**Distribuição de renda em um modelo com sistema financeiro imperfeito**

Daniela P. R. de Alcântara (BACEN) José Maria F. J. da Silveira (IE-Unicamp) Wenersamy Ramos de Alcântara-(Ibmec; BACEN)

[pires.daniela@gmail.com](mailto:pires.daniela@gmail.com) [jmsilv@eco.unicamp.br](mailto:jmsilv@eco.unicamp.br) wenersamy@gmail.com

**Resumo:**

O sistema financeiro faz parte de um amplo conjunto institucional que forma a base sobre a qual ocorrem as transações em uma economia e as falhas do mercado financeiro limitam o acesso dos pobres – restrição ao crédito e investimento mínimo - e, em conseqüentemente, possuem efeitos negativos sobre o desenvolvimento e a produtividade econômica. Através da construção de modelo de equilíbrio parcial, o trabalho discute o impacto da desigualdade sobre o desenvolvimento do sistema financeiro. Realizou-se um exercício de simulação para relacionar três níveis de projetos disponíveis na economia” aos cinco níveis de desigualdade que de certa forma estilizam a situação de diferentes países. O modelo mostra que em situações de maior desigualdade a restrição ao investimento mínimo dificulta o acesso dos mais pobres ao mercado financeiro. A simulação também permite investigar a relação entre “spread” bancário e volume financiado para diferentes tipos de projeto e níveis de impaciência dos agentes.

**Palavras-chave**: Sistema Financeiro, Desigualdade e Crescimento Econômico.

**Abstract:**

The financial system is part of a broader institutional set-up that forms the basis on which the transactions occur in an economy and financial market failures limit the access of the poor – due to credit restriction and the need of minimum level to carry investment - and therefore, have negative effects on development and economic productivity. Through a partial equilibrium model, the paper discusses the impact of inequality on the development of the financial system. A simulation exercise is carried to correlated three level projects available to stylized economies and five levels of inequality, trying to figure what is happen in distinct countries of the world. The results show that for the higher levels of inequality the minimum level required to carry investment creates a barrier to the access to financial markets by the poorest part of the population. The simulation also allows us to establish a relation between spread and the amount financed to different types of projects, regarding impatience levels of the agents.

**Keywords:** Financial System, Inequality, Economic Growth.

Área ANPEC: Área 7: microeconomia, métodos quantitativos e finanças

JEL:D92

**Distribuição de renda em um modelo com sistema financeiro imperfeito**

1. **Introdução**

A relação entre pobreza e iniqüidade na distribuição de renda e o desenvolvimento do sistema financeiro é um tema relativamente pouco explorado, a despeito do número crescente de trabalhos dedicados a investigar como o arcabouço institucional e o ambiente sócio-econômico afetam o funcionamento do sistema financeiro, tal como em La Porta *et al* (1997, 1998, 2003) e Levine, Loayza e Beck (2000).

Ao serem excluídos do mercado financeiro, os pobres não tem acesso a serviços relevantes para consumo e geração de renda, em especial, crédito e seguros. A renda dos pobres é convertida essencialmente em consumo de subsistência, o que lhes impede a geração de poupança para investimentos mais produtivos. As falhas do mercado financeiro limitam o acesso dos pobres também possuem efeitos negativos sobre o desenvolvimento e a produtividade.[[1]](#footnote-2)

Propomos um modelo que descreve um canal para a influência no sentido inverso, ou seja, a desigualdade como obstáculo ao desenvolvimento do sistema financeiro. Argumentamos que há endogeneidade nessa relação: o desenvolvimento do sistema financeiro tanto afeta como é afetado pela renda e sua distribuição. O pressuposto básico do modelo é a existência de ganhos de escala na atividade bancária, como em Diamond e Dybvig (1983). Considera-se que o banco incorre em custos fixos para manter sua capacidade de análise de crédito e esta capacidade já é suficiente para atender qualquer número de clientes, não havendo necessidade de novos investimentos no horizonte de decisões analisado. Dessa maneira, o custo marginal da unidade monetária emprestada, seja a clientes antigos ou novos clientes, é apenas o seu custo de captação: a remuneração dos depósitos. Como resultado, a eficiência do sistema aumenta com o aumento das receitas advindas do volume de empréstimos multiplicado pelo “spread” entre captação e empréstimo.

As restrições de investimento mínimo e de crédito, contudo, impedem que uma parte da população com menos recursos tomem crédito para investir em projetos, limitando a capacidade do sistema financeiro de converter poupança em investimento, e conseqüentemente, limitando o crescimento da economia. O menor volume de recursos que circula no sistema financeiro reduz sua eficiência tanto mais quanto mais desigual for a sociedade, resultando em maiores “spreads” e menor produção da economia como um todo. No modelo assume-se que o principal canal através do qual a distribuição de renda afeta a eficiência do sistema financeiro é a escala, dada pelo volume de recursos transferidos entre poupadores e investidores. Como os bancos apresentam ganhos de escala, quanto maior o volume transacionado, menor pode ser a diferença entre a taxa cobrada pelos empréstimos e a taxa oferecida para depósito, ou seja, o *spread*, que será usado como medida da ineficiência do sistema financeiro. Adicionalmente, serão consideradas fricções que potencializam os efeitos da distribuição da riqueza, como restrições ao investimento mínimo e limitações à concessão de crédito.

Dos resultados do modelo, observou-se que este efeito compete com outro: quanto menor a desigualdade e a restrição ao investimento mínimo, menor a necessidade de empréstimos e de um sistema financeiro para reduzir os custos de coordenação, já que os agentes possuem dotação suficiente para investir no projeto por conta própria, se assim o decidirem. Quanto menor a desigualdade, mais importante este efeito, e para níveis muito baixos de desigualdade, ele domina o efeito dos ganhos de escala, levando a uma menor eficiência do sistema financeiro em termos de menores volumes e maiores “spreads”. O resultado final é que há uma distribuição de renda “ótima”, dada uma restrição ao investimento mínimo, para a qual a eficiência do sistema financeiro é máxima e o crescimento da economia através do investimento em ativos reais é o maior possível.

