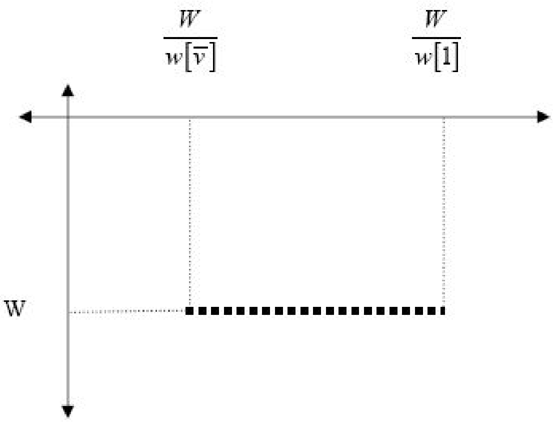

Fig. 2. Conjunto oferta da firma

Como dissemos, ao contrário do que ocorre no caso dos trabalhadores, o conjunto oferta da empresa não inclui o vetor nulo. Esse procedimento é conveniente de um ponto de vista teórico. Com efeito, no formalismo do equilíbrio estatístico aplicado à economia, a interpretação do vetor nulo é ambígua. Se ele é elemento dos conjuntos oferta de dois tipos de agentes, o evento no qual os agentes não transacionam é uma possibilidade combinatória passível de diversas interpretações. Por exemplo, ele pode representar um desacordo em realizar uma transação mutuamente vantajosa, ou, simplesmente, a possibilidade dos agentes não se encontrarem. Porém, se retirarmos o vetor nulo do conjunto oferta das empresas, o número de trabalhadores

[3] No formalismo do equilíbrio estatístico, os conjuntos oferta são reticulados. Rigorosamente, isso limita os valores possíveis de W. Com efeito, suponha que os valores de $w[v]$ sejam $1, 2, 3$ e 4. Como $W/w[v]$ deve ser um inteiro, é necessário que a massa salarial seja um múltiplo comum dos valores do salário. No caso, o mínimo múltiplo comum é 12. Logo, W só pode assumir valores iguais a 12 vezes um número inteiro.

que não realiza nenhuma transação indica a existência de excesso de oferta, visto que os trabalhadores estão dispostos, por definição, a trocar trabalho por um salário mínimo que as empresas aceitam pagar. Temos, assim, uma situação típica de falta de coordenação no mercado, cuja probabilidade deve ser aferida.

Uma transação de mercado é o vetor

$$x = \left(x^{i=1}[v], ..., x^{i=n}[v], x^{j=1}[v], ..., x^{j=h}[v]\right), \tag{3}$$

que assinala uma transação para agente da economia. A cada transação de mercado podemos associar uma distribuição que indica o percentual de agentes alocados nos diferentes elementos dos conjuntos oferta. Sejam $n[v]$ e $h[v]$ o número de trabalhadores e o de firmas, respectivamente, que realizam as transações v. Definindo $\pi^i[v] = n[v]/n$ e $\pi^j[v] = h[v]/h$, temos, então, as seguintes distribuições relativas a trabalhadores e firmas: [4]

$$\pi^i = \left\{\pi^i[0], \ldots \pi^i[\bar{v}]\right\}; \tag{4}$$

$$\pi^j = \left\{\pi^j[1], \ldots \pi^j[\bar{v}]\right\}. \tag{5}$$

Ademais, denominamos o conjunto $\pi = \left\{\pi^i, \pi^j\right\}$ de "distribuição de transações". Obviamente, as distribuições devem atender as denominadas restrições naturais, a saber:

$$\sum_{v=0}^{\bar{v}} \pi^i[v] = 1; \tag{6}$$

$$\sum_{v=1}^{\bar{v}} \pi^j[v] = 1. \tag{7}$$

Embora a cada x corresponda uma única distribuição de transações π, a recíproca não é, em geral, verdadeira. Por exemplo, duas transações mercado x e x', que diferem apenas pelo fato de que numa delas temos os elementos $x[2]^{i=1}$ e $x[5]^{i=3}$ e na outra os elementos $x[5]^{i=1}$ e $x[2]^{i=3}$, correspondem, obviamente, à mesma distribuição de transação. Assim, ao permutarmos os agentes do mesmo tipo, podemos identificar, para a cada distribuição de transação, o número de diferentes modos pelos quais ela pode ser obtida. Esse número – um coeficiente multinomial – é definido como a multiplicidade da distribuição de transação. Para trabalhadores e firmas temos, portanto, [5]

$$M^i[\{n[v]\}] = \frac{n!}{n[0]!n[1]!...n[\bar{v}]!}; \tag{8}$$

[4] Observe que, nas definições das probabilidades, os sobrescritos i e j servem apenas para distinguir se uma distribuição concerne a trabalhadores ou firmas.

