

Decomposição de Ondaletas e Análise de Variância e Correlação para Índices Financeiros

Edgard Almeida Pimentel
Juliana Fernandes da Silva

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada

Rua do Matão 1010, Cid. Universitária.
05508-090 São Paulo, SP, Brasil

Resumo: A idéia de diversificação internacional de portfólios tem particular interesse na correlação entre movimentos de índices financeiros nos diversos mercados do globo. Entretanto, a esmagadora maioria dos estudos aborda esta questão apenas do ponto de vista da dimensão temporal, ignorando o domínio da frequência. Este artigo propõe uma análise de variância e correlação para índices financeiros como o Dow Jones Industrial, o Ibovespa e o Euro Stoxx 50 através da decomposição destas séries em ondaletas. Uma vez que tal metodologia é capaz de decompor o sinal tanto na dimensão temporal como na dimensão da frequência, tal estudo de uma estrutura de correlações e variâncias é capaz de evidenciar fenômenos particulares de cada frequência de dados que, de forma agregada, são perdidos e focalizar peculiaridades de investimentos de longo e curto prazo de forma desgregada.

Palavras Chave: Ondaletas, Séries Financeiras, Análise de Variância e Correlação.

Código JEL: C10, G10, G12.

Abstract: Since the benefits of portfolio international diversification results appeared in financial literature, the issue of financial co-movements among different markets has been a key question. Many recent studies have approached this topic targeting a correlation investigation among financial indicators. Unfortunately, the huge majority of them focus only in the time domain, ignoring the relevant frequency domain which could differentiate long and short-run investment contribution to the energy of a time series. This paper proposes a wavelet-based variance and correlation analysis of key financial indexes for the Brazilian, American and European markets looking for some results concerning the correlation structure between them in both time and frequency domain, obtaining distinct results for long and short-run investment performance and contribution.

Key-words: wavelets, financial time series, correlation and variance analysis, co-movements.

JEL Code: C10, G10, G12.

1 Introdução

O estudo da co-movimentação entre índices financeiros, ou de sua correlação, é de largo interesse no estudo de finanças internacionais. Por um lado, apresenta informações altamente relevantes do ponto de vista do gerenciamento de risco, bem como da perspectiva da diversificação de portfólios.¹

Pela importância do tema, uma porção de estudos têm abordado a noção de correlação entre ativos financeiros de diversos mercados, buscando entender como o movimento dos retornos destes ativos se relacionam ([Ki94], [Li94], [LoSo95], [LoSo01], [KaSt96], [FoRi02], [BrDe05], [BrDe06]). Dentre estes estudos, as metodologias utilizadas são na sua totalidade destinadas à análise da correlação entre os retornos abordados na dimensão temporal, ou seja, como a correlação entre os retornos se comporta ao longo do período de tempo sob análise.

Entretanto, além da dimensão temporal, uma informação financeira agregada carrega componentes de diferentes frequências, i.e., investimentos de frequência mais altas e mais baixas, longo e curto prazo. Claramente, o grau de correlação de mercados distintos deve variar dentre frequências distintas. Um estudo bastante recente nesse sentido é [RuNu09].

O mesmo deve ocorrer para medidas de volatilidade. Analisar a volatilidade de uma particular série de retornos sem considerar diferentes frequências pode colapsar as contribuições de investimentos de curto e longo prazo numa única componente, o que gera imprecisões nos resultados de análise.

Assim sendo, este trabalho propõe a análise de correlação entre índices financeiros relativos ao mercado americano, europeu e brasileiro, precisamente o Dow Jones Industrial, Euro Stoxx 50 e Ibovespa, para os últimos cinco anos, estudando a estrutura de correlação entre estas séries, bem como procedendo uma análise de variância, por meio da metodologia de ondaletas. Além disso, o estudo ainda investiga o comportamento de cada série por meio de uma transformação discreta de ondaletas e da análise de multiresolução, empregada através da transformação discreta de ondaletas de máxima sobreposição. Assim, como resultados, além das estruturas de variância e correlação, o artigo ainda discorre sobre as principais componentes e suas contribuições em fenômenos como a recente rubulência financeira.

A segunda seção do artigo discute o banco de dados utilizado bem como introduz os conceitos de ondaletas e a metodologia utilizada. A terceira seção apresenta algumas estatísticas acerca dos índices estudados bem como implementa uma análise exploratória baseada na metodologia de ondaletas. Uma quarta seção apresenta os resultados para a análise de correlações e variâncias e uma seção final discute algumas conclusões.

¹Para uma análise dos benefícios da diversificação internacional de portfólios, referimo-nos a [Gr68].

2 Metodologia e Bases de Dados

2.1 Bases de dados

Os dados utilizados neste trabalho são os retornos² financeiros das séries financeiras Ibovespa, Euro Stoxx 50 e Dow Jones Industrial, no período de 10/11/2004 até 05/06/2009. Por tratarem-se de informações diárias, os dados foram compatibilizados de modo que houvesse 1024 observações para cada série e, mais ainda, que todas essas observações fossem referentes à mesma data para cada série. Assim, a compatibilização leu em consideração as diferenças entre os dias de funcionamento dos mercados financeiros na Europa, Estados Unidos e Brasil.