1. **Definição do modelo**

Inicialmente serão definidos os agentes econômicos, sua distribuição de riqueza e o parâmetro do modelo que está associado à desigualdade. Também serão descritos os projetos disponíveis na economia, sujeitos a restrições de investimento mínimo e, finalmente, será descrito o setor bancário, cujo lucro depende do volume transacionado e do *spread*. Nessa economia simplificada, há apenas dois preços: a taxa cobrada pelos bancos para empréstimos e a taxa que os bancos pagam pelos depósitos. Esses preços, e também a distribuição de riqueza, dadas as fricções modeladas, afetam a decisão de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos, que por sua vez afeta o volume que equilibra poupança e investimento, bem como o lucro dos bancos, de modo que as taxas de empréstimo e captação e a decisão poupança e investimento são definidos conjuntamente. Desta maneira, o problema será encontrar a combinação de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que maximiza a sua utilidade, sujeita às restrições de crédito e de nível mínimo de investimento, e escolher as taxas de captação e empréstimo que garantam que a poupança seja igual ao investimento e que o lucro dos bancos seja máximo.

Considere, portanto, uma população contínua de agentes econômicos indexados por  que devem decidir como consumir completamente sua riqueza ou dotação inicial  ao longo de dois períodos:  e . Assume-se que tais agentes sejam avessos ao risco e possuam preferências intertemporais que admitam representação por uma função utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern. Usaremos a função[[2]](#footnote-3):

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

em que  e  representam, respectivamente, o consumo em  e  do indivíduo , e  corresponde a uma taxa de desconto da utilidade do consumo futuro, o que influencia a preferência relativa na decisão entre consumir no presente ou consumir no futuro. Tradicionalmente assume-se que os agentes econômicos sejam impacientes e que, portanto, .

Assumimos que a distribuição de riqueza seja exponencial, de modo que a riqueza inicial será dada por:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

em que  é um fator de escala e  está relacionado com a desigualdade na distribuição de riqueza, já que quando  é muito pequeno  aproxima-se da distribuição uniforme e quando  cresce a diferença entre o mais pobre e o mais rico aumenta exponencialmente. Com um pequeno exercício de álgebra, é fácil mostrar que o coeficiente de Gini da distribuição de riqueza (2) é dado por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (() |

que é uma função estritamente crescente de *γ*.

Os agentes econômicos têm a opção de usar parte de sua riqueza não consumida em  para investir em um projeto disponível na economia. A riqueza gerada em  pelo projeto depende da riqueza investida pelo agente , , e do sucesso do projeto. O projeto será modelado como um experimento de Bernoulli, possuindo uma probabilidade  se ser bem sucedido, caso em que gera a riqueza , e uma probabilidade  de fracasso, situação em que gera uma riqueza , sendo que  é o retorno em caso de sucesso e  é o retorno ocorrendo fracasso. Ao estipularmos que , estamos assumindo que a responsabilidade sobre os investimentos é limitada ao capital investido.[[3]](#footnote-4) A variável aleatória correspondente ao retorno de cada projeto será denotada por .

Note que o retorno esperado e a variância do retorno são dados, respectivamente, por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

e

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Adicionalmente, assume-se que seja necessário um capital mínimo para que se possa fazer o investimento, denotado por , embora não haja limitação quanto ao total de recursos investidos por todos os agentes ou por um deles, individualmente, sendo necessário, portanto, que .

Para todos os efeitos, o sistema financeiro será modelado como um único banco, de modo que questões relacionadas à concorrência não serão analisadas. Assume-se que o banco tenha um custo fixo de monitoração em  denotado por , independente do volume de recursos transacionados, levando a ganhos de escala. Considera-se que o custo marginal do banco seja exclusivamente o custo de captação dos depósitos. Como todos os empréstimos devem ser pagos um período adiante e não há possibilidade de saques antes disso, não há depósitos compulsórios e a questão da gestão da liquidez e das corridas bancárias não serão analisadas. Cada agente pode depositar, em , um montante  no sistema financeiro, correspondente a uma poupança de parte dos seus recursos excedentes ao consumo, pelo que receberá em  o montante . Um agente também tem a possibilidade de tomar um empréstimo em *t=0* no valor  junto aos bancos, pelo qual terá que pagar  em , de modo que:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Aguion e Howitt (1998) sugerem uma limitação no crédito proporcional à riqueza inicial para incluir imperfeições de mercado no modelo. No modelo, como toda a riqueza está disponível no primeiro período e parte dela será usada para consumo e não para investimento, é razoável assumir que os bancos só aceitarão fornecer crédito sobre uma fração do investimento, caso contrário não haverá recursos para pagar o empréstimo. O crédito dependerá, portanto, das garantias e do risco do projeto, e não da riqueza do investidor. Agentes com menor riqueza inicial, contudo, continuarão privados de crédito porque a fração do investimento inicial que precisa ser financiada é muito grande. Assim, o montante máximo que poderá ser emprestado a um agente será:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

indicando que o sistema financeiro aceita financiar uma fração  de cada projeto. Um valor conservador para α é:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Essa definição garante que mesmo em caso de falha no projeto restariam garantias suficientes para pagar integralmente a dívida: o banco aceitará financiar o valor terminal do projeto no pior caso, ou seja, no caso de falha, descontado a valor presente pelo custo do empréstimo. Note que o pressuposto de responsabilidade limitada garante que . Adicionalmente, para que coexistam depósitos e investimentos na economia é necessário ter . Tal relação, por sua vez, garante que , logo, a utilização de garante que .

