associação nacional de centros de pós graduação em economia

EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2008

PROVA DE MATEMÁTICA

2º Dia: 16/10/2007 - TERÇA FEIRA
HORÁRIO: 8h às 10h 15 (horário de Brasília)

anpec associação nacional de centros de pós graduação em economia	**EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2008**
	2º Dia: 16/10 (Terça-feira) – Manhã: 8h às 10h 15 - MATEMÁTICA

Instruções

1. Este **CADERNO** é constituído de **quinze** questões objetivas.
2. Caso o **CADERNO** esteja incompleto ou tenha qualquer defeito, o(a) candidato(a) deverá solicitar ao fiscal de sala mais próximo que o substitua.
3. Nas questões do tipo A, recomenda-se não marcar ao acaso: cada item cuja resposta divirja do gabarito oficial acarretará a perda de $\frac{1}{n}$ ponto, em que *n* é o número de itens da questão a que pertença o item, conforme consta no Manual do Candidato.
4. Durante as provas, o(a) candidato(a) não deverá levantar-se ou comunicar-se com outros(as) candidatos(as).
5. A duração da prova é de **duas horas e quinze minutos**, já incluído o tempo destinado à identificação – que será feita no decorrer das provas – e ao preenchimento da **FOLHA DE RESPOSTAS**.
6. Durante a realização das provas **não será** permitida a utilização de aparelhos eletrônicos (*pager*, bip, telefone celular, *palm*, *ipod*, *mp3 player*, relógio com calculadora, calculadoras, etc.) ou de material de consulta.
7. As Folhas de Resposta (de leitora ótica) são personalizadas e não serão substituídas. Essas folhas não podem ser rasuradas, nem dobradas, nem amassadas, nem corrigidas com *liquid paper*. Para marcar as respostas, use somente **caneta esferográfica de tinta preta**. Marcações com caneta hidrográfica, tinteiro, *roller* não permitem leitura ótica. **Preencha os círculos completamente e com nitidez**. A Coordenação do Exame não se responsabiliza por falha na leitura ótica de círculos preenchidos incorretamente.
8. A desobediência a qualquer uma das recomendações constantes nas presentes Instruções, na **FOLHA DE RASCUNHO** e na **FOLHA DE RESPOSTAS** poderá implicar a anulação das provas do(a) candidato(a).
9. Somente será permitida a saída de candidatos, levando o Caderno de Provas, **a partir de 1 hora e 15 minutos após o início da prova** e nenhuma folha pode ser destacada.

AGENDA

- **23/10/2007** – A partir das 12h, divulgação dos **gabaritos** das provas objetivas, nos endereços: **http://www.unb.br/face/eco/anpec2008** e **http://www.anpec.org.br**
- **23 a 24/10/2007** – Recursos identificados pelo autor serão aceitos a partir do dia 23 até às 12h do dia 24/10 do corrente ano. Não serão aceitos recursos fora do padrão apresentado no manual do candidato.
- **06/11/2007** – Entrega do **resultado** da parte objetiva do Exame aos Centros.
- **07/11/2007** – Divulgação do **resultado** pela Internet, nos *sites* acima citados.
- **13/11/2007 –** Início do envio da confirmação de aceite pelos candidatos – 8hs
- **14/11/2007 –** Término da primeira rodada (aceite condicional - 12 h e definitivo 18 h).
- **21/11/2007 –** Início da segunda rodada – 8h.
- **22/11/2007 –** Aceite condicional até as 18 h.
- **23/11/2007 –** Término da segunda rodada – 15 h.
- **26/11/2007 –** Início aceite (somente definitivo) terceira rodada – 8h
- **27/11/2007 –** Término da terceira rodada – 16 h

OBSERVAÇÕES:

- Em nenhuma hipótese a ANPEC informará resultado por telefone.
-

anpec — associação nacional de centros de pós graduação em economia	**EXAME NACIONAL DE SELEÇÃO 2008**
	2º Dia: 16/10 (Terça-feira) – Manhã: 8h às 10h 15 - MATEMÁTICA

- Nas questões de **1** a **11**, marque de acordo com o comando de cada uma delas: itens **VERDADEIROS** na coluna **V**; itens **FALSOS** na coluna **F**.
- Nas questões **12** a **15**, marque de acordo com o comando: o algarismo das **DEZENAS** na coluna **D**; o algarismo das **UNIDADES** na coluna **U**. O algarismo das **DEZENAS** deve ser obrigatoriamente marcado, mesmo que seja igual a **ZERO**.
- Use a **FOLHA DE RASCUNHO** para as devidas marcações e, posteriormente, a **FOLHA DE RESPOSTAS**.