[5] Por exemplo, supondo nove trabalhadores e $\bar{v}$ igual a 2, a distribuição segundo a qual todos os trabalhadores estão desempregados pode ser obtida apenas de uma forma $9!/9!0!0! = 1$; já para a distribuição uniforme temos $9!/3!3!3! = 1680$.

$$M^j\left[\{h\left[v\right]\}\right] = \frac{h!}{h\left[1\right]!h\left[2\right]!...h\left[\bar{v}\right]!}. \tag{9}$$

A aproximação de Stirling [6] permite transformar a multiplicidade de uma distribuição de transação em uma expressão que é idêntica à entropia informacional de Shannon, desde que a constante arbitrária dessa medida seja igual ao número de agentes. No nosso caso, as aproximações das medidas de multiplicidade das distribuições são:

$$S\left[\pi^i\right] = -n\sum_{v=0}^{\bar{v}} \pi^i\left[v\right]\ln\pi^i\left[v\right]; \tag{10}$$

$$S\left[\pi^j\right] = -h\sum_{v=1}^{\bar{v}} \pi^j\left[v\right]\ln\pi^j\left[v\right]; \tag{11}$$

com a convenção $0\ln 0 = 0$. Para a economia com um todo, definimos:

$$S\left[\pi\right] = S\left[\pi^i\right] + S\left[\pi^j\right]. \tag{12}$$

Em geral existem muitas distribuições, cada uma delas associada a um número maior ou menor de multiplicidade. O formalismo do equilíbrio estatístico nos diz que devemos escolher a distribuição mais provável. A justificativa desse procedimento pode ser apresentada sinteticamente da seguinte forma. [7] Segundo o princípio da razão insuficiente de Laplace, se não possuímos nenhuma informação, a não ser que as distribuições atendem às restrições naturais, devemos escolher a distribuição uniforme, ou seja, considerar que todos os eventos são igualmente prováveis. Sob o prisma da análise combinatória, a distribuição de transações que apresentar a maior multiplicidade, dadas as restrições, pode ser considerada a mais provável. Formalmente, então, definir uma distribuição como mais provável é simplesmente afirmar que o número de modos pelos quais ela pode ser obtida é maior do que o número correspondente a outras distribuições.

Como extensão desse princípio, se outras informações são conhecidas, e podem ser expressas em termos de restrições, o procedimento adequado seria escolher a distribuição que "mais se aproxima" da distribuição uniforme, dadas essas restrições adicionais. Em outros termos, devemos escolher a distribuição a que podemos atribuir o máximo de incerteza probabilística, o que pressupõe, evidentemente, uma medida de incerteza passível de ser associada a cada distribuição de probabilidade. Uma dessas medidas é, exatamente, a entropia informacional de Shannon, a qual, como vimos, pode ser interpretada como uma aproximação da multiplicidade.

---

[6] Ver, por exemplo, Salinas (1997, Apêndice A.1). A forma assintótica de Stirling é $n! \approx n^n e^{-n}(2\pi n)^{1/2}$. Temos, então, que $\ln n! \approx -n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + \left(\frac{1}{2}\right)\ln 2\pi$. Para n grande, desprezamos $\left(\frac{1}{2}\right)\ln 2\pi$ e consideramos $n+\frac{1}{2} \approx n$. Assim, $\ln n!$ é aproximado por $-n + n\ln n$. Podemos tratar, então, as probabilidades como variáveis reais, o que permite usar o recursos tradicionais do cálculo.

[7] Para uma discussão mais detalhada, ver Kapur e Kesavan (1992) e Foley (2010).

No nosso caso, devemos maximizar $S[\pi]$ considerando às restrições naturais e quaisquer outras que julguemos pertinentes ao mercado de trabalho. Identificada a distribuição de entropia máxima, digamos, π^*, obtemos as probabilidades dos agentes realizarem as várias transações que compõem os seus conjuntos oferta, i. e., $\pi^i[v]^*$ e $\pi^j[v]^*$.

Em Foley (1994, 1996), além de atenderem às restrições naturais, as distribuições devem ser exequíveis. Uma distribuição é dita exequível se as alocações que a ela correspondem são tais que as quantidades compradas de cada mercadoria são iguais às vendidas. Observe que não se trata de afirmar que quantidades ofertadas e demandadas, entendidas como funções dos preços, devam ser iguais. Não estamos lidando com uma condição de equilíbrio tradicional, mas sim com uma restrição que nos diz simplesmente que se cinco maças são vendidas, então, cinco são compradas. Foley (1996) define, então, duas restrições no mercado de trabalho, a saber, a igualdade das quantidades totais de mão de obra compradas e vendidas e a da massa salarial paga com a recebida. De certo modo, todas as distribuições que atendem a essas restrições são equilíbrios estatísticos, no sentido trivial de que as transações de mercado que a elas correspondem são, por força das restrições, factíveis. O termo *equilíbrio estatístico de mercado* é reservado à distribuição com entropia máxima.