A escolha por estes índices foi baseada na capacidade destes de avaliarem, ou representarem, a performance de cada um dos mercados sob análise, o que parece razoável dada a relevância de cada um deles. O Euro Stoxx 50 congrega cinquenta ativos de empresas consideradas líderes em setores chave para a economia da zona do Euro, espalhadas em doze países da União Européia. Já o Ibovespa e o Dow Jones são índices classicamente tomados em consideração quando da análise financeira nos ambientes brasileiro e americano.

O uso de 1024 observações deve-se à metodologia de ondaletas empregada, e será discutida na subseção seguinte.

2.2 O método de ondaletas

Para introduzir a análise de ondaletas no contexto de séries temporais financeiras, é preciso entender a motivação de seu uso neste contexto. Considere uma série de retornos de um determinado ativo financeiro. Então, identifiquemos o $0 \in \mathbb{R}$ com a primeira informação da série e definamos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que no intervalo $(-\infty, 0)$ é identicamente nula, no intervalo que vai de zero até a última observação da série, ela assume o valor da série em cada ponto do tempo - no nosso caso esse intervalo é $[0, 1024]$ - e que é novamente identicamente nula em $(1024, +\infty)$. Então esta função e seu quadrado têm no máximo um número finito de descontinuidades (duas na verdade) e são portanto de quadrado integrável, ou seja, $f \in L^2$.

Se considerarmos o espaço das funções de quadrado integráveis, L^2 , ao notarmos que trata-se de um espaço de Hilbert, então podemos facilmente concluir que este espaço possui uma base ortonormal. Deste modo, a análise de ondaletas busca decompor uma dada série nos coeficientes que a determinam, de maneira

²O retorno do ativo i no instante t é calculado como usual:

$$r_{i,t} = \ln(x_{i,t} - x_{i,t-1}),$$

onde $x_{i,t}$ é o preço do ativo i no instante t .

única, na base ortonormal de ondaletas. É a partir desta noção que surge, devido a [Ha10] a noção de ondaleta, desenvolvida recentemente pelos trabalhos de, entre outros, [Gr88] e [Da92].

Em termos bastante gerais, a idéia por trás da análise de ondaletas é entender como uma particular média ponderada de um conjunto de funções varia entre períodos. Em se tratando de uma série temporal, este intuito pode ser traduzido como o entendimento de como os componentes do sinal variam em diferentes escalas, ou seja, em diferentes frequências temporais. Assim, por exemplo, ao analisarmos a série de retorno do Ibovespa através da metodologia de ondaletas, podemos endereçar questões como a diferença de volatilidade entre os investimentos especulativos e o investimento em bolsa de micro e pequenos investidores.

Formalmente, temos a

Definição 1 *Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du = 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u) du = 1.$$

Então $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada ondaleta. Se, ainda, a transformação de Fourier de ψ ,

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \exp(-i2\pi fu) du$$

for tal que

$$C_{\Psi} \equiv \int_0^{\infty} \frac{|\Psi^2(f)|}{f} df$$

satisfaz $0 < C_{\Psi} < \infty$, então ψ é dita uma ondaleta admissível.

De posse da definição formal de uma ondaleta, passemos à discussão da transformação discreta de ondaletas (TDO) e da transformação discreta de ondaletas de máxima sobreposição (TDOMS). Vejamos primeiramente o caso da TDO.

Considere uma série temporal diádica de tamanho $N = 2^J$ - ou sinal diádico - dado por X . Então, o vetor da transformação discreta de ondletas, ω , de comprimento N é dado por

$$\omega = \mathcal{W}X,$$

onde \mathcal{W} é a matriz do \mathbb{R}^{N^2} que define a TDO de X . A matriz ω pode ser escrita na forma

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J, v_J]$$

onde cada ω_i é um vetor de tamanho $N/2^i$ associando a mudanças na escala $\sigma_i = 2^{i-1}$ enquanto que v_J é um vetor de comprimento $N/2^J$ e está associado aos coeficientes referentes às médias da escala 2^J . Já a matriz ortonormal \mathcal{W} consiste dos filtros - ou ondaletas - utilizados na decomposição do sinal.

Passemos agora à análise da transformação discreta de ondaletas de máxima sobreposição, TDOMS. Ao contrário do caso anterior, X não necessita ser um vetor de comprimento diádico, de modo que tomamos X um vetor de observações para uma dada série temporal de comprimento N . Então, o vetor $\tilde{\omega}$ de comprimento $(J+1)N$ dos coeficientes de TDOMS é dado por

$$\tilde{\omega} = \tilde{\mathcal{W}}X,$$

onde $\tilde{\mathcal{W}}$ é uma matriz do $\mathbb{R}^{(J+1)N^2}$ que define a TDOMS e é construída de forma análoga àquela brevemente descrita para o caso da TDO.

Deste modo, o uso das matrizes \mathcal{W} e $\tilde{\mathcal{W}}$ é crucial na análise da composição do sinal em cada uma das distintas escalas em cada instante do tempo.