A primeira condição de equilíbrio de mercado no presente modelo é que os montantes depositados e emprestados sejam os mesmos:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Quando há uma única taxa para emprestar e tomar emprestado, a condição é suficiente para garantir o equilíbrio. No presente caso, contudo, podem existir diversos pares de valores para  e  que garantem que a quantidade ofertada de recursos seja igual à quantidade demandada, sendo necessária uma segunda condição. A riqueza produzida pelo sistema financeiro será dada pelo “spread” entre o retorno dos empréstimos e o custo dos depósitos multiplicado pelo montante total transacionado. Esta riqueza corresponde a um retorno  sobre , que os bancos tentarão maximizar:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Os bancos escolherão o par de taxas  e  que satisfaz e resulta no maior valor para . A segunda condição de equilíbrio é, portanto, que seja máximo. O consumo de cada agente em  e em  será dado por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

em que , e  serão escolhidos de modo a maximizar a utilidade esperada do agente.

Assume-se que os extremos  e  não ocorrem, em primeiro lugar, por não fazerem parte do domínio da função utilidade esperada (já que teríamos consumo zero no primeiro ou no segundo período). Em segundo lugar, o fato da utilidade esperada tender a  em qualquer um dos casos tem um significado econômico: o indivíduo tem necessidades mínimas em ambos os períodos e ter consumo nulo em qualquer um deles é inaceitável.

Cumpre observar que um agente maximizador de utilidade nunca escolherá  e  simultaneamente, já que o custo do empréstimo é maior que o rendimento do depósito. Também nunca ocorrerá o caso em que , pois isto implicaria em  (já que não há investimento em projeto) e conseqüentemente , cuja possibilidade já foi excluída. Dessa maneira, poderão ocorrer apenas os seguintes casos:

* Caso A:  e  (o agente investe a riqueza excedente ao consumo em uma carteira de depósito e investimento em um projeto);
* Caso B:  e  (o agente simplesmente faz depósito da riqueza excedente ao consumo);
* Caso C:  e  (o agente usa sua riqueza e possivelmente um empréstimo para investir em um projeto).

É possível reespecificar o problema de forma mais conveniente. De início, definiremos os recursos excedentes ao consumo no primeiro período como:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

também é possível definir a proporção de  investida no projeto:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

e a proporção de  investida em poupança ou tomada como empréstimo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

de modo que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Como não ocorre  e  simultaneamente, tem-se  caso o agente decida fazer o depósito e  caso o agente decida tomar um empréstimo. Usando , para cada valor de  existe um único valor de  possível dado por:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

de modo que, por simplicidade, será usado apenas  daqui por diante.

O consumo no segundo período definido em (11) pode, então, ser reescrito como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

em que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Finalmente, definindo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

e usando as definições de a , o problema de otimização de cada agente econômico pode ser especificado como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Adicionalmente, as relações e resultam em , o que permite reescrever a condição de equilíbrio de mercado em como:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

em que  e  são as soluções da otimização para cada a agente econômico . Da mesma maneira, é possível reescrever o retorno para os bancos em como:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Desta forma, a economia estará em equilíbrio e as taxas de captação e empréstimo bem definidas, quando: (i) a utilidade dos agentes, sujeita às restrições de investimento e tomada de empréstimo, for máxima, conforme ; (ii) a poupança for igual ao investimento, conforme e; (iii) o retorno para os bancos em for máximo.

Ao decidir o consumo no período inicial, o agente automaticamente decide o valor  dos recursos excedentes. Na próxima seção será analisada a alocação destes recursos, que corresponde à decisão de poupança e investimento, sujeita às restrições de riqueza, investimento mínimo e valor máximo do empréstimo que pode ser obtido através dos bancos, considerados o retorno dos depósitos, o custo dos empréstimos e o risco e retorno do investimento no projeto disponível na economia.

1. **A carteira ótima de investimento para um dado nível de recursos excedentes**

Antes de resolvermos a otimização , será útil analisarmos o comportamento do valor ótimo de , que define a alocação de recursos excedentes entre projeto, poupança e empréstimo, para um dado valor , de modo que seja possível pesquisar algumas condições de regularidade bem como particularidades do problema como definido neste modelo. Esta alocação ótima será representada por  e, como a utilidade do primeiro período só depende de , pode ser expressa como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Se  então , de modo que nenhum agente com  poderá investir no projeto. Neste ponto, cabe estabelecer algumas condições de regularidade para os retornos dos projetos. Como , há três intervalos abertos em que  pode estar. Estes intervalos são considerados abertos para evitar a igualdade e simplificar a manipulação algébrica. Se  estiver à direita de  ou à esquerda de , há dominância estocástica de primeira ordem do depósito ou do investimento no projeto, respectivamente, e a utilidade esperada no segundo período será claramente máxima quando , se , ou , se , de modo que um dos dois, depósito ou investimento, nunca seria feito: se a taxa de equilíbrio  for muito alta, nenhum projeto na economia será feito, mas se for muito baixa, nenhum depósito será feito e não existirá intermediação financeira.

Sobre *rb* dado que , ao excluirmos a possibilidade de que  também estamos admitindo que não ocorre . Adicionalmente,  também não pode ocorrer, pois isto implicaria na inviabilidade do financiamento dos projetos com dívida, já que a contração de dívida para investimento em projetos significaria simplesmente a redução de riqueza no segundo período. Como estamos admitindo que toda a dotação está disponível no primeiro período, neste caso também não haveria necessidade da intermediação financeira. A própria existência do sistema financeiro e a coexistência de depósitos e investimentos em projetos na economia, estes últimos possivelmente financiados com dívida, pressupõem que a remuneração dos depósitos e o custo das dívidas sejam tais que:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

para qualquer valor de .

