anpec

associação nacional de
centros de pós graduação
em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2021

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 22/10/2020 – QUINTA-FEIRA
HORÁRIO: 8h00m às 10h00m (horário de Brasília)

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2021
PROVA DE MATEMÁTICA
2º Dia: 22/10 - QUINTA-FEIRA (Manhã)
HORÁRIO: 8h00m às 10h00m

INSTRUÇÕES

1. Esta **PROVA** é constituída de **quinze** questões objetivas.
2. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que *n* é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
3. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outras pessoas.
4. A duração da prova é de **duas horas**.
5. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora, qualquer material de consulta ou equipamentos eletrônicos além do utilizado para realização das provas.
6. Durante a realização das provas somente será permitida a saída do candidato após a autorização, por meio do *chat online*, do fiscal de prova.
7. O candidato só poderá desconectar-se, após o término da prova de cada disciplina.
8. Se a conexão cair, o candidato deve reiniciar a máquina. Caso a conexão não volte após o reinício da máquina, o candidato deve rotear a internet/wi-Fi de alguma pessoa próxima ou entrar em contato com o suporte técnico, cujo contato está no Comprovante de Inscrição.
9. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a). A desobediência ao fiscal de prova também poderá implicar a anulação da prova do(a) candidato(a).

AGENDA

- 26/10/2020 – 14 horas – Divulgação dos gabaritos das provas objetivas, no endereço: **http://www.anpec.org.br.**
- 26/10 a 27/10/2020 – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 14h do dia 27/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- 16/11/2020 – 14 horas – Divulgação do resultado na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
-
- Nas questões de **1** a **15** (não numéricas), marque, de acordo com o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS**, marque **V**; itens **FALSOS**, marque **F**; ou deixe a resposta **EM BRANCO (SEM MARCAR)**.

- Caso a **resposta seja numérica**, marque os dígitos da **DEZENA** e da **UNIDADE**, ou deixe a resposta **EM BRANCO (SEM MARCAR)**. **Atenção:** o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO** (para números entre zero e nove, marque: 01, 02, 03, ..., 09).

QUESTÃO 01

Sejam A e B dois conjuntos não vazios, e considere duas funções: $f: A \to B$ e $g: B \to A$. Defina os conjuntos $C = \{ f(a) : a \in A\}$ e $D = \{b \in B: g(b) \in A\}$. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ A função $h: A \to C$ que satisfaz $h(a) = f(a)$ para todo $a \in A$ é uma sobrejeção.

① $D = B$ somente se g é injetora.

② Se f e g são bijeções, então a função $j: A \to B$ definida por $j(a) = f(g(f(a)))$ também é uma bijeção.

③ Se $g(f(a)) = a$ para todo $a \in A$, então f é injetora.

④ Se a função $k: C \times A \to B \times A$ definida por $k(b, a) = (f(g(b)), g(f(a)))$ satisfizer $k(b, a) = (b, a)$, então as funções f e g são ambas bijeções.

QUESTÃO 02

Considere os conjuntos $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ e $B = A \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$. Seja $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ Os subconjuntos A e B de $\mathbb{R}^3$ são exemplos de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

① Se os conjuntos $C, D \subseteq \mathbb{R}^3$ são definidos por $C = \{x - y \in \mathbb{R}^3: x \in A\}$ e $D = \{x - y \in \mathbb{R}^3: x \in B\}$, então C é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, mas D não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

② A função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$ não atinge um ponto de máximo em A, mas atinge um ponto de máximo em B.

③ Seja $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ um vetor satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, e tome a constante $\alpha = \min\left\{\frac{1}{3+3|z_1|}, \frac{1}{6+6|z_2|}, \frac{1}{2+2|z_3|}\right\}$. Então, para todo número real ε no intervalo aberto $(0, \alpha)$, o vetor $y + \varepsilon z$ pertence a B.

④ A projeção ortogonal do vetor y sobre o complemento ortogonal do subespaço vetorial gerado pelo vetor $(1,0,-1)$ é um elemento do conjunto B.

QUESTÃO 03

Seja V um espaço vetorial sobre os números reais que contém pelo menos um subespaço vetorial de dimensão 1. Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ Se $v \in V$ não é o vetor nulo, então o subespaço vetorial de V gerado pelo conjunto $\{w \in V : w \neq v\}$ é diferente de V, ou seja, ele é um subespaço próprio de V.

① Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, então tanto a união $W_1 \cup W_2$ quanto a interseção $W_1 \cap W_2$ são também subespaços vetoriais de V.