Neste trabalho, foram utilizadas as ondaletas de Daubechies, D(2), ou ondaleta de Haar, e D(8), ou L(8), todas elas ondaletas de suporte compacto.³

2.3 Obtendo estruturas de correlação e variâncias

O objetivo principal deste trabalho é estimar uma estrutura de variância e correlações para os índices financeiros descritos há pouco nas diversas escalas permitidas pela análise de ondaletas. Para tanto apresentamos a metodologia empregada.

Considere a série temporal X , de comprimento 2^J , e seja $\{\tilde{h}_{j,l} : l = 0, \dots, L_j - 1\}$ o filtro de ondaletas para a j -ésima escala da TDOMS, onde $L_j = (2^j - 1)(L - 1)$ é o tamanho do filtro e L é o tamanho do filtro \tilde{h}_l . Então, podemos definir o processo estocástico

$$\tilde{W}_{j,t} \triangleq \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} X_{t-l}$$

que define o sinal obtido pela filtragem de X pelos coeficientes de ondaletas da TDOMS. Assim temos a

Definição 2 *Se existir, e for finita, a variância de ondaletas tempo-dependente para a escala σ_j , do sinal X , é dada por*

$$\nu_{X,t}^2(\sigma_j) \triangleq \text{var} \left\{ \tilde{W}_{j,t} \right\}.$$

³Para uma revisão bastante completa da teoria envolvendo ondaletas nos referimos à [Mo99]. Para aplicações de ondaletas às problemas de séries temporais e séries temporais financeiras, nos referimos à [Pe83], [Pe92], [Pe93], [Pe94], [Pe95], [PeGu94], [PeMo97], [PeWa93], [PeWa00]. Para espaços de Hilbert, nos remetemos à [Co90].

Caso esta grandeza seja independente de t então $\nu_{X,t}^2(\sigma_j) = \nu_X^2(\sigma_j)$ é chamado variância de ondaletas tempo-independente para a escala σ_j .

Definição 3 Considere dois sinais X e Y de mesmo comprimento. Então a covariância de ondaletas para a escala σ_j destas séries é dada por

$$\nu_{XY}(\sigma_j) = \text{cov} \left\{ \widetilde{W}_{X,j,t}, \widetilde{W}_{Y,j,t} \right\}.$$

E pode ser normalizada para um coeficiente de correlação através de

$$\rho_{XY}(\sigma_j) = \frac{\text{cov} \left\{ \widetilde{W}_{X,j,t}, \widetilde{W}_{Y,j,t} \right\}}{\left(\text{var} \left\{ \widetilde{W}_{X,j,t} \right\} \text{var} \left\{ \widetilde{W}_{Y,j,t} \right\} \right)^{1/2}} = \frac{\nu_{XY}(\sigma_j)}{\nu_X(\sigma_j) \nu_Y(\sigma_j)}.$$

Apesar da possibilidade de procedermos uma análise de variância com base nos coeficientes da TDO, nosso procedimento considera apenas a transformação discreta de ondaletas de máxima sobreposição. Isto se deve ao fato de que o estimador de variância baseado nos coeficientes da TDOMS é assintoticamente mais eficiente do que aquele baseado nos coeficientes da TDO [Pe95]. Os estimadores utilizados neste trabalho são aqueles sugeridos por [PeWa02], ao qual nos referimos para as propriedades e resultados gerais acerca destes mesmos estimadores.

3 Análise exploratória de dados

Com a finalidade discutirmos o comportamento das séries de retornos para os índices financeiros considerados neste trabalho, realizaremos uma análise exploratória dos dados, abordando inclusive as transformações de ondaletas TDO e TDOMS.

Iniciamos nossa análise com a série do Ibovespa. Observemos abaixo o gráfico dos retornos do Ibovespa seguido do seu gráfico quantil-quantil normal.

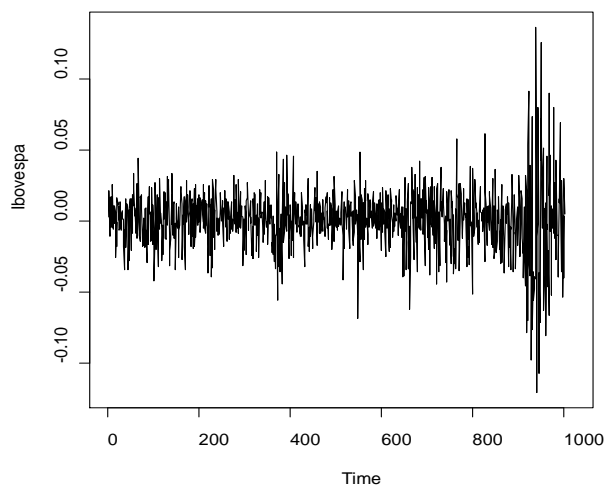


Fig. 1 - Retornos Ibovespa

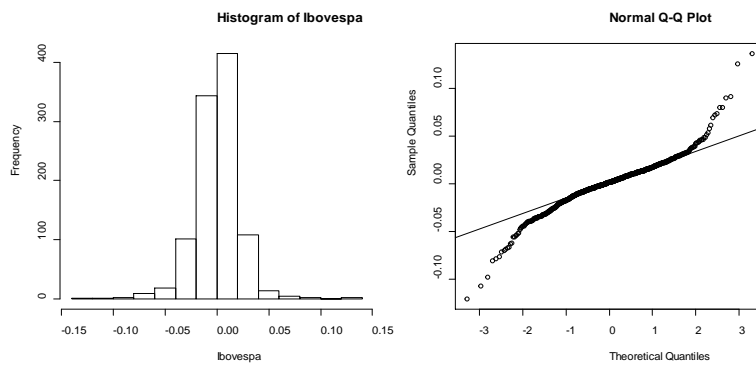


Fig. 2 - Q-Q Normal e Histograma, Retornos do Ibovespa

A análise dos dados sugere que os retornos do Ibovespa não apresentam uma distribuição normal, além de apresentarem maior volatilidade na última terça parte do período analisado. A observação do histograma sugere a presença de caudas mais pesadas do que a de uma Gaussiana padrão. Passando à análise dos retornos para a série do Dow Jones Industrial