A análise mais importante que pode ser tirada de , contudo, é que, a menos das restrições, a alocação ótima independe de , e este fato, essencial para a solução final do problema, pode ser estabelecido como:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

ou seja, a alocação ótima irrestrita no segundo período para , representada por , é igual à alocação ótima irrestrita no segundo período qualquer que seja o valor de , representada por .

Para achar tal alocação, independente de restrições, inicialmente é necessário estudar o comportamento da expressão  que se deseja maximizar em .  é definida e contínua entre:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

e

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

De  resulta que o limite inferior para  dado em é sempre menor que zero e, portanto, . Por outro lado, de  resulta que o limite superior para  dado em é sempre maior que , de modo que neste caso, . Como resultado, o domínio de  em função de  é:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Dada a condição de regularidade , a restrição (*ii*) do programa de otimização torna irrelevante o lado esquerdo de . Já o lado direito da condição de regularidade pode tornar irrelevante a restrição (*i*) em caso ocorra:



ou seja, se a restrição ao crédito for pouco rigorosa, ela torna-se irrelevante frente ao risco de perdas com o projeto. Dessa maneira, assumiremos que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

de modo que em conjunto com a restrição (*i*) em , garantem que seja obedecida. É importante ressaltar que a igualdade em corresponde à utilização de para a restrição de crédito, que já é conservadora. Agora se demonstra outra propriedade desejável de tal relação: sua utilização garante que  obedeça .

Para pesquisar o máximo de  em é necessário analisar suas derivadas onde estas estão definidas. A primeira derivada parcial em relação a  é:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

que não é definida em , já que  não é diferenciável neste ponto. Contudo, é possível encontrar os limites laterais da derivada:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |
| . | () |

Como  é contínua em  (ou seja, os seus limites laterais são iguais ao seu valor em ),  possui um canto em  após o qual a derivada varia bruscamente. Além disso, de  resulta que , e como , a variação brusca após o canto em  é negativa e a derivada diminui de valor.

A segunda derivada parcial em relação a  é:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

que também não está definida em .

Ressalta-se que , é negativa em todos os pontos em que é contínua e a primeira derivada é estritamente decrescente nos intervalos em que também é contínua, além de variar negativamente ao passar pelo seu ponto de descontinuidade em . Se e tiverem sinais opostos, ou se um deles tiver valor nulo, então  cresce (a taxas decrescentes) até  e decresce a partir daí, de modo que  terá um máximo global em .

Alternativamente, se e forem diferentes de zero e possuírem o mesmo sinal,  terá um máximo global quando for igual a zero, que ocorre em  dado por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

que é uma média ponderada pelas probabilidades  e  dos pontos de descontinuidade e , de modo que  seguramente pertence ao domínio de  se assumirmos que , pois se  ou  teríamos o mesmo problema de dominância estocástica de primeira ordem que foi evitado ao assumirmos que  e  são tais que . Nestas condições e dado , existe uma vizinhança ao redor de  em que é contínua, mudando de sinal nesta vizinhança: é positiva à esquerda de  e negativa à direita, já que é estritamente decrescente. Se e forem ambos negativos, então  ocorre à direita de  e, portanto, . Se e forem ambos positivos, então  ocorre à esquerda de  e, portanto, .

Adicionalmente, como  não pode ser solução para o problema , se , então a utilidade esperada para  estará num trecho decrescente (derivada negativa), e o máximo, considerando-se a restrição , ocorrerá para , ou seja, ninguém, independentemente da riqueza inicial, terá interesse em investir no projeto, logo, qualquer projeto viável na economia deverá ser tal que :

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

ou seja, um projeto só será viável se seu retorno esperado for maior que o retorno certo do depósito ou que o custo do empréstimo usado para financiá-lo. Este resultado era esperado já que a utilidade logarítmica é côncava e, portanto, apresenta aversão ao risco.

Em resumo, há três possibilidades para o comportamento de  dependendo dos valores de ,  e , que definem o risco e retorno do projeto, e das taxas de equilíbrio da economia,  e . A primeira possibilidade é que (40) e possuam sinais opostos ou uma delas possua valor nulo, caso em que o máximo global de  ocorre para . A segunda possibilidade é que as derivadas laterais sejam ambas negativas, implicando em . Finalmente, a terceira possibilidade é que as derivadas laterais sejam ambas positivas, resultando em . Algebricamente, como é sempre maior que :

* As derivadas laterais serão positivas quando for positivo, resultando em:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

* Serão negativas quando for negativo, resultando em:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

* E haverá máximo global em  nos casos intermediários:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Ou seja, lembrando que  é uma condição de regularidade, o resultado final dependerá do risco do projeto. Dado um nível de retorno , tanto  quanto  crescem à medida que  aumenta ou  diminui.

Se o projeto envolver pouco risco, vale a condição e haverá estímulo para usar financiamento no projeto (). Se o projeto envolver risco moderado, ocorre a situação em

(38) e todo o recurso excedente será investido no projeto, mas sem alavancagem (). Caso o risco do projeto for muito alto, uma parte dos recursos excedentes ao consumo no primeiro período será poupada (). Assim, mesmo que exista a possibilidade de financiamento, riscos desestimulam a utilização de empréstimos. Em resumo, teremos os casos:

* Máximo global em : projeto com alto risco e vale a condição
* (37);
* Máximo global em : projeto com baixo risco e vale a condição ;
* Máximo global em : projeto com risco moderado e vale a condição
* (38).