No nosso modelo, optamos por um caminho diferente. Como supomos que cada firma paga o mesmo salário a seus trabalhadores e o trabalhador empregado vende apenas uma unidade de trabalho, é necessário que as quantidades totais de trabalho comprado e vendido a cada específico salário sejam iguais. Ou seja, o número de trabalhadores que recebem um salário $w[v]$ deve ser igual ao número de trabalhadores empregados pelo total das firmas que pagam esse mesmo salário. Assim, recordando que $n[v]$ e $h[v]$ são, respectivamente, o número de trabalhadores e o de firmas que realizam as transações v, a exequibilidade significa que [8]

$$n[v] = h[v]\frac{W}{w[v]}, \qquad v = 1, ...\bar{v}. \tag{13}$$

Ao dividirmos e multiplicarmos o lado esquerdo por n e o direito por h, as restrições são expressas em termos dos argumentos da função de entropia a ser maximizada:

$$n\pi^i[v]\,w[v] = h\pi^j[v]\,W, \qquad v = 1, ...\bar{v}. \tag{14}$$

Temos, portanto, o seguinte programa:

$$\underset{\pi}{Max}\ S[\pi] = -n\sum_{v=0}^{\bar{v}}\pi^i[v]\ln\pi^i[v] - h\sum_{v=1}^{\bar{v}}\pi^j[v]\ln\pi^i[v] \tag{15}$$

[8] Cabe notar que as nossas restrições implicam as de Foley, embora a recíproca não seja verdadeira. De fato, somando as equações (13), obtemos $\sum_{v=1}^{\bar{v}} n[v] = \sum_{v=1}^{\bar{v}} h[v]\,W/w[v]$, que assegura a igualdade entre os totais de trabalho comprado e vendido; multiplicando (13) por $w[v]$ e somando resulta $\sum_{v=1}^{\bar{v}} w[v]\,n[v] = \sum_{v=1}^{\bar{v}} h[v]\,W$, que garante que a massa salarial recebida é igual à paga.

$$s.a : \sum_{v=0}^{\bar{v}} \pi^i [v] = 1; \tag{16}$$

$$\sum_{v=1}^{\bar{v}} \pi^j [v] = 1; \tag{17}$$

$$n\pi^i [v] \, w [v] = h\pi^j [v] \, W, \qquad v = 1, ...\bar{v}. \tag{18}$$

Seja $L\left(\pi^i, \pi^j, \mu, q\right)$ a função de Lagrange desse programa, onde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ e $q = (q[1], ...q[\bar{v}])$ são os multiplicadores das restrições naturais e das restrições de exequibilidade, respectivamente. As condições de primeira ordem são (além, obviamente, das restrições):

$$\frac{\partial L}{\partial \pi^i [0]} = -n\left(1 + \ln \pi^i [0]\right) - \mu_1 = 0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi^i [v]} = -n\left(1 + \ln \pi^i [v]\right) - \mu_1 + nw[v] \, q[v] = 0, \qquad v = 1, ..., \bar{v}; \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi^j [v]} = -h\left(1 + \ln \pi^j [v]\right) - \mu_2 - hWq[v] = 0, \qquad v = 1, ..., \bar{v}. \tag{21}$$

A partir das condições (19) e (20) e da restrição natural dos trabalhadores (16), obtemos as probabilidades relativas a esses agentes:[9]

$$\pi^i [0] = \frac{1}{1 + \sum_{v=1}^{\bar{v}} e^{w[v]q[v]}}, \tag{22}$$

$$\pi^i [v] = \frac{e^{w[v]q[v]}}{1 + \sum_{v=1}^{\bar{v}} e^{w[v]q[v]}}, \qquad v = 1, ..., \bar{v}. \tag{23}$$

As condições (21) e a restrição natural das firmas (17) fornecem as probabilidades concernentes às empresas

$$\pi^j [v] = \frac{e^{-Wq[v]}}{\sum_{v=1}^{\bar{v}} e^{-Wq[v]}}, \qquad v = 1, ..., \bar{v}. \tag{24}$$

Os denominadores dessas expressões são denominados de funções de partição:

$$Z^i [q] = 1 + \sum_{v=1}^{\bar{v}} e^{w[v]q[v]}; \tag{25}$$

$$Z^j [q] = \sum_{v=1}^{\bar{v}} e^{-Wq[v]}. \tag{26}$$

Utilizando essas funções, temos, então, como solução da maximização de entropia, as seguintes distribuições, ainda expressas como funções de q:

[9] Basta resolver (19) para $\pi^i [0]$, (20) para $\pi^i [v]$ e substituir em (16).

$$\pi^i = \left\{ \frac{1}{Z^i[q]}, \frac{e^{w[1]q[1]}}{Z^i[q]}, ..., \frac{e^{w[\bar{v}]q[\bar{v}]}}{Z^i[q]} \right\}; \tag{27}$$

$$\pi^j = \left\{ \frac{e^{-Wq[1]}}{Z^j[q]}, ..., \frac{e^{-Wq[\bar{v}]}}{Z^j[q]} \right\}. \tag{28}$$

Por fim, substituindo as distribuições nas restrições de exequibilidade (18), obtemos o seguinte sistema, no qual as incógnitas são os multiplicadores de Lagrange q também denominados de preços entrópicos:

$$nw[v] \frac{e^{w[v]q[v]}}{Z^i[q]} = hW \frac{e^{-Wq[v]}}{Z^j[q]}, \qquad v = 1, ...\bar{v}. \tag{29}$$

Se existe solução para o sistema (29), é fácil demonstrar que a distribuição que maximiza a entropia é única. Com efeito, a função $S[\pi]$ é soma de funções estritamente côncavas $(-z \ln z)$ e as restrições são lineares. Logo, só pode existir um único máximo global interior. Os preços entrópicos não necessitam ser positivos, podendo assumir o valor nulo - o que resulta em distribuições uniformes - ou mesmo sinal negativo.