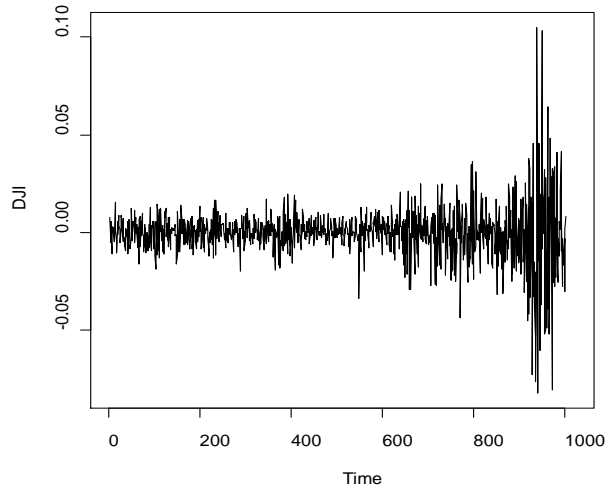


Fig. 3 - Retornos, Dow Jones Industrial

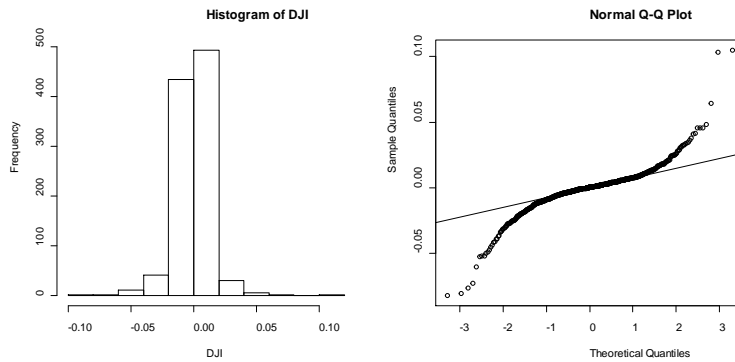


Fig. 4 - Q-Q Normal e Histograma, Retornos do Dow Jones Industrial

Novamente, observamos uma série de retornos com elevada oscilação no último terço do período analisado. Entretanto, esta oscilação parece mais acentuada do que no caso do Ibovespa, indicando uma volatilidade maior no período para os retornos do índice Dow Jones Industrial. Mais uma vez obtemos fortes evidências de que a distribuição destes retornos não segue uma Gaussiana padrão, uma vez que as caudas da distribuição sugerem um comportamento leptocúrtico.

No caso dos retornos para o Euro Stoxx observamos fenômeno parecido.

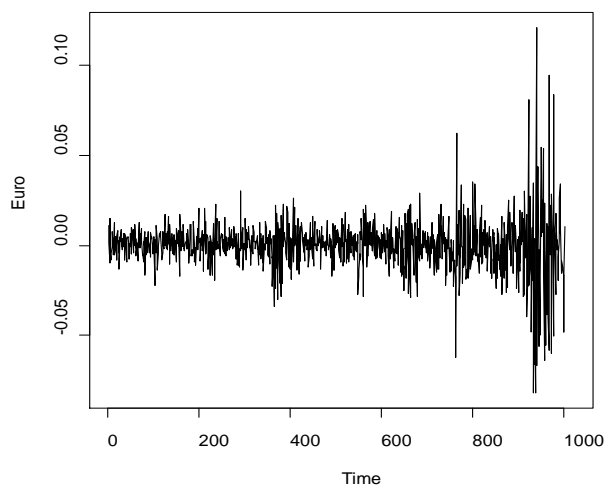


Fig. 5 - Retornos Euro Stoxx 50

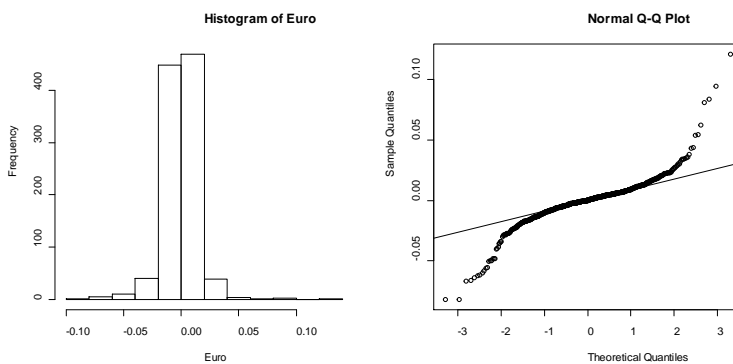


Fig. 6 - Q-Q Normal e Histograma, Retornos do Euro Stoxx 50

Não é surpreendente que os retornos do Euro Stoxx 50 também apresentem um comportamento bastante errático com elevação de volatilidade ao final do período de análise. Alinhando seu comportamento àqueles sugeridos pelos gráficos anteriores, esta série também oferece evidências de uma distribuição com caudas mais pesadas do que aquelas realizadas por uma Normal.