Este é um resultado importante porque mostra que a alocação ótima do excedente ao consumo independe da riqueza do agente. Na ausência de fricções, a proporção do excedente ao consumo que seria investida só depende do perfil de risco e retorno do projeto, em relação ao custo do empréstimo e ao retorno dos depósitos. Se essa proporção é a mesma para cada agente da economia, também é a mesma para a economia como um todo, de modo que todos tenderiam a poupar ou todos tenderiam a tomar emprestado, e o volume de equilíbrio de poupança e investimento seria zero. A única fonte de diferenciação possível para as preferências de alocação  entre os agentes da população seria o parâmetro *ρi*, a preferência relativa entre consumir no presente e consumir no futuro,[[4]](#footnote-5) que não poderia ser uniforme entre os agentes e teria que ser incluído na maximização efetuada em . Neste caso, a eficiência do sistema financeiro dependeria dos valores de , e a distribuição de riqueza seria irrelevante.

Já se considerarmos as fricções, nominalmente: a restrição ao investimento mínimo e à concessão de crédito, os agentes com menos recursos não podem alocar seus excedentes de maneira ótima. Assim, a existência de fricções torna a distribuição de renda relevante para a definição do volume de equilíbrio de poupança e investimento, e para a eficiência do sistema financeiro. Na seção seguinte serão quantificados os efeitos das fricções na definição da alocação do excedente ao consumo, prescindindo-se da diferenciação nos valores de , que serão considerados uniformes entre os agentes econômicos.

1. **Solução do programa de otimização**

É interessante ganhar alguma intuição sobre a otimização antes de resolvê-la. Como exemplo, a mostra a superfície de utilidades esperadas para um agente  com dotação inicial  e com , em uma economia em que o projeto exige investimento inicial , a chance de sucesso é , com retorno em caso de sucesso de  e retorno em caso de fracasso de . Utilizou-se ainda  e . Nesta situação, como , temos o caso em que .



**Figura 1: Utilidade esperada para *rs=50%; rf=-30%, α=40%; ρi1=70%; d0,i1=100; rb=24,7% e rp=8,7%***

Se não houvesse restrições, o máximo de utilidade seria obtido para:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

e

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

conforme discutido na seção anterior.

As curvas de nível da superfície na e o ótimo irrestrito em *si1=*41,18 e *ωi1=*1 são mostrados na . Também são mostradas as restrições: a solução deverá ser escolhida dentre os pontos da união entre o segmento de reta com  e a região delimitada à esquerda pela restrição de investimento mínimo e à direita pela proporção máxima de dívida.

Por , a restrição ao investimento mínimo corresponde à hipérbole  e a restrição ao financiamento máximo corresponde à reta , de maneira que a Figura 2 nos permite ter uma visão geral do problema da desigualdade: agentes com menor riqueza inicial terão menos excedente ao consumo, de modo que há uma maior chance de que sua alocação ótima não esteja dentro da região de soluções possíveis. Quanto maior o valor do investimento mínimo, *K*, piores as chances de que a parte mais pobre da população tenha condições de alocar seus recursos da maneira mais eficiente.



**Figura 2: Ótimo irrestrito, curvas de nível e restrições quanto ao investimento mínimo e ao limite de financiamento**

Para simplificar a análise, vamos considerar inicialmente apenas a restrição ao investimento mínimo, pois se trata da restrição mais complexa matematicamente e a restrição ao financiamento poderá ser incluída adiante sem muito esforço. Na medida em que  vai diminuindo, o conjunto de soluções possíveis vai reduzindo-se, mas a restrição de capital mínimo não será limitante enquanto o ponto de máximo sem restrição estiver no conjunto de soluções possíveis. O máximo irrestrito sairá da região de soluções possíveis para valores de  menores que aqueles que fazem com que a hipérbole  passe pelo ponto de máximo sem restrição. Logo, a restrição será limitante quando:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

No exemplo, isto ocorre quando, mantendo-se todos os demais parâmetros constantes, . Na medida em que  sofre reduções posteriores, o máximo passa a ocorrer sobre a hipérbole , no ponto em que esta tangencia uma das curvas de indiferença. Nestas condições, o lagrangeano do problema , considerando-se apenas a restrição ao investimento mínimo, fica:

|  |  |
| --- | --- |
| . | () |

Para evitar o problema da descontinuidade de , analisaremos o caso em que a solução não ocorre na descontinuidade de  e o caso em que ocorre solução de canto. Quando não houver solução de canto, consideraremos que o valor de  é uma constante . Após obtermos uma solução em função de , este será substituído por aquele entre os possíveis valores  ou  que for compatível com  correspondente ( para  e  para ). Já se houver uma solução de canto, teremos , como mostrado na Figura 3. É necessário, portanto, estabelecer as condições necessárias e suficientes para a solução de canto.



**Figura 3: Exemplo de solução de canto em que  e **

A derivada da restrição hiperbólica é dada por: .

Como a solução de canto somente ocorrerá para , a derivada da restrição hiperbólica neste ponto terá o valor . Por outro lado, as curvas de nível da função utilidade, que correspondem às curvas de indiferença, são dadas por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

em que  é um nível constante de utilidade esperada. Nos pontos de continuidade da função utilidade esperada, ou seja, no seu domínio e assumindo que , a derivada total de , , será:

|  |  |
| --- | --- |
| , | () |

mas, como a derivada total é zero ao longo de uma curva de nível, resulta que a inclinação da reta tangente a uma curva de nível em um ponto , será:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Logo, a solução de canto tem que ocorrer no cruzamento da hipérbole  com a reta vertical , resultando em:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Como as curvas de indiferença são fechadas e convexas, para que o ponto  seja solução de canto é necessário e suficiente que a hipérbole apenas toque a curva de nível, caso contrário, existiria uma curva de nível interior e, portanto com maior utilidade, em que estaria a solução. Assim, o limite à esquerda da derivada da curva de indiferença no ponto  deve ser maior (menor em valor absolto) que a inclinação da hipérbole dada por , enquanto o limite à direita da derivada da curva de indiferença no ponto  deve ser menor (maior em valor absoluto) que , garantindo que o ponto  seja o único em que a hipérbole toca a curva de indiferença.