O sistema está parametrizado pelo fundo de salários, W, e pela relação entre o número de trabalhadores e o de firmas, n/h. Podemos considerar h como um dado e n é, naturalmente, a oferta global de trabalho. Para completarmos o modelo, adicionamos um bloco macroeconômico que nos permite tratar W como variável endógena.

3. Um Modelo Macroeconômico Simples

Como o nosso interesse é apenas discutir como o formalismo do equilíbrio estatístico pode ser proveitosamente acoplado a uma estrutura macroeconômica, optamos por um modelo kaleckiano extremamente simples. [10] Admita que as firmas produzam apenas um bem, y, e que vigora um único preço. Adotamos esse bem como numerário e desenvolvemos o modelo em termos reais. Reinterpretamos, então, W e w como variáveis reais. [11]

Supomos que as firmas operam com uma tecnologia Leontief: $y = \min\{bx_1, ck\}$ e que o capital é dado, igual para todas as firmas e não constitui fator efetivamente limitativo. A função de produção de curto prazo de uma firma j é, portanto, $y^j = bx_1^j$. O produto da firma divide-se em massa salarial real, W, que continuamos a considerar igual para todas a firmas, e os lucros, L^j. Temos, então, $bx_1^j = W + L^j$.

Considere as seguintes equações:

[10] Ver, por exemplo, Taylor (1991). A referência clássica é Kalecki (1976).

[11] A escolha do numerário é, evidentemente, arbitrária, mas a hipótese de preço único pressupõe algo a respeito do processo de concorrência. Voltaremos ao tema em nota posterior.

$$b\sum_{j=1}^{h} x_1^j = hW + rK; \tag{30}$$

$$I + C - b\sum_{j=1}^{h} x_1^j = 0; \tag{31}$$

$$C = hW + (1-s)\, rK; \tag{32}$$

onde I é o investimento, que supomos exógeno, C o consumo; $r = \sum_{j=1}^{h} L^j/K$, a taxa global de lucro; e $K = hK^j$ o capital agregado. A equação (30) é a igualdade entre produto agregado e renda real; (31) é a condição de equilíbrio do mercado do bem; (32) é uma função consumo obtida sob a hipótese kaleckiana de que os trabalhadores consomem o que ganham e os capitalistas uma fração constante, $1-s$, dos seus lucros.

O sistema (30)-(32) compreende $h+3$ variáveis, a saber, x^j, $j = 1, ...h$; W, r e C, estando, portanto, subdeterminado. O fecho tradicional e mais simples consiste em: a) supor que vigora um markup exógeno e igual para todas as firmas, m, o que implica que elas pagam o mesmo salário real, w; e b) considerar que a distribuição do emprego entre firmas é uniforme, definindo como variável o nível de emprego agregado $\bar{n}$. Ou seja,

$$w = \frac{b}{1+m}, \tag{33}$$

$$hW = w\sum_{j=1}^{h} x_1^j = w\bar{n}, \tag{34}$$

o permite obter a solução [12]

$$\bar{n} = \frac{I}{s\,(b-w)} = \left(\frac{1+m}{m}\right)\frac{I}{bs}; \tag{35}$$

$$r = \frac{I}{sK}; \tag{36}$$

$$C = \left(\frac{b}{b-w} - s\right)\frac{I}{s} = \left(\frac{1+m}{m} - s\right)\frac{I}{s}. \tag{37}$$

Como se sabe, os principais resultados são: o investimento afeta positivamente a taxa de lucro, o nível de emprego e o consumo; aumentos do markup reduzem o emprego e o consumo, porém não alteram a taxa de lucro. O salário real depende apenas da produtividade e do markup exógeno. Para uso posterior, observe que para massa salarial da economia temos

[12] Observe que o salário deve ser inferior a b, pois caso contrário não existe equilíbrio no mercado de produto com as hipóteses de que os trabalhadores consomem tudo o que ganham e $I > 0$.

$$hW = \frac{wI}{s\left(b-w\right)} = \frac{I}{ms}. \tag{38}$$

No nosso modelo, não supomos salário único e distribuição de trabalho entre firmas uniforme. Consequentemente, as margens das empresas também não são necessariamente iguais. [13] Devemos proceder, então, de outra forma.

Inicialmente, considere de novo o sistema básico kaleckiano. Como o volume de emprego, $\sum_{j=1}^{h} x_1^j$, é igual ao total de trabalho efetivamente vendido, $n\left(1-\pi^i\left[0\right]\right)$, temos

$$bn\left(1-\pi^i\left[0\right]\right) = hW + rK; \tag{39}$$

$$I + C - bn\left(1-\pi^i\left[0\right]\right) = 0; \tag{40}$$

$$C = hW + \left(1-s\right) rK. \tag{41}$$

Substituindo (41) e (39) na condição de equilíbrio (40), obtemos a equação reduzida

$$bn\left(1-\pi^i\left[0\right]\right) = hW + \frac{I}{s}. \tag{42}$$

No espírito kaleckiano, o sistema é suficiente para determinar inequivocamente a taxa de lucro, $r = I/sK$, [14] mas o mesmo não ocorre em relação às demais variáveis macroeconômicas. No entanto, a equação reduzida pode ser utilizada para, em conjunto com as restrições de exequibilidade do equilíbrio estatístico do mercado de trabalho, determinar os preços entrópicos e o fundo de salários. Lembrando que $\pi^i\left[0\right] = 1/Z^i\left[q\right]$, como vimos em (27), temos,