De modo geral, a análise exploratória sugere que as três séries apresentam algum grau positivo de correlação. Entretanto, conforme observamos anteriormente, não é possível ainda diferenciarmos entre os níveis de associação entre

as diversas escalas ou frequências de cada sinal - esta tarefa será realizada na próxima seção.

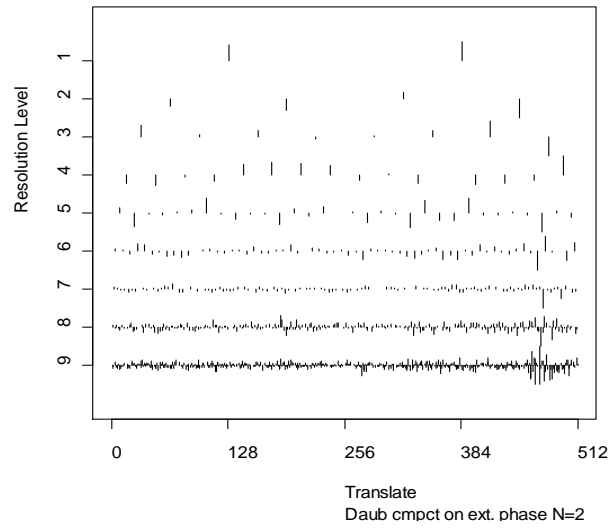


Fig. 7 - TDO, Retornos Ibovespa

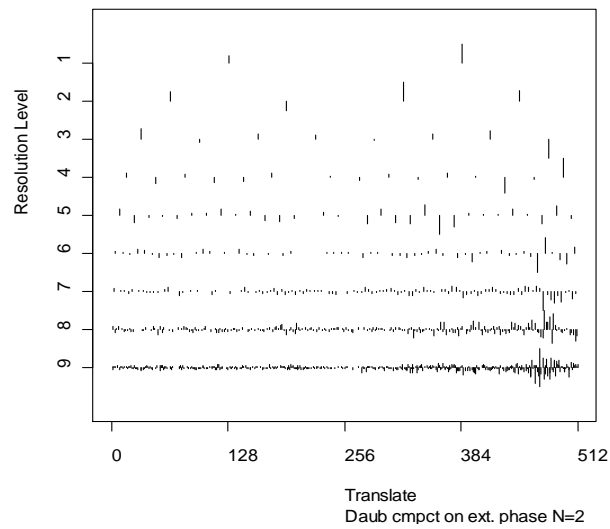


Fig. 8 - TDO, Retornos Dow Jones Industrial

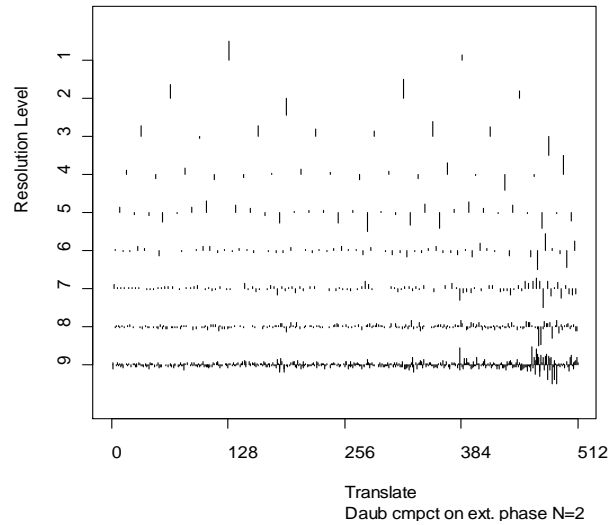


Fig. 9 - TDO, Retornos Euro Stoxx 50

Passemos agora à análise dos coeficientes de ondaletas obtidos pela TDO. Para as três séries, em escalas mais altas, ou seja, os coeficientes referentes ao movimento de investimentos de longo prazo, podemos observar um desvio em relação ao zero. Isto indica a presença de flutuações entre os períodos referentes a cada uma destas escalas. Já em escalas mais baixas - relacionadas a investimentos de curto prazo - os coeficientes apresentam menores desvios com relação ao zero a menos do período relacionado à recentes turbulência financeira. Neste período - correspondente aos coeficientes entre 450 e 500 - as três primeiras escalas apresentam significantes desvios com relação ao zero, o que indica uma perturbação considerável dos investimentos de curto prazo no período.