A partir de

(46), da responsabilidade limitada e das condições de regularidade, é possível estabelecer que as condições necessárias e suficientes para a existência da solução de canto são:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Note que de (47) obtém-se indicando que nunca haverá solução de canto quando o projeto for de baixo risco e , já que para este caso ocorrer é necessário que . Já para projetos de risco moderado, em que , só não haverá a possibilidade de solução de canto se .

Nos casos em que não há solução de canto, é possível resolver o problema através de uma otimização com restrição convencional definida pelo lagrangeano em (42). A solução das condições de primeira ordem leva a duas equações polinomiais do segundo grau, uma em  e outra em , resultando em dois valores para  e dois outros para . Isso ocorre porque não foi incluída a restrição ao crédito e, conseqüentemente, não ficou garantido que os valores obtidos para  estivessem no domínio estabelecido em .

Para simplificar a notação, faça:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Se há equilíbrio, apenas o menor valor de , e conseqüentemente o maior valor de estará no domínio de . A solução será, portanto, a seguinte combinação de valores em

(48):

|  |  |
| --- | --- |
| ; | () |

e

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Há um caso, contudo, em que e não representam as soluções finais quando o investimento mínimo é limitante. Se as restrições forem muito fortes, seja a restrição ao crédito, seja a restrição hiperbólica ao investimento mínimo, o que significa que  é muito pequeno em relação a , então a utilidade máxima obtida com as restrições será cada vez menor, até que se torne menor que a maior utilidade sem investimento em projeto, com , que ocorre, por , quando . Esta utilidade mínima, abaixo da qual o ótimo passa a ser o ponto , será , que por fica:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Assim, a solução final é:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Esta situação é ilustrada na , que mostra como, dependendo do nível de desigualdade e da severidade da restrição ao investimento mínimo, os agentes mais pobres podem simplesmente não ter qualquer acesso a investimentos que poderiam melhorar seu bem estar. Além de efeitos na eficiência do sistema financeiro, é possível inferir que a redução no volume investido tem impactos não apenas na eficiência do sistema financeiro como também no crescimento econômico, chegando-se a um resultado semelhante ao de Aghion e Howitt (1998). Contudo, o modelo proposto trás uma variação não discutida em Aghion e Howitt: tanto muita desigualdade como muita eqüidade impactariam negativamente eficiência e também crescimento.



**Figura 4: Exemplo de situação em que as restrições impõem um limite tão severo à proporção de investimento que se torna mais preferível não fazer investimento algum em projeto**

Resta, por fim, introduzir a restrição de crédito, que pode piorar ainda mais a situação dos agentes mais pobres. Se o investimento mínimo não é limitante, o ótimo será simplesmente:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

Já para o caso em que o investimento mínimo é limitante, basta usar a interseção da hipérbole da restrição ao investimento mínimo com a reta :

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

A consideração sobre a utilidade dessa solução ser menor que a utilidade em  também é válida na situação com investimento mínimo e restrição ao crédito limitantes, e a solução quando há restrição de crédito fica:

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

1. **Simulação Numérica do Equilíbrio**

Neste trabalho, as implicações do modelo foram analisadas através do cálculo numérico do equilíbrio para um conjunto de parâmetros descritos na Tabela 1. A escolha dos projetos foi orientada por valores típicos de retorno esperado e desvio padrão de bolsas de países desenvolvidos (Projeto 1) e emergentes (Projeto 2). O Projeto 3 tem retorno esperado e desvio padrão típicos de países emergentes, mas incorpora uma assimetria maior em direção a retornos positivos.

|  |  |
| --- | --- |
| **Parâmetro** | **Valores Simulados** |
| Projeto disponível na economia |  |
| Restrição ao investimento mínimo como proporção da riqueza total no período inicial () |  |
| Taxa de desconto da utilidade do consumo futuro (*ρ*) | 0,25; 0,50; 0,75 |
| Desigualdade (*γ* ) | 1, 2, 3, 4, 5 |

**Tabela 1: Parâmetros usados nas simulações numéricas**

Em simulações prospectivas, observou-se que nem sempre existe o equilíbrio. A combinação de nível de desigualdade e restrição ao investimento mínimo pode gerar situações em que simplesmente não há empréstimos nem depósitos. Por exemplo, se o investimento mínimo for muito alto, o projeto pode não ser acessível, ou desejável nesta escala para a maioria da população. Se não há houver investimento no projeto, não haverá tomada de crédito e os bancos ficam sem função. Por outro lado, se a desigualdade for muito baixa e o investimento mínimo não impor um limite muito alto, os agentes não precisam do sistema financeiro para investir. Novamente o banco fica sem função e não há equilíbrio. A escolha da restrição ao investimento mínimo buscou usar valores de modo que houvesse o maior número possível de situações em que existe o equilíbrio.

Os valores escolhidos para  simplesmente buscam uma cobertura razoável para o intervalo entre 0 e 1. Decidiu-se utilizar apenas três valores em todas as combinações possíveis. Analogamente, a escolha de  buscou uma cobertura razoável dos valores de índice de Gini encontrados em economias reais. Até o valor 5, a relação entre o índice de Gini e  apresenta pouca não-linearidade, como mostrado na tabela abaixo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Índice de Gini correspondente** | **Exemplo de países com índice de Gini próximo** |
| 1 | 16,40% | Menor que Dinamarca |
| 2 | 31,30% | Canadá, Slovênia, Paquistão |
| 3 | 43,81% | Nigéria, Hong Kong, Filipinas |
| 4 | 53,73% | Brasil, Equador, Paraguai |
| 5 | 61,36% | Botswana, Haiti |

Fonte: United Nations Development Report 2009.

