



EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2020

PROVA DE MATEMÁTICA

**2º Dia: 26/09/2019 – QUINTA-FEIRA
HORÁRIO: 8h00m às 10h15m (horário de Brasília)**

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.
2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.
3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer da prova – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
6. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora ou qualquer material de consulta.
7. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
8. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- **30/09/2019 – 14 horas** – Divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, no endereço: <http://www.anpec.org.br>.
- **30/09 a 01/10/2019** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 14h do dia 01/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- **04/11/2019 – 14 horas** – Divulgação do **resultado** na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
- É **proibida** a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
- Nas questões de **1 a 15 (não numéricas)** marque, de acordo com a instrução de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**, itens **FALSOS** na coluna **F**, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Caso a **resposta seja numérica**, marque o dígito da **DEZENA** na coluna **D** e o dígito da **UNIDADE** na coluna **U**, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Atenção: o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.

QUESTÃO 01

Seja $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros positivos e denote por $A_n = \{1, \dots, n\}$ o conjunto dos n primeiros números inteiros positivos. Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ Se $n > m$, então $A_n \subseteq A_m$.
- Ⓐ O produto cartesiano $A_2 \times A_3$ é igual ao conjunto $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$.
- Ⓑ Seja $B_n = A_n^c \cap \mathbb{N}^*$, é verdade que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \cap A_{2n}$ tem n elementos.
- Ⓓ Existe um número inteiro positivo $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $m \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
- Ⓔ $(A_1 \cup B_3)^c \cap \mathbb{N}^* = \{2, 3\}$ e $(B_1 \cap A_3)^c \cap \mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}^* : n \geq 4\}$.

QUESTÃO 02

Considere a função $f: X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = \max\{x, -x\}$, $\forall x \in X$, em que $X = [-1, 0] \cup [1, 2]$ e $Y = [0, 2]$.

- Ⓒ f é uma função injetora.
- Ⓐ f é uma função sobrejetora.
- Ⓑ f admite função inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$.
- Ⓓ f^{-1} não é contínua em Y .
- Ⓔ $\int_0^2 f^{-1}(t) dt > \int_1^2 f(t) dt$.

QUESTÃO 03

Seja $a > 0$. Considere a seguinte função f de variável real com valores reais, definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2, & \text{se } x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(x-1)^2, & \text{se } 1 < x \leq 2; \\ a + \ln \sqrt{x-1}, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ Para todos os valores de $a > 0$, a função f é contínua em todo seu domínio.
- ① Para $a = 1/2$, a função f é diferenciável em todos os pontos do domínio.
- ② Se $a = 1/2$, $f'(2)$ existe e $f'(2) > 1$.
- ③ O ponto $x = 1$ é um ponto de inflexão. Ou seja, a função muda de concavidade em $x = 1$.
- ④ A função f atinge um máximo relativo em $x = 1$, pois $f'(1) = 0$.

QUESTÃO 04

Dado um número inteiro positivo $n \geq 1$, para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Duas de suas propriedades básicas são:

- (i) Para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- (ii) Para todo $k \in \{2, \dots, n-2\}$, $\binom{n}{k} \geq 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Definimos uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ a partir da soma dos inversos dos coeficientes binomiais, ou seja, para cada inteiro positivo $n \geq 1$, $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

QUESTÃO 05

Seja a função $z(x, y)$ definida implicitamente por

$$F(x, y, z) = x \ln z + z \ln y - z^2 - x \ln y + x = 0.$$

Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ O valor de F no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é zero.
- ① O valor $\frac{\partial F}{\partial z}$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é zero.
- ② z não pode ser definida implicitamente como função de (x, y) ao redor do ponto $(e^2 - e, e, e)$.
- ③ O vetor $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$ é $(\frac{1}{e}, \frac{2}{e} - 1)$.
- ④ Se v é o vetor normal à superfície definida por $F(x, y, z) = 0$ no ponto $(e^2 - e, e, e)$, então v é ortogonal ao vetor $(1, 1, 1)$.