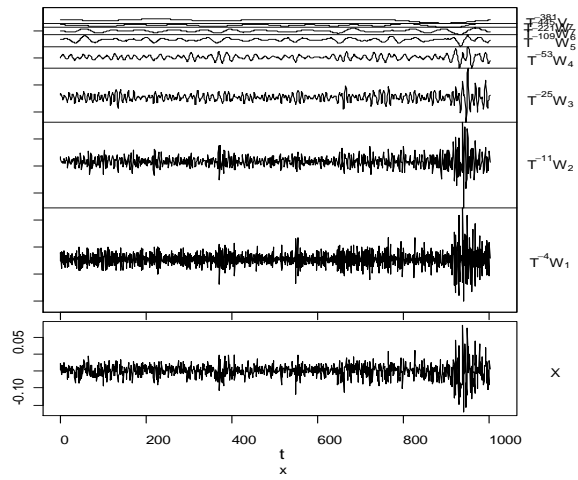


Fig. 10 - Análise de Multiresolução, Retornos Ibovespa

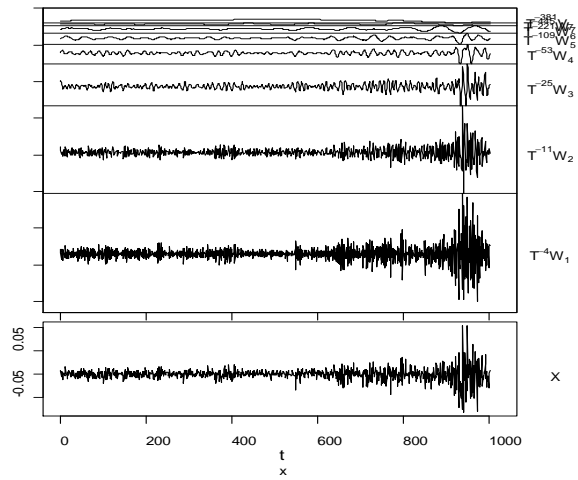


Fig. 11 - Análise de Multiresolução, Retornos DJI

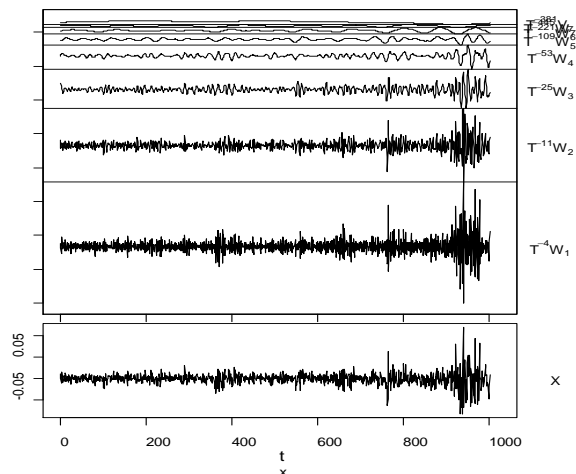


Fig. 12 - Análise de Multiresolução, Retornos Euro Stoxx 50

Da mesma forma, ao abordarmos a análise de multiresolução com base na TDOMS para as três séries, notamos que as frequências que mais contribuem com a energia de cada sinal são as três frequências mais altas. Desta forma, sugerimos a interpretação de que para os três índices, os investimentos de curto prazo são preponderantes em sua composição e movimento. Novamente, verifica-se uma flutuação largamente mais acentuada no período que coincide com a crise recente dos mercados financeiros nestas mesmas frequências, o que oferece consistência à conclusão de que os investimentos cuja volatilidade é mais acentuada no contexto da crise financeira são aqueles de curto prazo.

Já para o caso de escalas mais altas - investimento de longo prazo - além destes contribuírem de forma limitada para a composição do sinal, não há nenhuma oscilação que mereça destaque em todo o período de análise

4 Resultados e discussão

Nesta seção apresentaremos as matrizes de variância de cada série de retornos, seguidas das matrizes de correlação e discutiremos seus resultados, oferecendo sua interpretação econômica. Todos os valores reportados são significantes a 5%, como usualmente, e, para a análise de correlação, as três últimas escalas não apresentaram resultados estatisticamente significantes. Em cada tabela, d_i

representa a i -ésima escala de ondaleta, onde $i = 1, \dots, 7$. Quanto mais baixo for i mais alta a frequência da análise.

Tabela 1 - Retornos Ibovespa			
Análise de Variância			
d_1	$2,332 \times 10^{-4}$	d_6	$3,539 \times 10^{-6}$
d_2	$1,375 \times 10^{-4}$	d_7	$8,534 \times 10^{-7}$
d_3	$6,653 \times 10^{-5}$	d_8	10^{-10}
d_4	$2,071 \times 10^{-5}$	d_9	10^{-10}
d_5	$6,096 \times 10^{-6}$	d_{10}	10^{-10}

Tabela 2 - Retornos Euro Stoxx			
Análise de Variância			
d_1	$1,220 \times 10^{-4}$	d_6	$1,434 \times 10^{-6}$
d_2	$5,870 \times 10^{-5}$	d_7	$2,738 \times 10^{-7}$
d_3	$2,435 \times 10^{-5}$	d_8	10^{-10}
d_4	$8,925 \times 10^{-6}$	d_9	10^{-10}
d_5	$2,481 \times 10^{-6}$	d_{10}	10^{-10}

Tabela 3 - Retornos Dow Jones Industrial			
Análise de Variância			
d_1	$1,143 \times 10^{-4}$	d_6	$7,160 \times 10^{-7}$
d_2	$4,202 \times 10^{-5}$	d_7	$3,337 \times 10^{-7}$
d_3	$1,834 \times 10^{-5}$	d_8	10^{-10}
d_4	$6,242 \times 10^{-6}$	d_9	10^{-10}
d_5	$1,681 \times 10^{-6}$	d_{10}	10^{-10}

Para todas as séries de retornos analisadas, a volatilidade decresce conforme a escala aumenta, ou seja, os componentes de mais alta frequência dos índices analisados apresentam maior volatilidade. Este resultado satisfaz às expectativas econômicas que atribuem ao investimento de mais alta frequência um grau de risco mais elevado.

