



EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2015

PROVA DE MATEMÁTICA

**2º Dia: 25/09/2013 – QUINTA-FEIRA
HORÁRIO: 8h00m às 10h15m (horário de Brasília)**

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.
2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.
3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que n é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer da prova – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
6. Durante a realização das provas **não** é permitida a utilização de calculadora ou qualquer material de consulta.
7. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
8. Só será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **somente a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- **29/09/2014 – 10 horas** – Divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, no endereço: <http://www.anpec.org.br>
- **29/09 a 30/09/2014** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos até às 12h do dia 30/09 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no Manual do Candidato.
- **03/11/2014 – 14 horas** – Divulgação do **resultado** na Internet, no *site* acima citado.

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
- É **proibida** a reprodução total ou parcial deste material, por qualquer meio ou processo, sem autorização expressa da ANPEC.
- Nas questões de **1 a 15 (não numéricas)** marque, de acordo com a instrução de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**; itens **FALSOS** na coluna **F**, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Caso a **resposta seja numérica**, marque o dígito **DECIMAL** na coluna D e o dígito da **UNIDADE** na coluna U, ou deixe a resposta **EM BRANCO**.
- Atenção: o algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.

QUESTÃO 01

Considere os seguintes conjuntos: $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid xy \geq 150\}$ e $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 2x + 3y \leq g\}$, em que $g \in \mathbb{R}_+$. Analisar a veracidade das seguintes afirmações:

- Ⓒ Se $g < 60$, então $U \cap G = \{\}$;
- ① Se $g > 60$, então $U \cup G = \mathbb{R}_+^2$;
- ② Quando $g = 100$, o maior valor da abscissa x , em $U \cap G$, é 45;
- ③ Se $g = 60$, o conjunto $U \cap G$ é unitário;
- ④ Existe um valor de $g \in \mathbb{R}_+$, para o qual $G \subseteq U$.

QUESTÃO 02

Analisar as seguintes afirmações:

- Ⓒ A função que a cada candidato da prova da ANPEC associa a nota que obteve é uma função sobrejetora;
- ① A função $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ é uma bijeção de \mathbb{R} , no intervalo $(-1, 1)$;
- ② Para que uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} seja sobrejetora, as retas horizontais devem interceptar o gráfico dela em no máximo um ponto;
- ③ A soma de funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , ambas injetoras, é uma função injetora;
- ④ Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, se $g \circ f$ é bijetora, então f é injetora e g é sobrejetora.

QUESTÃO 03

Considere a seguinte função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 2$. Então podemos afirmar:

- Ⓒ A função possui três extremos relativos;
- ① A função possui somente um ponto de inflexão;
- ② O valor mínimo absoluto da função é -29;
- ③ O valor máximo absoluto da função é 3;
- ④ No intervalo $[2, 4]$ a função é côncava.

QUESTÃO 04

Uma matriz de Markov é uma matriz quadrada, que em cada entrada tem um número não negativo e a soma das entradas de qualquer coluna é igual a 1. A ordem de uma matriz de Markov é o número de linhas (ou colunas) dela. Afirmamos:

- Ⓒ A soma de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;
- ① O produto de duas matrizes de Markov da mesma ordem é uma matriz de Markov;
- ② A inversa de uma matriz de Markov (quando ela exista) é também uma matriz de Markov;
- ③ Se $M \in R^{n \times n}$ é uma matriz de Markov e $v \in R^{n \times 1}$ é um vetor de componentes não negativos que somam 1, então $Mv \in R^{n \times 1}$ também é um vetor de componentes não negativos que somam 1;
- ④ Se $\alpha \in [0,1]$ e $M, N \in R^{n \times n}$ são matrizes de Markov, então $\alpha M + (1 - \alpha)N$ também é uma matriz de Markov.