QUESTÃO 01

Sejam $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ e $f : R \to R$ a função dada por $f(x) = x^3 + 3x - 4$. Julgue as afirmativas:

⓪ f não é uma função injetora.

① $ab = 1$, $b^3 - a^3 = 4$ e $f(a-b) \neq 0$.

② $f(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3(a-b) - 4 = 0$.

③ f é uma função injetora e $a - b = 1$.

④ f é convexa no intervalo $I = [-2,2]$.

QUESTÃO 02

Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 identificado com R^4 de sorte que cada matriz $(a_{ij}) \in V$ seja identificada com o ponto $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) \in R^4$.

Denote por $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4$ os autovalores do operador linear $T : V \to V$ dado por $T(A) = A^t$, em que A^t é a transposta da matriz A.

Sejam $E, B, C, D \in V$ tais que

$$M = \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

é a matriz, na base canônica de $V = R^4$, do operador linear $T : V \to V$. Julgue as afirmativas:

⓪ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ e ($TA = A \Leftrightarrow A$ é simétrica).

① $|A|^2 = |TA|^2 = \lambda^2 |A|^2$, sempre que se tenha $T(A) = \lambda A$.

② $\lambda_1 = -1$ e ($TA = \lambda_1 A \Leftrightarrow A$ é anti-simétrica).

③ $traço(M) = 0$ e $\det M = -1$.

④ $E + D$ é a matriz identidade de V.

QUESTÃO 03

Seja $f : X \to Y$ uma função qualquer. Para cada subconjunto $H \subset Y$, seja $f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\}$ a imagem inversa de *H* por *f*. Se $A, B \subset Y$ são subconjuntos quaisquer de *Y*, então julgue as afirmativas:

⓪ $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

① $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

② se $A \subset B$, então $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$.

③ $f^{-1}(A^c) \neq [f^{-1}(A)]^c$, em que o superescrito *c* denota o complementar do conjunto subjacente.

④ $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

QUESTÃO 04

Julgue as afirmativas:

⓪ Se uma matriz *2×2* possui determinante igual a um e traço igual a zero, então seus autovalores são números complexos conjugados.

① Se uma matriz é simétrica, então seus autovalores são números reais.

② Transformações lineares dadas por matrizes ortogonais preservam a norma de vetores, mas não necessariamente ângulos entre vetores.

③ Se uma matriz é idempotente, então ela é singular.

④ Se uma matriz é simétrica e não-singular, então autovetores associados a autovalores distintos são colineares.

QUESTÃO 05

Seja $f : R \to R$ uma função contínua e $F : R \to R$ dada por

$$F(x) = \int_0^x (1+t^2) f(t)dt.$$

Julgue as afirmativas:

⓪ F é derivável.

① F é uma primitiva da função f.

② Se $F(x) = (1-x^2)\cos x + 2x\sin x - 1$, então $f(x) = \cos x$.

③ Se $F(x) = x + x^3/3$, então f é uma função constante.

④ Se $F(x) = (1-x^2)\cos x + 2x\sin x - 1$, então $\int_0^{\pi/2} t^2 f(t)dt = \pi - 1$.

QUESTÃO 06

Seja $f: I \to R$ uma função definida em um intervalo aberto $I \subset R$. Sejam $a, b \in I$ e (x_n) a seqüência definida por

$$x_n = (1-\lambda_n)a + \lambda_n b,$$

em que $\lambda_n = 1/n$. Julgue as afirmativas:

⓪ Se $f(b) < f(a)$, $f(x_n) \le (1-\lambda_n)f(a) + \lambda_n f(b) < (1-\lambda_n)f(a) + \lambda_n f(a) = f(a)$.

① Se $f(b) < f(a)$ e f é convexa, então $f(x_n) < f(a)$.

② Se f é contínua, todo mínimo local de f é um mínimo global.

③ Se f é convexa, todo mínimo local de f é um mínimo global.

④ A seqüência (x_n) não é convergente.

QUESTÃO 07

Sejam $f, g: R^2 \to R$ funções diferenciáveis definidas por $f(x,y) = 2x + y$ $g(x,y) = x^2 - 4x + y$. Sejam

$$U = \{(x,y) \in R^2 : g(x,y) \ge 0, x \ge 0, y \ge 0\},$$

$$V = \{(x,y) \in R^2 : g(x,y) \le 0, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

Julgue as afirmativas:

⓪ $U \cap V$ é parte do gráfico de uma parábola.

① $U \cap V$ é o gráfico de uma função convexa.