QUESTÃO 06

Considere a transformação linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = (2x + y, x + 2y, x + y).$$

Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ f é uma transformação linear injetora.
- Ⓐ f é uma transformação linear sobrejetora.
- Ⓑ Os vetores $(2,1,1)$ e $(1,2,1)$ formam uma base para a imagem de f .
- Ⓓ A matriz associada à transformação linear f tem posto (rank) menor do que o posto da matriz jacobiana (denotada por $Jf(x, y)$) de f em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Ⓔ Considere a função $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$. A composta $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = h(f(x, y))$ satisfaz

$$Jg(x, y) = (4x + 2y \quad 2x + 4y \quad 2x + 2y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTÃO 07

Dado um número real $r \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{35} & 3/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

- Ⓒ A equação característica de A_r é $(1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 3(1 + r)) = 0$.
- Ⓐ Todos os autovalores associados à matriz A_r são números reais se, e somente se, $r = 3$.
- Ⓑ Os autovalores da matriz A_3 são $-4, 1$ e 3 .
- Ⓓ As colunas da matriz B são autovetores da matriz A_3 .
- Ⓔ O produto das matrizes $B^t A_3 B$ é igual à matriz $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

QUESTÃO 08

Julgue a veracidade das seguintes afirmações:

- Ⓒ Dada uma constante $k > 1$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{ka} \frac{1}{x} dx = 0$.
- Ⓐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (x^{\frac{1}{n}} - x^n) dx = 1$.
- Ⓑ $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx = 1 + e^\pi$.
- Ⓓ $\int_{-1}^1 \frac{x^{2020} (\cos(x))^{21} \sin(x)}{(x^2+1)^{2020}} |x| dx = 0$.
- Ⓔ $\ln(2) > 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

QUESTÃO 09

Julgue a veracidade das seguintes afirmações:

- Ⓒ A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é absolutamente convergente.
- Ⓐ Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente.
- Ⓑ A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{e^n}$ é convergente.
- Ⓓ A integral $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2(x) dx$ é convergente e seu valor é menor ou igual a 1.
- Ⓔ A integral $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+4} dx$ é convergente.

QUESTÃO 10

Classifique as afirmações abaixo segundo a sua veracidade:

- ⊙ A função $x(t) = e^t + 1$ é uma solução para a equação diferencial $x'(t) = x(t) + t$ em \mathbb{R} .
- ① Sabendo que $x_0 = 4$, temos que $x_t = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3$ é solução da equação em diferenças $3x_{t+1} = 2x_t + 3$.
- ② Considere funções de demanda e oferta de um determinado bem dadas, respectivamente, por $d(p) = a_0 - b_0p$ e $s(p) = a_1 + b_1p$, em que a_0, b_0, a_1, b_1 são constantes positivas e $a_0 > a_1$. Supondo que o preço $p = p(t)$ varie com o tempo de modo que $p'(t) = \lambda(d(p) - s(p))$, com $\lambda > 0$, tem-se que existe uma constante real C tal que $p(t) = Ce^{-\lambda(a_0 - a_1)t} + \frac{a_0 - a_1}{b_0 + b_1}$.
- Em particular, quando $t \rightarrow \infty$, $p(t)$ converge para o preço de equilíbrio $p^e = \frac{a_0 - a_1}{b_0 + b_1}$.
- ③ As funções $x_1(t) = \sin(t)$ e $x_2(t) = \cos(t)$ são as únicas soluções para a equação diferencial $x''(t) + x(t) = 0$.
- ④ Se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem $a^2 = 4b$, então a solução geral para a equação $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$ é $x(t) = (A + Bt)e^{-\left(\frac{a}{2}\right)t}$, em que $A, B \in \mathbb{R}$ são constantes.

QUESTÃO 11

Calcule o valor da integral $\int_0^3 \left(\int_{\frac{4x}{3}}^{\sqrt{25-x^2}} 6x \, dy \right) dx$.