② O conjunto de todas as matrizes de números reais 2×2 invertíveis, acrescido da matriz nula, em que a soma de seus elementos e a multiplicação por escalares são feitas da forma padrão componente a componente, não é um exemplo de espaço vetorial V.

③ Se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, e $w \in V$ não pertence ao subespaço gerado pelos vetores em A, então $A \cup \{w\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores.

④ Considere $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. É dada uma forma bilinear que associa a cada par de vetores $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ o número real $\langle v, w \rangle$. Sabe-se que essa forma bilinear é um produto interno. Então a igualdade $\langle v_1 + v_2,\ w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle$ vale para quaisquer vetores $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

QUESTÃO 04

Considere as funções $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$ e $g(x) = \int_0^x e^{2t^2}\, dt$ definidas no intervalo $[0, +\infty)$.

Determine o valor $H = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^2(x)}{g(x)}$.

QUESTÃO 05

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ Se a sequência de números reais (x_n) satisfaz $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = 1$,

então $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$ ou $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -1$.

① $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^4}{2^n} = 0$.

② $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}} = 0$.

③ Dado um número real $0 < a < 1$, defina a sequência (x_n) por meio de $x_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k$. Então $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \sqrt{n} = +\infty$.

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\right]+2\sqrt{2}\,(n!+\sqrt{n!})}{n!(\,2+2\sqrt{2})} = \sqrt{2}$.

QUESTÃO 06

Considere a seguinte equação diferencial: $y^{iv} - y'' = x + 1$.

Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ A equação característica associada à equação diferencial ordinária tem 3 raízes.

① A solução particular da equação diferencial ordinária é um polinômio de grau 3.

② A soma dos coeficientes da solução particular da equação diferencial ordinária é estritamente positiva.

③ A solução particular da equação diferencial ordinária é $y_p = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$.

④ A solução particular da equação diferencial ordinária restrita aos números reais não negativos atinge seu valor máximo em $x = 0$.

QUESTÃO 07

Julgue como verdadeiras ou falsas as seguintes afirmativas:

⓪ A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}\right]}{n(n-1)}$ é convergente e seu valor é 0.

① Se $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função e $0 < a < 1$ é um número real dado de modo que para todo $x \geq 0$ temos $f(x) \leq a^x$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

② A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^2}$ converge.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n sen(n\pi) = 0$.

④ Se $a > 1$ é um número inteiro, então $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}\right) - \frac{1+a}{a^2} = \frac{1}{a^3-a^2}$.

QUESTÃO 08

Para um número natural $N \geq 1$ denotamos por $\mathbb{R}_{++}^N$ o conjunto dos vetores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ em $\mathbb{R}^N$ com $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_N > 0$. Uma função $f: \mathbb{R}_{++}^N \to \mathbb{R}$ é chamada de positivamente homogênea de grau p, sendo $p \geq 0$ um número inteiro, se para todo número real $\alpha > 0$ tivermos $f(\alpha x) = \alpha^p f(x)$. Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

Ⓞ No caso $N = 1$ a função definida por $f(x) = x|x|$ é um exemplo de função positivamente homogênea de grau 2.

① Se $g: \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então $f(x_1, x_2) = x_2 g\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ define uma função positivamente homogênea de grau 1 sobre $\mathbb{R}^2_{++}$.

② Se $g: \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função positivamente homogênea de grau 1, então a função $f: \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_2 g\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ é côncava.

③ Qualquer função $g: \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$ positivamente homogênea de grau p satisfaz $\lim_{x \to 0^+} g(x) > 0$.

④ Sejam $f: \mathbb{R}^N_{++} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^N_{++} \to \mathbb{R}$ funções positivamente homogêneas de grau p. Defina, sobre o mesmo domínio, a soma $f + g$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e o produto fg por $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Portanto, $f + g$ e fg são positivamente homogêneas de grau p.

QUESTÃO 09

Seja a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = e^{100x_1 - 5x_1^2 + 40x_2 - 5x_2^2 + 3}$. Se $D\big((x_1, x_2), (5,2)\big)$ denota a distância euclidiana do ponto (x_1, x_2) ao ponto $(5,2)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, considere o problema P: maximizar $f(x) = f(x_1, x_2)$ em $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sujeito à restrição $D\big((x_1, x_2), (5,2)\big) \leq \alpha$. Julgue as seguintes afirmativas:

Ⓞ Os pontos que satisfazem a restrição do problema P formam um conjunto convexo apenas quando $0 \leq \alpha \leq 1$.

① Se para os números reais β_1 e β_2 temos que para todos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ a desigualdade $f(x_1, x_2) \geq f(y_1, y_2)$ equivale a $-(x_1 - \beta_1)^2 - (x_2 - \beta_2)^2 \geq -(y_1 - \beta_1)^2 - (y_2 - \beta_2)^2$, então β_1 e β_2 são múltiplos de 5.