**Tabela 2: Valores de *γ* usados, índices de Gini correspondentes e economias reais cujos índices de Gini aproximam-se dos utilizados na simulação**

Para cada valor de  foi necessário usar um valor correspondente do parâmetro de escala  de modo que a riqueza total da economia não mudasse de uma simulação para outra. Como  para *γ* =1 foi arbitrariamente definido com o valor de 10, os demais valores foram: 5,39 para *γ* = 2; 2,70 para *γ* = 3; 1,28 para *γ* = 4 e 0,58 para *γ* = 5.

Na simulação foram calculadas matrizes de decisões ótimas contendo pares de escolhas  para toda a população que foi discretizada em intervalos de valor 0,001. Como o ótimo depende dos valores de  e , as matrizes de decisão ótima foram calculadas para todas as combinações possíveis de taxas  e , selecionadas em intervalos de 0,1%, que atendessem as condições , e . Dado o vetor de decisões ótimas, foram calculadas aproximações numéricas, para cada combinação de  e , dos valores:

1. : a diferença entre a quantidade demandada e a quantidade ofertada de recursos;
2. : a média dos valores absolutos das quantidades demandadas e ofertadas;
3. : medida relacionada com o lucro do banco.

Para cada valor de , buscou-se o valor de  para o qual  ou intervalo de valores de  em que  muda de sinal. Neste último caso, o valor de  que faz  foi interpolado linearmente. Assim, para este par de valores  e  há o equilíbrio entre oferta e demanda e  corresponde ao volume de recursos que é transacionado no sistema financeiro, resultando num lucro proporcional a . Desta forma, foram gerados vários pares de valores  e  (sendo o valor de  o resultado de uma interpolação) que correspondem ao equilíbrio entre oferta e demanda e que também resulta no maior lucro para o banco. Assim, no equilíbrio, as duas condições e (31) são satisfeitas.

1. **Análise dos Resultados**

Os resultados obtidos com as simulações são apresentados da à . Cada figura mostra os valores de “spread” e volume transacionado via bancos para todas as combinações de projeto, restrição de investimento mínimo como proporção da riqueza total (),  e  apresentados na . Na análise dos resultados é possível observar dois efeitos mais importantes em atuação: (a) a possibilidade dos agentes econômicos investirem no projeto sem a utilização do sistema financeiro; (b) a diminuição do acesso dos agentes econômicos a empréstimos. Ambos os efeitos resultam em menores volumes transacionados, impedindo os bancos de aproveitar economias de escala em sua operação, o que por sua vez leva à cobrança de maiores “spreads”. A importância relativa destes efeitos, contudo, é influenciada de maneira diferente pelos parâmetros. Enquanto o primeiro efeito é favorecido por menor desigualdade e por investimento mínimo menos restritivo, o segundo efeito é potencializado por maior desigualdade e maiores restrições.





**Figura 5: Projeto 1, **





**Figura 6: Projeto 2, **





**Figura 7: Projeto 3, **

Da à é possível observar o caso em que o investimento mínimo é menor, o que favorece o efeito (a). Nos menores níveis de desigualdade o volume é menor e os “spreads” maiores, ou seja, o sistema financeiro é menos eficiente, e aumentos marginais na desigualdade só melhoram a eficiência. À medida que a desigualdade torna-se bem maior, contudo, o efeito (b) começa a dominar e a eficiência do sistema financeiro novamente reduz-se. Nestas condições há um nível “ótimo” de desigualdade que maximiza a eficiência do sistema financeiro. Note que em algumas situações extremas (liquidez muito baixa ou muito alta, restrições muito brandas ou muito severas) pode simplesmente não existir equilíbrio e nada ser transacionado via sistema financeiro (volume igual a zero).





**Figura 8: Projeto 1, **





**Figura 9: Projeto 2, **





**Figura 10: Projeto 3, **

Da à , a maior restrição no investimento mínimo potencializa o efeito (b) e ameniza o efeito (a): em situações de maior desigualdade a restrição ao investimento mínimo dificulta ainda mais o acesso aos agentes mais pobres, e quando a desigualdade é menor, a restrição ao investimento mínimo impede que mais agentes realizem o projeto sem acessar o sistema financeiro. Resulta que aumentos marginais na desigualdade reduzem o volume transacionado no sistema financeiro já a partir das situações menos desiguais.

É curioso notar como quando o investimento tem maior assimetria para retornos positivos (Projeto 3), considerando este nível de restrição ao investimento mínimo (), a impaciência no consumo dos agentes torna-se relevante na definição dos “spreads”. Mesmo com a queda no volume, nas situações em que os investidores dão mais peso ao consumo futuro ( e principalmente ) os bancos conseguem cobrar “spreads” maiores porque os agentes estão dispostos a pagar mais pela oportunidade de investir e participar dos retornos do projeto. Apenas quando os agentes são mais impacientes () é que a há uma relação inversa entre “spreads” e volume.