$$nw\left[v\right]\frac{e^{w[v]q[v]}}{Z^i\left[q\right]} = hW\frac{e^{-Wq[v]}}{Z^j\left[q\right]}, \qquad v = 1, ...\bar{v}; \tag{43}$$

$$bn\left(1-\frac{1}{Z^i\left[q\right]}\right) = hW + \frac{I}{s}. \tag{44}$$

Identificados q e W, podemos substituí-los na distribuição de transações π e, assim, encontrar o equilíbrio macroeconômico (taxa de desemprego, consumo, markup médio, etc.) mais provável como função do investimento e demais parâmetros. Observe que o modelo faz todo sentido à luz do conceito de equilíbrio

[13] No intuito de aclarar a questão das margens, convém voltar a questão da determinação do preço. Apenas para efeitos desta nota, seja w expresso em termos nominais. A cada grupo de firmas, corresponde $w\left[v\right]/p = b/\left(1+m\left[v\right]\right)$, $v = 1, ...\bar{v}$. Ao supormos que vigora um único preço, afastamo-nos de Kalecki (1976) que trabalha com preços médios. Para determinar o preço, diversas hipóteses podem ser feitas. Uma alternativa, por exemplo, é adotar um procedimento que poderíamos, com algum esforço, denominar de ricardiano: o preço é determinado pelo markup mínimo, $m\left[\bar{v}\right]$, exigido pelas firmas que pagam os maiores salários nominais, $w\left[\bar{v}\right]$. As demais auferem margens diferenciais. Assim, o preço depende apenas dessa margem mínima exigida e da produtividade do trabalho, ou seja, ele é dado no modelo – e, portanto, é indiferente apresentar a análise em termos nominais ou reais.

[14] Substituindo (42) em (39).

estatístico, que enfatiza a multiplicidade de microestados (no caso, transações de mercado x) compatíveis com restrições macro (Aoki 1996, Cap. 3).

4. O Modelo sob o Prisma da Abordagem Tradicional

A correspondência do modelo (43)-(44) com os resultados tradicionais do caso de salário único pode ser demonstrada sem dificuldade. Nesse caso o próprio programa de maximização de entropia é desnecessário. Embora esse resultado seja óbvio, é interessante apresentá-lo como etapa preliminar ao exame dos casos mais complexos.

Admita que o conjunto oferta dos trabalhadores compreenda apenas dois pontos:

$$\{(0,0),(-1,w[1])\}. \tag{45}$$

Ou seja, vigora um salário real único que podemos supor igual ao salário mínimo exigido pelos trabalhadores. Logo, o conjunto oferta dos capitalistas é composto de um único vetor:

$$\left\{\left(\frac{W}{w[1]},-W\right)\right\}. \tag{46}$$

Considere as restrições de exequibilidade (14). Como, agora, $\bar{v}=1$, temos apenas uma restrição: $n\pi^i[1]\,w[1]=h\pi^j[1]\,W$. Consequentemente, o modelo reduz-se apenas essa restrição e à equação reduzida macroeconômica. Como, no presente caso, $\pi^i[1]=1-\pi^i[0]$ e $\pi^j[1]=1$, temos:

$$n\left(1-\pi^i[0]\right)w[1]=hW; \tag{47}$$

$$bn\left(1-\pi^i[0]\right)=hW+\frac{I}{s}. \tag{48}$$

Substituindo $n\left(1-\pi^i[0]\right)$ por $n[1]$, obtemos os resultados tradicionais do fechamento kaleckiano:[15]

$$hW=\frac{w[1]\,I}{s\,(b-w[1])}; \tag{49}$$

$$n[1]=\frac{I}{s\,(b-w[1])}. \tag{50}$$

No intuito de mostrar como esse procedimento é insuficiente para o caso geral, admita, agora, que o conjunto oferta dos capitalistas não seja um conjunto unitário. Por simplicidade, considere apenas dois vetores que correspondem às quantidades de trabalho que podem ser compradas ao salário mínimo e a um máximo arbitrário, $w[2]$. Logo, o conjunto oferta das firmas é

[15] Compare com (38) e (35).

$$\left\{ \left(\frac{W}{w[1]}, -W \right), \left(\frac{W}{w[2]}, -W \right) \right\}. \tag{51}$$

Consequentemente, para os trabalhadores temos

$$\{(0,0), (-1, w[1]), (-1, w[2])\}. \tag{52}$$

Assim, temos duas restrições de exequibilidade, $\bar{v} = 2$, e, por conseguinte, o modelo é composto de cinco equações, a saber,

$$nw[1]\pi^i[1] = h\pi^j[1]W; \tag{53}$$

$$nw[2]\pi^i[2] = h\pi^j[2]W; \tag{54}$$

$$\pi^i[0] + \pi^i[1] + \pi^i[2] = 1; \tag{55}$$

$$\pi^j[1] + \pi^j[1] = 1; \tag{56}$$

$$bn\left(1 - \pi^i[0]\right) = hW + \frac{I}{s}. \tag{57}$$

O número de equações é, portanto, insuficiente para determinar as seis variáveis do problema, $\pi^i[0]$, $\pi^i[1]$, $\pi^i[2]$, $\pi^j[1]$, $\pi^j[2]$ e W. Observe que para novo elemento que for incorporado aos conjuntos oferta, temos duas novas variáveis $\left(\pi^i[v], \pi^j[v]\right)$ e apenas mais uma equação (uma nova restrição de exequibilidade).