② A restrição de f ao conjunto V atinge um máximo em um ponto da fronteira da região V.

③ $\iint_V f = \int_0^4 \int_0^{4x-x^2} f(x,y)\,dydx.$

④ $\left(9 - \max_V f\right) \iint_V f(x,y)\,dxdy = 5.$

QUESTÃO 08

Seja $P(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}t + c_n$ o polinômio característico de uma matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ com entradas $a_{ij} \in R$. Julgue as afirmativas:

⓪ Se A é simétrica, então A é diagonalizável.

① Se A é invertível e $P(t) = tQ(t) + c_n$, então $Q(A) = (\det A)A^{-1}$.

② Se A é invertível, então A e A^{-1} possuem os mesmos autovalores.

③ $\det(-A) = (-1)^{n+1} \det A.$

④ Se A é anti-simétrica e n é ímpar, então $\det A \ne 0$.

QUESTÃO 09

Para cada subconjunto $A \subset R$ a função característica $\chi_A : R \to R$ é definida por $\chi_A(x) = 1,$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0,$ se $x \notin A.$ Sejam $f, g : R \to R$ funções definidas por

$$\begin{cases} f(x) = h(x)\chi_Q(x) \\ g(x) = h(x)\chi_{R-Q}(x), \end{cases}$$

em que $Q \subset R$ é o conjunto dos números racionais e $h : R \to R$ é a função definida por $h(x) = x^2.$
Julgue as afirmativas:

⓪ f não é diferenciável em $x = 0.$

① g não é contínua em $x = 0.$

② $f + g$ é diferenciável em $R.$

③ $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$ para todo x real

④ $\int_0^1 f + g = 1/3.$

QUESTÃO 10

Seja $\langle , \rangle$ o produto escalar usual de R^n, $f : R^n \to R$ uma função diferenciável e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle,$$

a derivada direcional em $a \in R^n$, segundo o vetor $v \in R^n$. Se $a, v \in R^n$ são tais que $|v| = n|\nabla f(a)| \neq 0,$ julgue as afirmativas:

⓪ Se $f(3a) = 3f(a)$, então f é homogênea de grau 3.

① Se f é homogênea de grau 2, então $\frac{\partial f}{\partial a}(a) = 2f(a).$

② $\frac{\partial f}{\partial v}(a) > n|\nabla f(a)|^2.$

③ Se $N = \nabla f(a)$, então $\frac{\partial f}{\partial v}(a) \leq n\frac{\partial f}{\partial N}(a).$

④ $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\right| = n|\nabla f(a)|^2 \Leftrightarrow$ existe $\lambda \in R$ tal que $\nabla f(a) = \lambda v.$

QUESTÃO 11

Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & se\ (x, y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & em\ caso\ contrário \end{cases}$$

Com relação à função acima, julgue as afirmativas:

⓪ $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

① Se $g(x,y)=\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}$, então *g(2,2) = 0*.

② $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$.

③ $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ é contínua na origem.

④ $\dfrac{\partial^2 f(x,x)}{\partial x \partial y}=0$ para *x>0*.

QUESTÃO 12

Considere a equação diferencial $y''(x)+y'(x)+2y(x)=0$ com condições iniciais $y(0)=1$ e $y'(0)=0$. Calcule $y'''(0)$.

QUESTÃO 13

Dada a função $f(x,y,z)=\min\left\{2x,\dfrac{y}{4},z\right\}$ definida para $x,y,z\geq 0$, considere o problema:

$$\begin{cases}\max & f(x,y,z)\\ s.a & 2x+y+5z\leq 210\end{cases}$$

Se (x^*,y^*,z^*) é a solução do problema, calcule $f(x^*,y^*,z^*)$.

QUESTÃO 14

Seja H uma matriz *4 × 4* idempotente, simétrica e não-singular. Seja $0_{4\times 5}$ a matriz nula de ordem *4 × 5* e $0_{5\times 4}=0'_{4\times 5}$ sua transposta. Seja ainda L uma matriz *5 × 5* ortogonal. Considere a matriz *9 × 9* dada por :

$$A=\begin{bmatrix} H & 0_{4\times 5}\\ 0_{5\times 4} & L\end{bmatrix}$$

Seja $D=\det(A'A)$ o determinante de *A'A*, em que *A'* é a transposta de *A*. Calcule $9D+3$.

QUESTÃO 15

Seja $r=1/2$, $I=(-1,1)$ e $f:I\to R$ a função definida por $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Sabendo-se que

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right),$$

calcule o valor de $\alpha=5\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$.