QUESTÃO 05

A equação $x^2 - xy^3 + y^5 = 17$ define y como função de x ($y = y(x)$), numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (5, 2)$. Ao fazermos a aproximação linear de $y(x)$ em torno desse ponto teremos $y(x) \approx mx + n$. Calcular $10m + 2n$.

QUESTÃO 06

Considere o seguinte problema de otimização com restrições : a função objetivo $f: R_+^2 \rightarrow R$ é contínua e o conjunto de restrições é um conjunto convexo C , contido no domínio da função f . Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ Se C for um conjunto ilimitado, então o problema de otimização restrita nunca tem solução;
- ① Se o gradiente da função objetivo for constante em todo seu domínio, então se houver uma solução ela tem que estar na fronteira de C ;
- ② Se a função objetivo já tiver um ótimo (ponto de máximo ou mínimo), então ele será a solução do problema com restrições;
- ③ Se o conjunto C não for compacto, então o problema de otimização restrita nunca terá uma solução;
- ④ Seja C o conjunto $C = \{(x, y) \in R_+^2 : ax + by \leq c\}$, com a, b e c não negativos. Se $c > 0$ e pelo menos uma das outras constantes for zero, então o problema de otimização nunca terá uma solução.

QUESTÃO 07

Julgue as seguintes afirmativas:

- ⊙ A reta L , cuja equação vetorial é $(x, y, z) = (3 + r, -1 + 2r, 3r), r \in \mathbb{R}$, não passa pelo ponto $(3, -1, 0)$;
- ① As equações $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ definem uma reta M , que tem como vetor de direção $(1, 2, 3)$.
- ② As retas L e M dos itens anteriores são paralelas.
- ③ Uma reta L , com vetor de direção v , é paralela ao plano P , com vetor normal n , se, e somente se, o produto vetorial de v e n é zero.
- ④ Uma reta L , com vetor de direção v , é perpendicular ao plano P , com vetor normal n , se, e somente se, o produto interno de v e n é zero.

QUESTÃO 08

Julgue as seguintes afirmativas:

- ⊙ Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$. Então a função definida por $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$ é uma função decrescente;
- ① A função F do item anterior é côncava no intervalo $(0, +\infty)$;
- ② Seja $h(x) = f(x, g(x))$, com f e g de classe \mathcal{C}^2 (isto é, f e g duas vezes diferenciáveis, com derivadas segunda contínuas). A segunda derivada de h é dada pela fórmula $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$;
- ③ Defina $r(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)}$. A derivada da função r é dada pela fórmula $r^2 + r \frac{f'''(x)}{f''(x)}$;
- ④ Se no item anterior f for estritamente côncava e estritamente crescente, então, supondo que $f'''(x) < 0$, podemos afirmar que r é estritamente crescente.

QUESTÃO 09

Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$, em que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}.$$

Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ A função f possui um único ponto de mínimo em D ;
- Ⓐ $(1, 1)$ é ponto de mínimo local de f em D ;
- Ⓑ O valor máximo absoluto da função em D é 9;
- Ⓓ O máximo é atingido na fronteira de D ;
- Ⓔ A função é côncava em D .

QUESTÃO 10

A demanda de mercado de um produto depende do preço corrente expresso na função $D_t = a - bp_t$, em que a e b são constantes positivas. Por motivos de estoque, a oferta de mercado do mesmo produto depende dos preços dos dois últimos períodos expressos em $S_t = c + dp_{t-1} + ep_{t-2}$, em que c, d e e são constantes positivas. Desta forma, ao igualarmos demanda e oferta teremos a dinâmica dos preços seguindo uma equação em diferenças finitas de ordem 2. Analisar o valor de verdade das seguintes afirmações:

- Ⓒ Se $a > c$, existe um preço estacionário de equilíbrio;
- ① Se $d < 2\sqrt{be}$, então a trajetória de preços de equilíbrio irá oscilar entorno do equilíbrio estacionário, quando este existir;
- ② Se $d < 2\sqrt{be}$ e $e > b$, então a trajetória de equilíbrio oscila entorno do equilíbrio estacionário se aproximando dele, quando este existir;
- ③ Se $d > 2\sqrt{be}$, as raízes da equação característica são números reais de sinais opostos;
- ④ Se $d = 2\sqrt{be}$ e $d < 2b$, então a trajetória de equilíbrio se aproxima monotonicamente (crescente ou decrescente) ao equilíbrio estacionário, quando ele existir.