Mais interessante, entretanto, é o fato de que em cada diferente escala, os retornos do Ibovespa apresentaram a mais alta volatilidade, seguido dos retornos do Euro e, por fim, do mesmo volátil retorno Dow Jones Industrial. Este fato corrobora, por assim dizer, a noção de uma volatilidade mais baixa no mercado americano - tão chamado livre de risco - seguida do mercado europeu e de um grau de incerteza mais elevado no mercado brasileiro. De modo geral, os resultados indicam que as hipóteses de

Passemos agora à análise de correlação de ondaletas para estas mesmas séries de retornos, nas mesmas dez escalas temporais distintas.

Tabela 4 - Correlação de Ondaletas			
d_1	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,444	0,603
Euro Stoxx	0,444	1	0,302
Dow Jones	0,603	0,302	1
d_2	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,623	0,688
Euro Stoxx	0,623	1	0,582
Dow Jones	0,688	0,582	1
d_3	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,689	0,744
Euro Stoxx	0,689	1	0,781
Dow Jones	0,744	0,781	1
d_4	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,737	0,670
Euro Stoxx	0,737	1	0,810
Dow Jones	0,670	0,810	1
d_5	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,731	0,700
Euro Stoxx	0,731	1	0,764
Dow Jones	0,700	0,764	1
d_6	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,591	0,557
Euro Stoxx	0,591	1	0,809
Dow Jones	0,557	0,809	1
d_7	Ibovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Ibovespa	1	0,704	0,864
Euro Stoxx	0,704	1	0,937
Dow Jones	0,864	0,937	1

A análise das tabelas acima indica que, para todas as escalas temporais, a correlação entre os retornos do Ibovespa, Euro Stoxx e Dow Jones Industrial, dois a dois, é positiva.

Tomando-se o Ibovespa e o Dow Jones Industrial, podemos ver que para as três primeiras escalas - com frequências altas - estes mercados parecem bastante correlacionados e de forma crescente nestas mesmas escalas. Isto pode sugerir que movimentos nos retornos devidos ao comportamento de investimentos de mais alta frequência - que já identificamos com o investimento especulativo, p.e., - estão atamente correlacionados em ambos os mercados. Em escalas mais alta, ambos os índices voltam a apresentar correlações crescentes, indicando a possibilidade de uma aderência maior entre os mercados no que diz respeito ao investimento de longo prazo.

Já os mercados europeu e americano apresentam baixa correlação na primeira escala. Entretanto, essa cresce rapidamente e atinge níveis muito próximos de 1

na sétima escala. Este fato dá suporte à idéia de que, apesar dos investimentos de altíssima frequência apresentarem algum grau de descolamento em ambos os mercados, à medida em que esta mes frequência diminui, estes mercados apresentam comportamentos muito semelhantes.

5 Comentários finais

Este artigo buscou implementar uma análise de ondaletas para indicadores financeiros - representativos da performance financeira dos mercados americano, brasileiro e europeu - em dois níveis, no período dos últimos cinco anos. A princípio, analisando padrões particulares de cada série e, posteriormente, procedendo uma análise de variância e correlação com base em transformações e ondaletas.

Em um primeiro nível, pudemos constatar que os investimentos de longo prazo - ou, de frequência mais baixa - foram os que mais contribuíram com a formação de cada sinal, bem como apresentaram maior flutuação no período recente. Já os investimentos de longo prazo, ou de frequência mais alta, além de sofrerem menores oscilações, ainda exerceram menor contribuição - energia - à formação dos índices.

Finalmente, a análise de variância e correlações. A análise de variância mostrou um nível de volatilidade mais elevado em todas as escalas para o mercado brasileiro, seguido, respectivamente, pelo europeu e americano. Para cada mercado, na medida em que a frequência do investimento diminui, ou seja, quanto mais se eleva o caráter de curto prazo do investimento, maior sua volatilidade. Já a análise de correlações apontou para todos os mercados, em todas as escalas, correlações positivas. Entretanto, no que tange a investimentos de longo prazo, esta correlação é mais baixa, o que se reverte à medida que o caráter de longo prazo do investimento se eleva. Assim, podemos inferir pela existência de um maior alihamento entre os mercados sob análise no que diz respeito à investimentos de mais longo prazo.

Referências

- [Ag72] Agmon, T. The relations among equity markets: a study of share price co-movements in the United States, United Kingdom, Germany and Japan, *Journal of Finance*, 27, 839-855. 1972.
- [A'HWo01] A'Hearn, B., Woitek, U. More international evidence on the historical properties of business cycles, *Journal of monetary Economics*, 47, 321-346. 2001.
- [BrDe04] Brooks, R., Del Negro, M. The rise in comovement across national stock markets: market integration or IT bubble, *Journal of Empirical Finance*, 11, 659-680. 2004.