A aplicação do formalismo do equilíbrio estatístico permite contornar essa indeterminação. De fato, ao substituirmos os diversos $\pi^i[v]$ e $\pi^j[v]$ pelas expressões (27) e (28), obtidas a partir da maximização de entropia, o sistema passa a compreender, no exemplo, apenas três variáveis endógenas: os dois preços entrópicos $(q[1], q[2])$ e massa salarial W. Isso permite, portanto, tornar endógenos os salários (ou as margens) por critérios puramente probabilísticos, como veremos a seguir.

5. O Equilíbrio Estatístico Macroeconômico

Considere o modelo completo, cujas equações reduzidas reproduzimos para facilidade do leitor:

$$nw[v]\frac{e^{w[v]q[v]}}{Z^i[q]} = hW\frac{e^{-Wq[v]}}{Z^j[q]}, \qquad v = 1, ...\bar{v}; \tag{58}$$

$$bn\left(1 - \frac{1}{Z^i[q]}\right) = hW + \frac{I}{s}. \tag{59}$$

Normalmente, um sistema desse tipo não possui solução analítica, pois envolve somatórios de funções transcendentais. Resta, então, adotar "força bruta" computacional, para usar uma expressão de Foley. Suponha, então, que o conjunto oferta dos trabalhadores é formado por apenas quatro elementos, o vetor nulo e os vetores $\left(x_1^i[v], x_2^i[v]\right) = (-1, w[v])$, $v = 1, ...3$, e admita os seguintes valores: $\{w[1], w[2], w[3]\} = \{10, 12, 14\}$.[16] Consequentemente, o conjunto oferta dos capitalistas é composto de três elementos $\left(x_1^j[v], x_2^j[v]\right) = (W/w[v], -W)$, $v = 1, ...3$. Por último, fixamos os seguintes valores para a produtividade do trabalho, a propensão a poupar dos capitalistas, o número de empresas e o de trabalhadores:$\{b, s, h, n\} = \{50, 0.4, 100, 1000\}$.

As simulações apresentadas nos gráficos abaixo mostram as distribuições de trabalhadores (em cinza) e firmas (em preto) correspondentes a diversos níveis de investimento. Na legenda informamos, além da massa salarial, o salário médio dos trabalhadores empregados e o markup médio calculados segundo as seguintes fórmulas:

$$w = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \frac{e^{w[v]q[v]}}{Z^i[q] - 1} w[v]; \tag{60}$$

$$m = \frac{bn\left(1 - \frac{1}{Z^i[q]}\right)}{hW} - 1. \tag{61}$$

O markup médio é simplesmente o produto total dividido pela massa salarial menos um. Evidentemente, ele é uma média ponderada dos markups dos vários grupos de firmas, $m[v] = (b/w[v]) - 1$. Assim, para a simulação, temos: $m[1] = 4$, $m[2] = 3,17$ e $m[3] = 2,57$. Observe que, tal como ocorre no modelo tradicional, a participação dos lucros no produto depende positivamente do markup médio, pois de (61) e da igualdade entre produto, $bn\left(1 - \pi^i[0]\right)$, e renda, $hW + L$, obtemos

$$\frac{L}{bn\left(1 - \frac{1}{Z^i[q]}\right)} = \frac{m}{1+m}. \tag{62}$$

Na Figura 3, observamos que com um investimento de 10 mil unidades de produto, 34,4% dos trabalhadores estão desempregados; os demais vendem uma unidade de trabalho pelos salários de 10 (23,8%), 12 (21,8%) e 14 (20%). O salário médio dos trabalhadores empregados é 11,88. Em relação às firmas, constata-se que 30,6% delas pagam salários de 10; 33,6% de 12 e 35,9% de 14. Como, por construção, as firmas pagam a mesma massa salarial (77.9 para esse nível de investimento), as do primeiro grupo empregam mais trabalhadores do que as demais. Ou seja, neste formalismo, a economia é composta de empresas de diferentes tamanhos (medidos pelo número de empregados ou volume de produção). Por último, o markup médio para esse nível de investimento é de 3,21.

O segundo gráfico mostra os mesmos dados para um nível de investimento de 12 mil. Essa elevação do dispêndio autônomo diminui o desemprego (21%) e aumenta

[16] As simulações foram realizadas no *Mathematica* 6.0. Para resolver o sistema, utilizamos a função Findroot. Foram realizadas diversas simulações, com diferentes valores para os parâmetros, as quais apresentaram resultados semelhantes.