QUESTÃO 11

Julgue as seguintes afirmativas:

- Ⓒ A integral $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ é uma integral imprópria divergente;
- ① A integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ é convergente;
- ② A integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx$ converge a 8;
- ③ A integral $\int_{-\infty}^2 \frac{8}{(4-x)^2} dx$ converge a 4;
- ④ A integral $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ é igual à integral $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n x dx$.

QUESTÃO 12

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas:

⊙ A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{n^2 - n + 1}$ é convergente;

① $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{1}{2}$;

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 8} = \frac{5}{6}$;

③ A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ é convergente;

④ A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$ é convergente.

QUESTÃO 13

Um fabricante de um produto lança anualmente 60.000 unidades dele. Todo ano, cada unidade em uso tem uma probabilidade de 15% de parar de funcionar, ou seja, no final de cada ano espera-se que de cada 100 unidades funcionando no início, apenas 85 continuem funcionando. Calcular o número de unidades que se espera que estejam em funcionamento no longo prazo, isto é, quando o número de anos tende a infinito. Dar como resposta a soma dos algarismos desse número.

QUESTÃO 14

Se f é uma função inversível e de classe C^1 (diferenciável, com derivada contínua), com inversa f^{-1} de classe C^1 , tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$, calcular o seguinte limite:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{f^{-1}(1+3h) - f^{-1}(1+h)}.$$

Dar como resposta $|10L|$.

QUESTÃO 15

Analise a veracidade das seguintes afirmações:

- © Se $\lambda_1 \neq 0$ é autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então A é invertível (possui inversa) e um autovalor da inversa é λ_1^{-1} ;
- ① Os autovetores da matriz $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ não são ortogonais;
- ② Uma matriz positiva é aquela cujas entradas são todas positivas. Portanto toda matriz positiva tem determinante não nulo;
- ③ Seja V um espaço vetorial de dimensão n , com n inteiro positivo. Então um conjunto de $n + 1$ vetores é mais do que suficiente para gerar todo o espaço V ;
- ④ O núcleo da transformação definida por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, então essa matriz tem somente um autovalor não nulo.

LEGENDA

V - Verdadeiro

F - Falso

D - Dezena

U - Unidade

ORIENTAÇÕES:

- 1) Questões do tipo V/F: assinale V, se verdadeiro; F, se falso; ou deixe em branco (sem marcas).
- 2) Questões numéricas: marque o algarismo da dezena (D) - mesmo que seja 0 (zero), e o das unidades na coluna (U). Você pode também deixar a questão em branco, sem resposta.

CUIDADO:

O candidato que deixar **toda a prova sem resposta** (em branco), será **desclassificado**.

INSTRUÇÕES PARA PREENCHIMENTO:

- USE SOMENTE CANETA ESFEROGRÁFICA PRETA PARA MARCAR SUA RESPOSTA.
- LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES NO CADERNO DE PROVA.
- PREENCHA OS ALVÉOLOS CORRETAMENTE CONFORME EXEMPLO INDICADO A SEGUIR:



4 - MATEMÁTICA

- 01 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 02 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 03 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 04 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 05 -	
D	U
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
5- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
6- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
7- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
8- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
9- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 06 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 07 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 08 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 09 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 10 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 11 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 12 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 13 -	
D	U
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
5- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
6- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
7- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
8- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
9- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 14 -	
D	U
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
5- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
6- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
7- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
8- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
9- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

- 15 -	
V	F
0- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
1- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
2- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
3- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	
4- <input type="radio"/> <input type="radio"/>	