QUESTÃO 12

Julgue a veracidade das afirmações abaixo;

- ⊙ Considere a função $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}+1} + \frac{y}{x}$, em que $x > 0$ e $y > 0$. Existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que $\langle (a, b), \nabla f(a, b) \rangle > 0$.
- ① Dada a função $f(x, y) = xe^{\frac{x}{y}}$, todo plano tangente ao gráfico de f contém a origem.
- ② Dada a função $f(x, y) = \frac{2y \ln(1+x)}{y^2 + \ln^2(1+x)}$,
a curva de nível $C(1) = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = 1\}$ coincide com o gráfico da função $h(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.
- ③ Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que o gradiente $\nabla f(x)$ é não nulo, o vetor $\nabla f(x)$ indica a direção de maior crescimento da função f a partir do ponto x .
- ④ Considere a curva derivável $\gamma: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $f(\gamma(t)) = c \in \mathbb{R}$, para todo $t \in (a, b)$. Então os vetores $\nabla f(\gamma(t))$ e $(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ são ortogonais para todo $t \in (a, b)$.

QUESTÃO 13

Sejam $f(x) = (4x - 1)e^{-2x}$ e $g(x) = (4x + 1)e^{-2x}$. Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ As funções f e g atingem seus pontos de máximo no intervalo $[2, \infty]$.
- Ⓐ Sejam x_0 e y_0 os pontos de máximo das funções f e g , respectivamente. Então $f(x_0) > g(y_0)$.
- Ⓑ $f(x) < 1$, para todo x real.
- Ⓓ $g(x) < 1$, para todo x real.
- Ⓔ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

QUESTÃO 14

Avalie as afirmações abaixo quanto a sua veracidade:

Ⓒ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty.$

Ⓐ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} e^{-x} = 1.$

Ⓑ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 1.$

Ⓓ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = -\infty.$

Ⓔ O limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x}$ não existe.

QUESTÃO 15

Suponha que queremos otimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeito à seguinte restrição:

$x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Sejam M e m os valores máximo e mínimo de f na restrição.

Calcule $M^2 + m^2$.

LOCAL DO EXAME:

DATA/HORÁRIO DO EXAME:

INSCRIÇÃO:

NOME:

INSTRUÇÕES PARA PREENCHIMENTO:

- USE SOMENTE CANETA ESFEROGRÁFICA PRETA PARA MARCAR SUA RESPOSTA.
- LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES NO CADERNO DE PROVA.
- PREENCHA OS ALVÉOLOS CORRETAMENTE CONFORME EXEMPLO INDICADO A SEGUIR:



ASSINATURA:

RG / ÓRGÃO:

PROVA

1 2 3 4 5 6

4 - MATEMÁTICA

LEGENDA

V - Verdadeiro D - Dezena
F - Falso U - Unidade

ORIENTAÇÕES:

- Questões do tipo V / F : assinale V, se verdadeiro; F, se falso; ou deixe em branco (sem marcas).
- Questões numéricas : marque o algarismo da dezena na coluna (D) - mesmo que seja 0 (zero), e o das unidades na coluna (U). Você pode também deixar a questão em branco, sem resposta.

CUIDADO:

O candidato que deixar toda a prova sem resposta (em branco) será desclassificado.

- 01 -		- 02 -		- 03 -		- 04 -			- 05 -	
V	F	V	F	V	F	D	U	V	F	
0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
						5- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
						6- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
						7- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
						8- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>			
						9- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>			

- 06 -		- 07 -		- 08 -		- 09 -		- 10 -	
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>

- 11 -		- 12 -		- 13 -		- 14 -		- 15 -	
D	U	V	F	V	F	V	F	D	U
0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	0- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	1- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	2- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	3- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>	4- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>							5- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>							6- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>							7- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>							8- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>							9- <input type="radio"/>	<input type="radio"/>