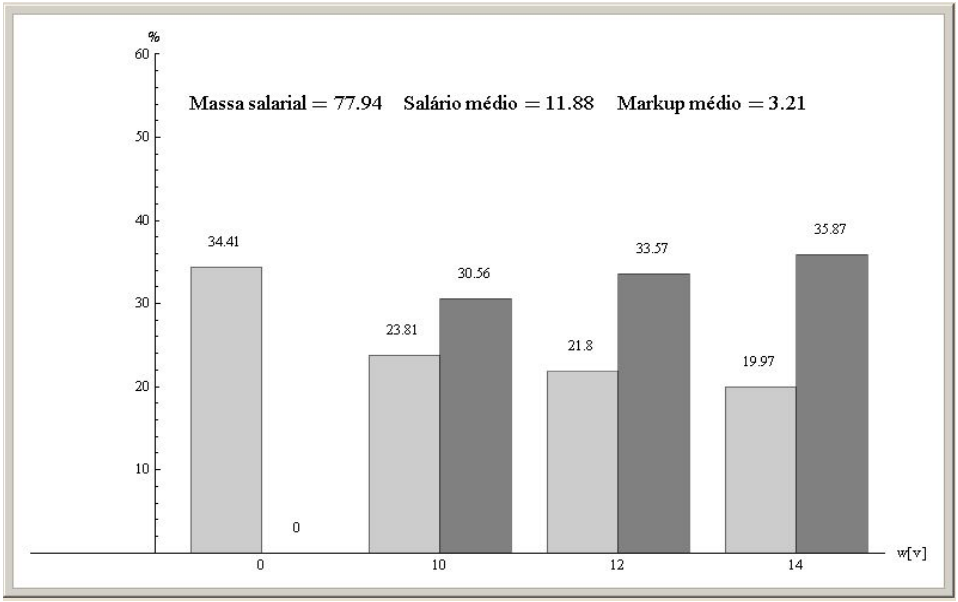

Fig. 3. Distribuições π com $I = 10$ mil

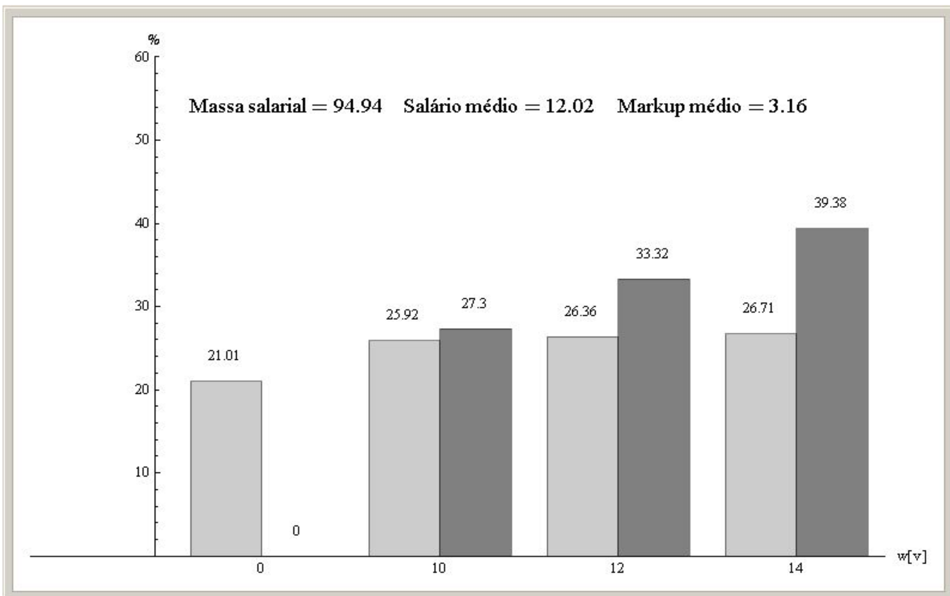

Fig. 4. Distribuições π com $I = 12$ mil

o salário médio (12) e os percentuais de trabalhadores que ganham salários de 10, 12, e 14 . A massa salarial passa a ser de noventa e cinco unidades de produto. Os percentuais de firmas que pagam salários de 10 e 12 reduzem-se e, portanto, aumenta o percentual das que pagam 14. Consequentemente, o markup médio cai para 3,16. Em suma, embora o aumento do investimento eleve a taxa de lucro, ele reduz a participação dos ganhos dos capitalistas na renda.