② Para todo $\alpha \geq 0$ o ponto que maximiza a função f de forma incondicional em $\mathbb{R}^2$ não satisfaz a restrição do problema.

③ Quando $\alpha = \sqrt{29}$, na solução x^* para o problema de maximização P o gradiente $\nabla f(x^*)$ é diferente de $(0,0)$.

④ A função g sobre $\mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1, x_2) = \ln f(x_1, x_2)$ é côncava.

QUESTÃO 10

Seja a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{x_1^2}{4} + 4\sqrt{5}\, x_1 + x_2$, em que $x = (x_1, x_2)$. Dados dois parâmetros positivos $p, m \in (0, +\infty)$, defina o conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, px_1 + x_2 = m\}$. Encontre o menor valor de m que faz com que, para qualquer parâmetro p satisfazendo $0 < p < 4\sqrt{5}$, a condição $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = p$ forneça a solução para o problema de maximizar $f(x)$ sujeito a $x \in A$.

QUESTÃO 11

Considere duas funções ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) que são duas vezes continuamente diferenciáveis e satisfazem, dada uma lista de parâmetros $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, a desigualdade $|f'(x) - f(x)|^{\alpha} + \beta|g''(x) + g(x)| \leq \gamma$. Julgue as afirmações abaixo de acordo com a sua veracidade:

⓪ Quando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 0$, as funções nulas $f(x) = g(x) = 0$ para todo x satisfazem a desigualdade do enunciado.

① Quando $\alpha = \beta = 2$ e $\gamma = 1$, não existe solução para a desigualdade do enunciado.

② Quando $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, dada uma constante $a \in \mathbb{R}$, as funções definidas por $f(x) = a\, e^x + \frac{sen(x)}{2}$ e $g(x) = 2^{\frac{3^x}{2} - 2x}$ para todo x satisfazem a desigualdade do enunciado.

③ Quando $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 0$, a solução da desigualdade tem a forma $f(x) = a\, e^x$ e $g(x) = b\ \mathrm{sen}(x) + c\cos(x)$ para todo x, para determinadas constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$.

④ Quando $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$ e o sinal de desigualdade presente no enunciado é substituído pelo sinal de igualdade, não existe função f que juntamente com outra função g satisfaça tal igualdade.

QUESTÃO 12

Um investimento inicial de valor $A > 0$ tem um retorno de 200% em cada período $t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, podendo ser totalmente reinvestido em cada período com aquele mesmo retorno. Porém, antes de o retorno incidir sobre o saldo em cada período $t \geq 1$, o investidor retira somente o valor de $2t$. Por exemplo, ao final do período inicial $t = 1$, o retorno incide sobre $A - 2$. Sabe-se que para $g > 1$ vale a fórmula $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{g^k} = \frac{n-(n+1)g+g^{n+1}}{g^n(g-1)^2}$. Denotando por S_t o saldo ao final do período t após a incidência do retorno, encontre $4L$, em que L é o menor valor de A que faz com que $S_t \geq 0$ para todo período t.

QUESTÃO 13

Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:

⓪ Se A ,B e C são matrizes $n \times n$, sendo A e C invertíveis, e $0_{n\times n}$ representa a matriz $n \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero, então a matriz D, $2n \times 2n$, definida por $D = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times n} \\ B & C \end{bmatrix}$, é inversível.

① A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

② Considere uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que transforme o hiperplano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 1\}$ na reta $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 1\}$, isto é, a imagem de A por T é B. Então qualquer ponto no hiperplano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 0\}$ é levado a um ponto na reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$.

③ O subespaço em $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e que contém o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^3: x = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$ e o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ tem como complemento ortogonal o conjunto $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: -\frac{x_1}{2} + x_2 - \frac{5x_1}{2} = 0\right\} \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

④ A função $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2$, em que $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, satisfaz as propriedades de um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

QUESTÃO 14

Julgue a veracidade das seguintes afirmativas:

⓪ $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = +\infty$.

① Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função homogênea de grau 1 e $f(2) = 4$, então $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx = 1$.

② $\int_{-2}^{2}\left[\max\{2x, 2x^2\} - x(1+x) - \left|x - x^2\right|\right]dx = 0$.

③ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+e^x}dx = 1$.

④ Se definimos a função $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \int_0^x \left(\int_1^t \frac{1}{u^2}du\right)dt$, então $f'(x) = \ln x^2$.

QUESTÃO 15

Seja $V = \iint_D f(x,y)dxdy$, em que $f(x,y) = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Calcule $20V$.