1. **Sugestões para novas pesquisas**

O modelo proposto busca investigar a relação entre o funcionamento do sistema financeiro e a desigualdade através de modelo de equilíbrio com agentes que tomam decisões entre consumo e investimento em dois períodos, com incerteza e na presença de um sistema financeiro simplificado que aufere lucro pela diferença entre as taxas de captação de recursos e de empréstimos.[[5]](#footnote-6) Ao especificar diferenças nas dotações iniciais de riqueza dos indivíduos em uma situação de imperfeição no mercado financeiro e no investimento – nominalmente, restrição ao crédito e ao investimento míninmo, a abordagem adotada permite não somente analisar alguns efeitos destas condições sobre o crescimento econômico,[[6]](#footnote-7) mas, principalmente avançar na discussão do tema ao mostrar que a desigualdade também afeta a própria eficiência do sistema financeiro. No modelo, a restrição de crédito não depende diretamente da renda do indivíduo. Como todo o crédito é usado no investimento em um projeto, a restrição é a participação máxima de crédito na estrutura de capital do projeto. Agentes econômicos que possuem menos renda podem não ser capazes de suprir a participação mínima exigida de capital próprio para atingir o investimento mínimo necessário.

A maior contribuição deste modelo é demonstrar a viabilidade teórica de canais através dos quais a eficiência do sistema financeiro é afetada pela desigualdade. As simulações mostram que para os três tipos de projetos (refletindo distintos padrões de economias) a redução da desigualdade tem um efeito marginal positivo sobre o volume financiado e induz a redução dos *spreads* bancários. Também foi possível observar a resposta dos exercícios de simulação à mudança do parâmetro relativo ao investimento mínimo necessário. Quando a restrição é maior, predominam situações de restrição ao acesso dos agentes econômicos ao financiamento, em relação à possibilidade dos agentes realizarem investimentos sem o sistema financeiro – o que ocorre em situações com menores níveis de desigualdade.

Novas pesquisas podem tanto estudar empiricamente tais canais como elaborar o modelo aqui proposto de modo que possa ser calibrado para estudar economias reais. Modificações no modelo podem incluir: maior número de projetos possíveis; o efeito do microcrédito para projetos com valor de capital mínimo baixo; utilizar uma distribuição contínua para os retornos dos projetos e permitir correlações; usar gerações sobrepostas; permitir dotação inicial em mais de um período para analisar a função do sistema financeiro como suavizador do fluxo de caixa; diferenciar as preferências intertemporais de investimento e consumo entre os agentes; incluir uma restrição para consumo mínimo em cada período, analisando as situações de extrema pobreza; incluir a possibilidade de inadimplência, incluir governo, impostos e políticas redistributivas.

**Bibliografia**

AGHION, P.; HOWITT, P. *Endogenous growth theory*.MIT Press, 1998.

DIAMOND, D.; DYBVIG, P. Bank runs, deposit insurance and liquidity. *Journal of Political Economy*, v.91, n. 3, p. 401-419, jun. 1983.

LA PORTA, R.; SILANES, F.; SHLEIFER, A.; VISHNY, R. Legal determinants of external finance. *The Journal of Finance*, v.52, n.3, 1997.

LA PORTA, R. et al. The quality of government. *Journal of Law Economics and Organization*, v. 15, p. 222-279, abr. 1998.

LA PORTA, R. et al. What works in securities laws. *Journal of Finance*, v. 61, n. 1, p. 1-32, 2003.

LEVINE, R.; LOAYZA, N.; BECK, T. Financial intermediation and growth: causality and causes. *Journal of Monetary Economics*, v.16, n.1, p.31-77, ago. 2000.

LI, H., SQUIRE, L., ZOU, H. Explaining international and intertemporal variations in income inequality. *Economic Journal*, n. 108, p. 1-18, 1997.

STIGLITZ, J. *The role of the state in financial markets*. Proceedings of the World Bank Annual Conference on Development Economics, p. 19-52, 1998

WORLD BANK. *World Development Report 2000/2001*. Oxford University Press, New York, 2001.

1. Ver Bardham e Udry (1999); Li *et al* (1997); Aghion e Howitt (1998), Stiglitz (1998) e World Bank (2001). [↑](#footnote-ref-2)
2. Vide, por exemplo, Aghion e Howitt (1998, cap. 9). Essa função utilidade apresenta aversão ao risco relativa constante (CRRA) e igual a 1, tem aderência empírica e resulta em decisões de investimentos sem efeito riqueza. [↑](#footnote-ref-3)
3. De fato, a responsabilidade limitada é equivalente a , ou seja, a responsabilidade do acionista limita-se a 100% dos bens investidos em ativos da empresa (retorno de -1 ou 100% de perda), não atingindo sua riqueza pessoal (perda de mais de 100%). A exclusão da igualdade, resultando em , simplificará alguns resultados sem qualquer prejuízo das conclusões do modelo. [↑](#footnote-ref-4)
4. Se tivesse sido utilizada uma função utilidade CRRA com parâmetro de aversão ao risco (por exemplo, , em que  é o nível de aversão ao risco) a variação deste parâmetro entre os agentes também poderia ser uma fonte de diferenciação entre as escolhas de alocação ótima do excedente ao consumo. Da mesma maneira, expectativas diversas quanto aos retornos do projeto também diferenciariam as escolhas de alocação ótima. De qualquer modo, estes fatores só adicionam complexidade sem melhorar a explicação dos efeitos que são objeto de análise do modelo. [↑](#footnote-ref-5)
5. Neste ponto há relação com os trabalhos de Aghion e Bolton (1997), Ghatak, Morelli e Sjöström (2002), Greenwood e Jovanovic (1990), Horii, Ohdoi e Yamamoto (2005) e Townsend e Ueda (2005). [↑](#footnote-ref-6)
6. Neste ponto há relação com os trabalhos de Aghion e Bolton (1997), Ghatak, Morelli e Sjöström (2002), Greenwood e Jovanovic (1990), Horii, Ohdoi e Yamamoto (2005) e Townsend e Ueda (2005). A existência de uma relação entre desigualdade e crescimento que muda de sinal (negativa para desigualdades muito baixas e positiva para desigualdades muito altas), gerando uma distribuição de renda “ótima” para o crescimento é, todavia, uma novidade do modelo. [↑](#footnote-ref-7)