- [BrDe05] Brooks, R., Del Negro, M. Country versus region effects in international stock returns, *Journal of Portfolio Management*, 67-72, Summer. 2005.
- [BrDe06] Brooks, R., Del Negro, M. Firm-level evidence on international stock market comovement, *Review of Finance*, 10,69-98. 2006.
- [Co90] Conway, J. B., *A course in functional analysis*. Springer Verlag.
- [CPS08] Candelon, B., Piplack, J., and Straetmans, S. On measuring synchronization of bulls and bears: the case of East Asia, *Journal of Banking and Finance*, 32, 1022-1035. 2008.
- [Da92] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, Volume 61 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. 1992.
- [FoRi02] Forbes, K., Rigobon, R. No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements, *Journal of Finance*, 57, 2223-2261. 2002.
- [Gr68] Grubel, H. Internationally diversified portfolios: welfare gains and capital flows, *American Economic Review*, 58, 1299-1314. 1968.
- [Ha10] Haar, A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, 69, 331-371. In German. 1910.
- [KaSt96] Karolyi, G. A., Stulz, R. M. Why do markets move together. An investigation of U.S.-Japan stock return comovements, *Journal of Finance*, 51, 951-986. 1996.
- [KiWa90] King, M., and Wadhwani, S. Transmission of volatility between stock markets, *Review of Financial Studies*, 3, 5-33. 1990.
- [KSS94] King, M., Sentana, E., and Sushil, W. Volatility and links between national stock markets, *Econometrica*, 62, 668-675. 1994.
- [KiPi09] Kizys, R., and Pierdzioch, C. Changes in the international comovement of stock returns and asymmetric macroeconomic shocks, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 19, 289-305. 2009.
- [LeSa70] Levy, H., and Sarnat, M. International diversification of investment portfolios, *American Economic Review*, 60, 668-675. 1970.
- [LEI94] Lin, W.-L., Engle, R., and Ito, T. Do bulls and bears move across borders. International transmission of stock returns and volatility, *Review of Financial Studies*, 7, 507-538. 1994.

- [LoSo95] Longin, F., and Solnik, B. Is the correlation of international equity returns constant:1960-1990, *Journal of International Money and Finance*, 14, 3-26. 1995.
- [LiSo01] Longin, F., and Solnik, B. Extreme correlation of international equity markets, *Journal of Finance*, 56, 649-676. 2001.
- [Mo99] Morettin, P. A., *Ondas e Ondaletas, da análise de Fourier à análise de ondaletas*. Edusp. 1999.
- [Pa04] Pakko, M. A spectral analysis of the cross-country consumption correlation puzzle, *Economics Letters*, 84, 341-347. 2004.
- [Pe83] Percival, D. B. *The Statistics of Long Memory Processes*. Ph.D. thesis, Department of Statistics, University of Washington. 1983.
- [Pe92] Percival, D. B. Simulating Gaussian random processes with specified spectra. *Computing Science and Statistics*, 24, 534-538. 1992.
- [Pe93] Percival, D. B. Three curious properties of the sample variance and autocovariance for stationary processes with unknown mean. *The American Statistician*, 47, 274-276. 1993.
- [Pe94] Percival, D. B. Spectral analysis of univariate and bivariate time series. In J. L. Stanford and S. B. Vardeman, editors, *Statistical Methods for Physical Science*, Volume 28 of *Methods of Experimental Physics*, 313-348. Academic press, Inc., Boston. 1994.
- [Pe95] Percival, D. B. On estimation of the wavelet variance. *Biometrika*, 82, 619-631. 1995.
- [PeGu94] Percival, D. B. and Guttorp, P. Long-memory processes, the Allan variance and wavelets. In E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, editors, *Wavelets in Geophysics*, Volume 4 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, 325-344. Academic Press, Inc, San Diego. 1994.
- [PeMo97] Percival, D. B. and Mofjeld, H. O. Analysis of subtidal coastal sea level fluctuations using wavelets. *Journal of the American Statistical Association*, 92, 868-880. 1997.
- [PeWa93] Percival, D. B. and Walden, A. T. *Spectral Analysis for Physical Applications: Multitaper and Conventional Univariate Techniques*. Cambridge University Press, Cambridge, England. 1993.
- [PeWa00] Percival, D. B. and Walden, A. T. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, England. 2000.
- [PSD01] Percival, D. B., Sardy, S., and Davison, A. Wavestrapping time series: Adaptive wavelet-based bootstrapping. In B. J. Fitzgerald, R. L. Smith, A. T. Walden, and P. C. Young, editors, *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, 442-471. Cambridge University Press, Cambridge, England. 2001.

- [RuNu09] Rua, A., Nunes, L. C. International comovement of stock market returns: A wavelet analysis, *Journal of Empirical Finance*. 2009.
- [Sm01] Smith, K. Pre-and post-1987 crash frequency domain analysis among Pacific rim equity markets, *Journal of Multinational Financial Mangement*, 11, 69-87. 2001.