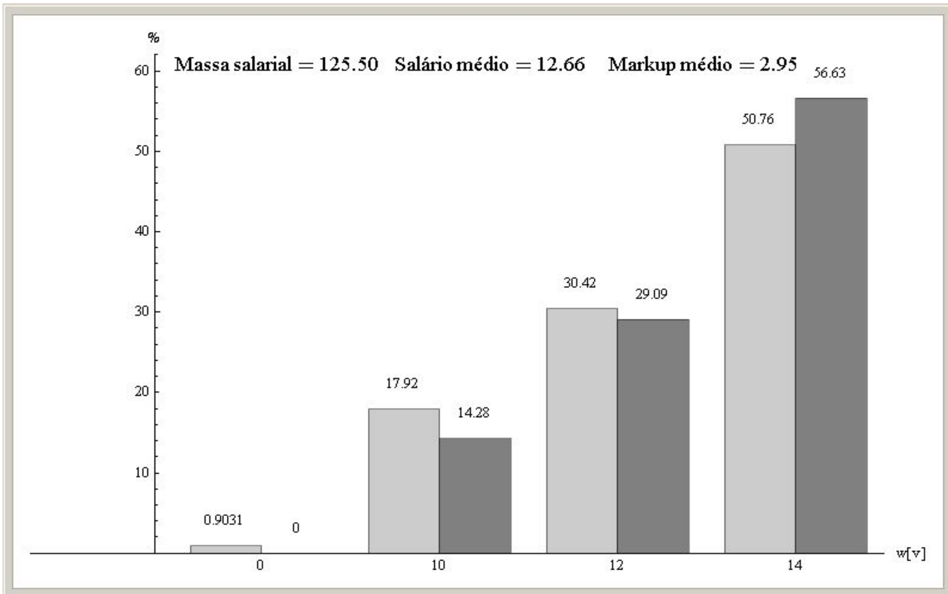

Fig. 5. Distribuições π com $I = 14,8$ mil

Por último, no terceiro gráfico, o investimento é de 14,8 mil unidades de produto. O desemprego cai para menos de 1%, o salário médio aumenta para 12,7 e a massa salarial para 125,5. Os percentuais de trabalhadores que ganham 10 e 12 reduzem-se e mais de 50% da mão de obra aufere o salário máximo de 14. O mesmo ocorre com as firmas: caem os percentuais das que pagam salários de 10 e 12 e mais de metade delas paga salário máximo de 14, o que reduz o markup médio para 2,95.

O modelo preserva, portanto, o principal resultado tradicional: a elevação do investimento diminui a taxa de desemprego. No entanto, ao contrário do que ocorre no modelo kaleckiano padrão, o aumento da demanda agregada eleva o salário médio da economia. Esse resultado pode ser interpretado como um argumento puramente probabilístico a favor de markup médio anticíclico. Em resumo, salários reais e nominais médios e lucros são pró-cíclicos, embora a participação dos ganhos capitalista na renda decline com o aumento do investimento.

6. Conclusão

Os resultados do modelo exposto neste artigo devem ser interpretados de um ponto de vista metodológico. Não se trata de propor substituição da abordagem tradicional kaleckiana pelo formalismo do equilíbrio estatístico. O que esse formalismo nos permite é fundamentar probabilisticamente a adoção de uma hipótese de markup anticíclico. A macroeconomia tem, evidentemente, os seus propósitos específicos, entre os quais se destaca o de prover uma representação sintética do *modus operandi* global de uma economia. Assim, para esses propósitos, o presente modelo justifica a adoção de uma equação simples de markup do tipo $m = m\,[I]$, $m' < 0$, que resume o resultado do equilíbrio estatístico no concernente ao valor médio da distribuição. No entanto, se existirem razões teóricas ou empíricas que indiquem um outro comportamento do markup no ciclo, isso não invalida necessariamente o formalismo proposto. Nesse caso, deveríamos incorporar essas novas informações na forma de restrições adicionais ou utilizar outros formalismos – como, por exemplo, a entropia cruzada.

A abordagem apresentada neste artigo justifica, igualmente, a interpretação de algumas variáveis do modelo macroeconômico kaleckiano básico (salário real, tamanho da empresa, etc.) como médias de uma distribuição canônica de Gibbs. Por último, cabe ressaltar que o equilíbrio estatístico permite descartar a hipótese, sempre incômoda, de exogeneidade salário nominal típica dos modelos macro de inspiração keynesiana/kaleckiana. Com efeito, o que é dado neste modelo é todo o conjunto oferta de trabalhadores e não um único salário nominal.

Referências bibliográficas

Aoki, M. (1996). *New Approaches to Macroeconomic Modeling: Evolutionary Stochastic Dynamics, Multiple Equilibria and Externalities as Field Effects.* Cambridge University Press, New York.

Farjoun, E. & Machover, M. (1983). *Laws of Chaos: A Probabilistic Approach to Political Economy.* Verso, London.

Foley, D. (1994). A statistical equilibrium theory of markets. *Journal of Economic Theory*, 62:321–345.

Foley, D. (1996). Statistical equilibrium in a simple labor market. *Metroeconomica*, 47(2):125–147.

Foley, D. (2002). Maximum entropy exchange equilibrium. `http://cepa.newschool.edu/\symbol{126}foleyd/maxentexeq.pdf`. Acessado em 5 de agosto de 2011.

Foley, D. (2010). Lectures on the foundations of applied statistical inference. `http://homepage.newschool.edu/\symbol{126}foleyd/FoleyStatLec13Rev.pdf`. Acessado em 5 de agosto de 2011.

Kalecki, M. (1976). Teoria da dinâmica econômica – Ensaio sobre as mudanças cíclicas e a longo prazo da economia capitalista. In Keynes, Kalecki, Sraffa, & Robinson, editors, *Os Pensadores.* Abril Cultural, São Paulo. v. XLVII.

Kapur, J. N. & Kesavan, H. K. (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications.* Academic Press, Inc., Boston.

Prado, E. F. S. (1999). Equilíbrio e entropia – Crítica da teoria neoclássica. *Econômica*, 1(2):8–34.

Ragab, A. (2008). An agent-based model of statistical equilibrium in the labor market. `http://www.peri.umass.edu/fileadmin/pdf/UM-NS\_Workshop/NewSchool2008/Ragab.PDF`. Acessado em 5 de agosto de 2011.

Salinas, S. R. A. (1997). *Introdução À Física Estatística*. Edusp, São Paulo.

Taylor, L. (1991). *Income, Distribution, Inflation and Growth*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.